Formulario
per il corso di Statistica

(materiale consultabile durante l’esame scritto)

Capitolo 1.

Caratteristiche del dominio delle variabili:

a) Incompatibilità : $X_i \neq X_j$ *per ogni* $i \neq j$ *e* $X_i, X_j \in S$

b) Esaustività : *per ogni* $u \in P$; $X(u) \in S$;

c) Riproducibilità : $X = X_i$ *se e solo se* $X(u) = X_i$

Condizioni per una scala (quantitativa)

1) $X_i < X_j$ *oppure* $X_i > X_j$ *per ogni* $i \neq j$

2) $X_i < X_j \Rightarrow X_i \neq X_j$

3) $X_i < X_j$ *e* $X_j < X_k \Rightarrow X_i < X_k$ *per ogni* $i < j < k$

Condizioni per una scala parzialmente ordinata.

$d_{ij} < d_{rs}$ *per* $i < j,\ r < s,\ j \leq r,\ i \leq s$

Condizioni per una scala metrica:

$d(X_i, X_j) = 0$ *se e solo se* $X_i = X_j$; *Identità*

$d(X_i, X_j) > 0$ *se* $X_i \neq X_j$; *Positività*

$d(X_i, X_j) = d(X_j, X_i)$; *Simmetria*

$d(X_i, X_k) + d(X_k, X_j) \geq d(X_i, X_j)$; *Disuguaglianza triangolare*

Capitolo 2.

Frequenze relative:

$$f_i = \frac{n_i}{n};\quad i = 1,2,\ldots,k;\qquad \sum_{i=1}^{k} n_i = n;\qquad f_i \geq 0\quad i = 1,2,\ldots,k;\ \sum_{i=1}^{k} f_i = 1$$

Regole per il numero di rami nel diagramma ramo-foglia:

$$Rami = [10Log_{10}(15)] = [11.76] = 11;$$

$$Rami = [10Log_{10}(3000)] = [34.77] = 34;\quad Rami : [1.5\sqrt{n}]$$

Troncamento dei valori alla r-esima cifra decimale:

$$X_i^* = \frac{[X_i * 10^r + 0.5]}{10^r};\qquad i = 1,2,\ \ldots\ ,n$$

Caratteristiche delle classi:

$$Modulo : U_i - L_i;\ \ Valore\ centrale : \frac{U_i + L_i}{2};\ \ densità : \ \frac{f_i}{U_i - L_i}$$

Numero delle classi:

$$Regola\ di\ sturges:\ k = 1 + [3.322Log(n)];$$

$$Ampiezza\ costante:\ d = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{1.5 * \sqrt[3]{n}} \Rightarrow k = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{d}$$

Ampiezza costante noto lo scarto quadratico medio:

$$d = \frac{3.49}{\sqrt[3]{n}} * \sigma;\ \ k = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{d}$$

Classi estreme indeterminate:

$$1)\begin{cases} Max\left\{\dfrac{X_{min} + U_1}{2};\ U_1 - \dfrac{h_3}{h_2^2} * \dfrac{f_1}{2}\right\};\ L_1 = 2 * c_1 - U_1; \\ c_k = Min\left\{\dfrac{X_{max} + L_k}{2};\ L_k + \dfrac{h_{k-2}}{h_{k-1}^2} * \dfrac{f_k}{2}\right\};\ U_k = 2 * c_k - L_k \end{cases}$$

$$2)\ U_k = L_k * \underset{1 \leq i < k}{Max}\left\{\frac{U_i}{L_i}\right\};\ L_1 = U_1 * \underset{1 < i \leq k}{Min}\left\{\frac{L_i}{U_i}\right\};$$

Frequenze relative cumumate e retrocumulate:

$$F_i = \frac{N_i}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{i} n_i}{n} = \sum_{j=1}^{i}\left(\frac{n_i}{n}\right) = \sum_{j=1}^{i} f_j;\quad G_i = 1 - \sum_{j=1}^{i} f_j$$

Funzione di distribuzione delle frequenze relative:

$$f(X) = \begin{cases} f_i & se\ \ X = X_i,\ i = 1,2,\ldots,n;\ X \in S \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$con\ \ f(X) \geq 0;\ \ \sum_{X = X_i} f(X) = 1$$

Area dell'istogramma tra $[X_{(r)}, X_{(s)}]$:

$$A(X_r, X_s) = (U_r - X_r)h_r + \sum_{i=r+1}^{s-1} A(X_i, X_{i+1}) + (X_s - L_s)h_s$$

Funzione di ripartizione delle frequenze relative:

$$F(X) = \sum_{X_i \leq X} f(x) = \begin{cases} 0 & se\ \ X < X_{min} \\ F_i & se\ \ X_{(i)} \leq X < X_{(i+1)}\ \ per\ i = 1,2,\ldots,n-1 \\ 1 & se\ \ X \geq X_{max} \end{cases}$$

Ogiva delle frequenze:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & se\ \ X < L_1 \\ F_{i-1} + h_i[X - L_i] & se\ \ L_i \leq X < U_i\ \ per\ i = 1,2,\ldots,k-1; \\ 1 & se\ \ X \geq U_k \end{cases}$$

$$h_i = \frac{f_i}{U_i - L_i}$$

Funzione di graduazione delle frequenze relative:

$$X_p = F^{-1}(p) = \begin{cases} -\infty & p = 0 \\ Min\{x | F(x) \geq p\} & 0 < p < 1 \\ \infty & p = 1 \end{cases}$$

Capitolo 3.

Paragrafo 3.1

Moda. Formula di attrazione:

$$M_o = L_o + \left[\frac{(h_o - h_{o-1})}{(h_o - h_{o-1}) + (h_o - h_{o+1})}\right](U_o - L_o)$$

Mediana. Dati in serie:

$$M_e = \begin{cases} X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & se\ "n"\ è\ \ dispari \\ \dfrac{X_{(n/2)} + X_{(n/2)+1}}{2} & se\ "n"\ è\ \ pari \end{cases}$$

Mediana. Dati in classi:

$$M_e = L_e + \frac{(0.5 - F_{e-1})}{h_e};$$

$$per\ "e"\ tale\ che\ \ F_e = \underset{1 \leq j \leq k}{Min}\{F | F_j \geq 0.5\}$$

Valore centrale della distribuzione: $VC = \dfrac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$

Quantili. Modalità discrete:

$$X_p = (1 - \gamma)X_{(i)} + \gamma X_{(i+1)},\ \ 0 \leq p < 1;\ \ i \leq np < i + 1;$$

$$\gamma = \begin{cases} 0.5 & se\ \ [np] = np \\ 1 & se\ \ [np] < np \end{cases}$$

Formula alternativa per i quantili di modalità discrete:

$$X_p = (1 - \gamma)X_{(i)} + \gamma X_{(i+1)};\ \ i - 0.5 \leq np < i + 0.5;$$

$$\gamma = \begin{cases} 0 & se\ \ [np + 0.5] = np + 0.5,\ \ np + 0.5\ \ pari \\ 1 & altrimenti \end{cases}$$

Quantili. Variabile continua non in classi:

$$X_p = (1 - \gamma)X_{(i)} + \gamma X_{(i+1)}\qquad i = [np + 0.5];\ \ \gamma = np + 0.5 - i$$

Quantili. Modalità in classi:

$$X_p = L_i + \frac{(p - F_{i-1})}{h_i};\ \ per\ "i"\ tale\ che\ \ F_i = \underset{1 \leq j \leq k}{Min}\{F_j | F_j \geq p\};$$

Medie di quantili: $\tau_k = \dfrac{\sum_{i=0}^{k'} \binom{k'}{i} X_{\frac{i+1}{k+1}}}{2^{k'}},\ \ k' = k - 1;\ \ k\ \ dispari$

dove $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$; *con* $m! = m(m-1)(m-2)\ \dots\ 3*2*1$

Semisomma di quantili simmetrici: $\mu_p = \frac{X_p + X_{1-p}}{2}$

Semisomma interquartilica: $SI = \frac{Q_3 + Q_1}{2}$ (μ_p per p=0.25)

Media aritmetica: $\mu = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \sum_{i=1}^{k} X_i f_i$

Media di Gastwirth: $\tau = 0.3*Q_1 + 0.4*Q_2 + 0.3*Q_3$

Media aritmetica ponderata:

$$M(w_1, w_2, \dots, w_k) = \sum_{i=1}^{k} w_i X_i;\ \ con\ \ w_i \ge 0;\ \ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1$$

Media di potenze:

$$M(X_1,\dots,X_k; f_1,\dots,f_k; \alpha) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} X_i^{\alpha} f_i \right\}^{1/\alpha}$$

Media geometrica:

$$G = \prod_{i=1}^{k} X_i^{f_i} = X_1^{f_1} * X_2^{f_2} * \dots * X_k^{f_k} = e^{\sum_{i=1}^{k} f_i Ln(X_i)}$$

per i dati in classi: $X_i = \sqrt{U_i * L_i}$

Media armonica: $H = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{X_i}}$; *per* $X_i \ne 0$

per i dati in classi: $X_i = \frac{2}{\frac{1}{L_i} + \frac{1}{U_i}}$

Media quadratica: $M_q = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} X_i^2 f_i}$

Media antiarmonica: $A_h = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^{k} X_i f_i}$

Media divisoria: $M_d : \sum_{X_{(i)} \le M_d} X_{(i)} = \sum_{X_{(i)} > M_d} X_{(i)}$

Valore poziore: $VP = Max\{X_i f_i | i = 1, 2, \dots, k\}$

Media aritmetica troncata: $M_{\gamma_1,\gamma_2} = \frac{\sum_{i=[n\gamma_1]+1}^{n-[n\gamma_2]} X(i)}{n - [n\gamma_1] - [n(1-\gamma_2)]}$

Media aritmetica winsorizzata:

$$M_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} X'_{(i)}}{n};\ \ X'_{(i)} = \begin{cases} f(X_1,\dots,X_n) & per\ \ i < i_1 \\ X_{(i)} & per\ \ i = i_1, i_2 \\ f(X_1,\dots,X_n) & per\ \ i > i_2 \end{cases}$$

Paragrafo 3.2

Variabililità come scarti tra quantili simmetrici:

$$D_p = X_{1-p} - X_p;\ \ 0 < p \le 0.5$$

Campo di variazione:

1) $R = X_{(n)} - X_{(1)}$; 2) $R = Max\{|X_i - X_j|; i, j = 1, 2, \dots, n\}$;

3) $R = \sum_{i=2}^{n} \left[X_{(i)} - X_{(i-1)}\right]$

Campo di variazione medio:

$$R^* = \frac{R}{n-1} = \frac{\sum_{i=2}^{n} \left[X_{(i)} - X_{(i-1)}\right]}{n-1}$$

Differenza interquartilica: $DI = Q_3 - Q_1$

Diff. interq. corretta per l'ampiezza: $DI = (Q_3 - Q_1)Log(n)$

Semidifferenza interquartilica: $SDI = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

Boxplot:

$X_{(1)}\ \ Q_1\ \ M_e\ \ Q_3\ \ X_{(n)}$

Soglie di allarme: $Q_1 - 1.5DI,\ Q_3 + 1.5DI$

Soglie di anomalia: $Q_1 - 3DI,\ Q_3 + 3DI$

Indice di evoluzione di una serie storica:

$$E_n = \frac{X_n - X_1}{n-1};\ \ \ E_n^* = \frac{X_n - X_1}{\mu(n-1)};$$

Indici di oscillazione:

$$S^1 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} |Y_{i+1} - Y_i|}{n-1};\ \ \ S^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} (Y_{i+1} - Y_i)^2}{n-1}}$$

Indice di oscillazione media (Vinci):

$$V_n = \sum_{t=1}^{n} \frac{|y_{t+1} - y_t|}{y_t};\ \ y_t > 0$$

Indice di anomalia dell'n-esimo valore (Barnett-Lewis):

$$\frac{X_{(n)} - X_{(n-1)}}{X_{(n)} - X_{(1)}} * \frac{n-2}{2}$$

Indice di anomalia basato per il poligono ad "L" .

$$\frac{X_{(n)}}{\sum_{i=1}^{n-1} X_{(i)}} > 0.407$$

Variabilità come scarti di valori tra due serie:

$$S(A,\alpha) = \left[\sum_{i=1}^{n} |X_i - A|^{\alpha} f_i\right]^{\frac{1}{\alpha}};\ \{f_i\} = frequenze\ \ relative$$

Scarto assoluto mediano: $S_{Me} = \sum_{i=1}^{k} |X_i - M_e| f_i$

Mediana degli scarti dalla mediana: $MSA = Mediana\{|X_i - M_e|\}$

Scarto quadratico medio: $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (X_i - \mu)^2 f_i}$

Formula abbreviata per la varianza:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (X_i - \mu)^2 f_i = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 f_i - \mu^2;\ \ \mu = \sum_{i=1}^{k} X_i f_i$$

Varianza campionaria: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)}{n-1}$

Aggiornamento media e varianza per aggiunta di un dato:

$$\mu_{n+1} = \frac{n\mu_n + X_{n+1}}{n+1};\ \ \sigma_{n+1}^2 = \frac{n}{n+1}\left[\sigma_n^2 + \frac{(\mu_n - X_{n+1})^2}{n+1}\right]$$

Numero di cifre nella rappresentazione decimale:

$$r = \underset{!k=0,1,2,\dots}{Min}\left\{\frac{\sigma}{3} 10^k\right\}$$

Correzione di Sheppard per lo scarto quadratico medio:

$$\sigma = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{k}(X_i-\mu)^2 f_i - \frac{d^2}{12}\right]}$$

Disuguaglianza di Tchebycheff per una distribuzione di frequenza:

$$fr.rel.\left(|X-\mu|<b\sigma\right) \geq 1-\frac{1}{b^2}$$

$$oppure \quad fr.rel.\left(|X-\mu|>c\right) \leq 1-\left(\frac{\sigma}{c}\right)^2$$

Correzione di Sheppard per il 4° momento:

$$\bar{\mu}'_4 = \mu'_4 - \frac{h^2}{2}\mu'_2 + \frac{7h^4}{420}$$

Differenza semplice media:

$$\Delta_R = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|X_{(i)}-X_{(j)}\right|}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} w_i X_{(i)}; \quad w_i = \frac{2}{n^2}(2i-n-1)$$

D.S.M. per modalità ripetute:

$$\Delta_R = 2\sum_{i=1}^{k} X_{(i)} f_i\left[\left(F_{i-1}+F_i\right)-1\right]$$

Coefficiente di variazione: $\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{X_i-\mu}{|\mu|}\right)^2 f_i} = \frac{\sigma}{|\mu|}$

Deviazione media relativa: $\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{X_i-\mu}{|\mu|}\right| f_i = \frac{S_\mu}{2|\mu|}$

Coefficiente di dispersione: $CD = \sum_{i=1}^{k}\left|\frac{X_i-M_e}{M_e}\right| f_i$

Coefficienti di Kelley:

$$k_1 = M_e - \left[\frac{D_1+D_2}{2}\right]; \; k_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{Q_3-Q_1}{D_2-D_1}\right]$$

Rapporto minimo complementare: $RMQ = 1-\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}$

Coefficiente di dissimilarità:

$$E_3 = 2\left(\frac{k-1}{k}\right) - \sum_{i=1}^{k}\left|f_i-\frac{1}{k}\right|; \quad 0 \leq E_3 \leq 2\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

Variance ratio:

$$f = 1-Max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\} = 1-f_{Mo}$$

Bachman-Paternoster: $E_4 = \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} f_i f_j \quad 0 \leq E_4 \leq \frac{k-1}{2k}$

Cisbani-Frosini:

$$E_5 = \sqrt{\frac{k-1}{k}} - \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(f_i-\frac{1}{k}\right)^2} \quad 0 \leq E_5 \leq \sqrt{\frac{k-1}{k}}$$

Indice di eterogeneità quadratico: $E_6 = \frac{k\sum_{i=1}^{k} f_i^2 - 1}{k-1}$

Indice di diversità di Kempton: $D_a = \left[\sum_{i=1}^{k} f_i^a\right]^{\frac{1}{1-a}}; \quad -\infty < a < \infty$

Indice di Bipolarità di Gini: $D_1 = \sum_{i=1}^{k-1} F_i(1-F_i);$

Coefficiente di Leik:

$$D_2 = \sum_{i=1}^{k-1} d_i \quad dove \quad d_i = \begin{cases} F_i & se \quad F_i \leq 0.5 \\ 1-F_i & se \quad F_i > 0.5 \end{cases}; \; 0 \leq D_2 \leq \frac{k-1}{2}$$

Altri indici di bipolarità:

$$D_3 = \sum_{i=1}^{k-1}\left|F_i-\frac{i}{k}\right|; \qquad 0 \leq D_3 \leq \frac{k'(k-k'-1)}{k}; \; k' = \left[\frac{k}{2}\right]$$

$$D_4 = \sqrt{\sum_{i=1}^{k-1}\left(F_i-\frac{i}{k}\right)^2}; \qquad 0 \leq D_4 \leq \sqrt{\frac{k^2-3k+2}{12k}}$$

Paragrafo 3.3

Condizione di simmetria. Poligono di frequenza:

$$fr.rel.(M_e - x) - fr.rel.(M_e + x) = 0$$

$$fr.rel.(x) - fr.rel.(2M_e - x) = 0 \quad per \quad ogni \quad x > 0$$

Condizione di simmetria. Funzione di ripartizione:

$$F(M_e-\varepsilon) = 1-F(M_e+\varepsilon) \quad per \quad ogni \quad \varepsilon >$$

Condizione di simmetria. Funzione di graduazione:

$$\left(X_p-M_e\right)-\left(X_{1-p}-M_e\right) = 0 \quad per \quad 0<p<0.5$$

Condizione di asimmetria. Serie di modalità:

$$\frac{X_{(i)}+X_{(n-i+1)}}{2} = \quad per \quad i = 1,2,\ldots,\left[{}^{n}\!/_{2}\right]$$

Condizione di asimmetria. Modalità in classi:

$$\begin{cases} \left(c_{k-i+1}-M_e\right) = \left(M_e-c_i\right) \\ f_{k-i+1} = f_i \\ \left(U_{k-i+1}-L_{k-i+1}\right) = \left(U_i-L_i\right) \end{cases}; \; per \quad i = 1,2,\ldots,\left[{}^{k}\!/_{2}\right]$$

Condizione di simmetria di Naddeo:

$$\sum_{i=1}^{r}\left|\left(X_i-M_e\right)f_i + \left(X_{k-i+1}-M_e\right)f_{k-i+1}\right|; \; r = \left[\frac{k+1}{2}\right]$$

Indice semplice di asimmetria: $\alpha_1 = \frac{\mu-M_e}{S_{Me}}; \; -1 \leq \alpha_1 \leq 1$

Rapporto tra rapporti di quartili $T = \frac{\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)}{\left(\frac{Q_3}{Q_2}\right)} = \left(\frac{Q_1}{M_e}\right)\left(\frac{Q_3}{M_e}\right)$

Indice di asimmetria di K. Pearson:

$$\alpha_2 = \frac{\mu-M_o}{\sigma}; \; -3 \leq \alpha_2 \leq 3 \; (orientativo)$$

Indice di asimmetria di Fisher: $\gamma_1 = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^3 f_i$

Indice di asimmetria di Edgett: $A_e = \frac{M_e-M_o}{\mu-M_o}$

Indice di asimmetria di Yule-Bowley:

$$YB = \frac{\left(Q_3-M_e\right)-\left(M_e-Q_1\right)}{\left(Q_3-M_e\right)+\left(M_e-Q_1\right)} = \frac{Q_3+Q_1-2M_e}{Q_3-Q_1}; \quad -1 \leq YB \leq 1$$

Misura della asimmetria secondo Leti:

$$Indice \quad di \quad asimmetria = \frac{Var_{des}-Var_{sin}}{Var_{des}+Var_{sin}}$$

Rapporto quartilico: $RQ = \sqrt{{}^{Q_3}\!/_{Q_1}} - 1$

Indice di sbilanciamento verso le code: $c = \frac{\left[X_{(n)}-Q_3\right]-\left[Q_1-X_{(1)}\right]}{\left[X_{(n)}-X_{(1)}\right]}$

Funzione di asimmetria:

$$A_p = \frac{\left(X_{1-p} - M_e\right) - \left(M_e - X_p\right)}{\left(X_{1-p} - M_e\right) + \left(M_e - X_p\right)} = \frac{X_{1-p} + X_p - 2M_e}{X_{1-p} - X_p};\ \ 0 < p < 0.5$$

Indice di asimmetria di Gini per variabili nominali:

$$g = \sum_{i=1}^{[k/2]} \left(f_i - f_{k-i+1}\right);\ -1 \le g \le 1$$

Indice di asimmetria di Vinci per variabili quantitative ordinali:

$$v = \frac{\sum_{i=1}^{[k/2]} \left(F_i + F_{k-i} - 1\right)}{[k/2]};\quad -1 \le v \le 1$$

Capitolo 4.

Densità dei dati:

$$DD = \frac{unità\ *\ variabili}{superficie\ del\ grafico}$$

Densità del toner:

$$DT = \frac{Toner\ usato\ per\ gli\ elementi\ essenziali}{Totale\ toner}$$

Percentuale di distorsione:

$$Lie\ factor:\ \frac{Aumento\ relativo\ nel\ disegno}{Aumento\ relativo\ nei\ dati}$$

Ortogrammi a figure ripetute:

$$figure\ \ intere: \left[\frac{y_i}{c}\right];\ c = unità\ \ di\ \ conto$$

$$percentuale\ \ di\ \ figura\ \ residua\ \left(\frac{y_i}{c} - \left[\frac{y_i}{c}\right]\right)100$$

Diagrammi areali:

$$Diagrammi\ \ a\ \ torta:\ g_i = 360 f_i;\quad a\ \ ventaglio:\ g_i = 180 f_i$$

Cambio di base nei logaritmi:

$$Log_a(x) = \frac{Log_b(x)}{Log_b(a)}$$

Diagramma di Niceforo:

$$G_i = \left(\frac{X_i - X_{min}}{X_{max} - X_{min}}\right)180$$

Capitolo 5.

Paragrafo 5.1

Rapporti di composizione:

$$Y_i = \frac{X_i}{T};\quad i = 1, 2, \ldots n;\ \ con\quad T = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Grafico ternario:

$$Vertici:\ (0,0);\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right);\ \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right);\quad Punto: \left(\frac{2x+y}{\sqrt{3}}, y\right)$$

Indice di nebulosità di una frase:

$$C = [L + D]0.4;\ \ D = \left(\frac{N_d}{N_f}\right)10$$

$$N_f\ =\ Numero\ di\ frasi\ \begin{cases} Le\ frasi\ semplici\ contano\ per\ uno \\ Le\ frasi\ complesse\ contano\ per\ due \end{cases}$$

$$N_p = Numero\ di\ parole;\ L = \frac{N_p}{N_f} =\ \ lunghezza\ \ media\ \ frase$$

Coordinate del grafico di complementarietà:

$$X_1 = \frac{Dato\ al\ numeratore}{Totale};\quad X_2 = \frac{Dato\ al\ denominatore}{Totale}$$

Rapporti di durata:

$$D_i = \frac{Co_i}{Nu_i} = \frac{\frac{A_i + Z_i}{2}}{\frac{E_i + U_i}{2}} = \frac{A_i + Z_i}{E_i + U_i},\ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

Stima dei rinnovi: $Nu_i = \dfrac{\alpha_1 E_i + \alpha_2 U_i}{\alpha_1 + \alpha_2},\ \ \alpha_1 \ne \alpha_2;\ \ i = 1, 2, \ldots, n$

Rapporti di rotazione: $R_i = \dfrac{Nu_i}{Co_i} = \dfrac{E_i + U_i}{A_i + Z_i},\ \ i = 1, 2, \ldots, n$

Elasticità di una funzione: $E(y, x) = \dfrac{x}{y} * \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Desiderata per le misure di variazione relativa:

$$H(Y_i, X_i) = 0\ \ se\ \ e\ \ solo\ \ se\ \ Y_i = X_i;$$
$$H(Y_i, X_i) < 0\ \ se\ \ e\ \ solo\ \ se\ \ Y_i < X_i$$
$$H(Y_i, X_i)\ \ è\ \ monotona\ \ rispetto\ \ al\ \ rapporto\ \ Y_i / X_i$$
$$H(aY_i, aX_i) = H(Y_i, X_i)$$

Variazioni relative semplici:

$$1)\ \ r_i = \frac{Y_i - X_i}{X_i};\quad 2)\ \ r_i = \frac{X_i - Y_i}{Y_i};\quad 3)\ \ r_i = \frac{2(Y_i - X_i)}{Y_i + X_i};$$

Attualizzazione con tasso semplice: $Y_a = \dfrac{1}{(1+r)} Y_z$

Variazione relativa media:

$$\bar{r} = \left[\frac{Y_z - Y_a}{(z-a)Y_a}\right];\qquad dove\ \begin{cases} a\ \ periodo\ \ iniziale \\ z\ \ periodo\ \ finale \end{cases}$$

Variazione relativa media (basata sul valore intermedio):

$$V^*_{z,a} = \left(\frac{2}{z-a}\right) \sum_{j=a+1}^{z} \left(\frac{Y_j - Y_{j-1}}{Y_j + Y_{j-1}}\right)$$

Media delle variazioni relative: $V_{z,a} = \left(\dfrac{1}{z-a}\right) \displaystyle\sum_{j=a+1}^{z} \left(\dfrac{Y_j - Y_{j-1}}{Y_{j-1}}\right)$

Variazione relativa composta: $r^* = \left(\dfrac{Y_z}{Y_a}\right)^{\frac{1}{z-a}} - 1\ =\ e^{\frac{Ln\left(Y_z / Y_a\right)}{(z-a)}} - 1$

Proiezione di una serie storica:

$$Y_{k+z} = Y_a(1+r)^{k+z},\ \ dove\ \ r = \left(\frac{Y_z}{Y_a}\right)^{\frac{1}{z-a}} - 1$$

Variazione relativa composta per serie storica con tetto:

$$Y_{n+z} = B - (B - Y_z) r^{z+n};\quad dove\ \ r = \frac{1}{z} \sum_{j=1}^{z} \left(\frac{B - Y_j}{B - Y_{j-1}}\right)$$

Variazione relativa continua:

$$r = \frac{100}{(z-a)} Ln\left(\frac{Y_z}{Y_a}\right)$$

Relazione tra tassi composti e continui:

$$\left[\left(\frac{Y_z}{Y_a}\right)^{\frac{1}{k}} - 1\right]\ \ge\ \left(\frac{1}{k}\right) Ln\left(\frac{Y_z}{Y_a}\right)$$

Valore attuale secondo la capitalizzazione composta:

$$Y_a = \frac{Y_z}{(1+r)^k};\ \ dove\ \ k = z - a$$

Paragrafo 5.2

N.I. elem. a base fissa:

$$ {}_xI_t = \left(\frac{Y_t}{Y_x}\right)*100; \quad t = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n; \quad Y_x \neq 0 $$

N.I. elem. a base mobile: $ {}_{t\text{-}1}I_t = \left(\frac{Y_t}{Y_{t\text{-}1}}\right)*100; \quad t = 1,2,\dots, $

Incremento di un numero indice: $ {}_xI_t - {}_xI_s = \left(\frac{Y_t - Y_s}{Y_x}\right)*100 $

Variazione % dell'indice: $ \left(\frac{{}_xI_t - {}_xI_s}{{}_xI_t}\right)*100 = \left(\frac{Y_t - Y_s}{Y_t}\right)*100 $

Reversibilità: $ {}_xI_t = \frac{100^2}{{}_tI_x}; $

Circolarità: $ \frac{\prod_{j=x}^{t-1} {}_jI_{j+1}}{100^{t-x-1}} = {}_xI_t $

Cambiamento di base numeri nei indici elementari:

$$ {}_xI_t * \frac{Y_x}{Y_w} = {}_wI_t $$

Raccordo tra vecchia base "x" e nuova base "w":

$$ {}_wI_t = c(w,x)\,{}_xI_t \quad dove \quad c(w,x) = \frac{Y_x}{Y_w} $$

Numero indice sintetico con la formula del valore:

$$ Base\ \ fissa:\ {}_xI_t^V = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} * Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{ix} * Q_{ix}} * 100; $$

$$ Base\ \ mobile:\ {}_{t-1}I_t^V = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} * Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{it-1} * Q_{it-1}} * 100 $$

Numero indice della media aritmetica: $ {}_xI_t = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right) P_{it}}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right) P_{ix}} * 100 $

Media aritmetica degli indici elementari: $ {}_xI_t^U = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right) {}_xI_t^i $

Media geometrica degli indici elementari: $ \left[\prod_{i=1}^n {}_xI_t^i\right]^{\frac{1}{n}} $

Formula di Laspeyres:

$$ {}_xI_t^L = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it}Q_{ix}}{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{ix}} * 100 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{P_{it}}{P_{ix}} * P_{ix}Q_{ix}}{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{ix}} * 100 = \sum_{i=1}^n w_i\,{}_xI_t^i; $$

$$ dove:\ w_i = \frac{P_{ix}Q_{ix}}{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{ix}} $$

Altra espressione per l'indice di Laspeyres.

$$ {}_tI_x^L = \frac{{}_xI_x^V * {}_xJ_t^L}{{}_xI_t^L} $$

Cambio di base per la Laspeyres:

$$ \sum_{i=1}^n w_{xi}\,{}_xI_t^i * c_i(x,y) * \frac{w_{yi}}{w_{xi}} = {}_yI_t^L $$

Formula di Paasche:

$$ {}_xI_t^P = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{it}} * 100 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{P_{it}}{P_{ix}} * P_{ix}Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{it}} * 100 = \sum_{i=1}^n w_i\,{}_xI_t^i; $$

$$ dove:\ w_i = \frac{P_{ix}Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{it}} $$

Relazione di von Bortkiewicz:

$$ \frac{{}_xI_t^P}{{}_xI_t^L} = 1 + \rho\left({}_xI_t, {}_xJ_t\right)K;\ dove: \begin{cases} {}_xI_t & num.ind.\ \ valut. \\ {}_xJ_t & num.ind.\ \ quant.; \\ K > 0 \end{cases} $$

Relazione con la formula del valore:

$$ {}_xI_t^P \leq {}_xI_t^V \leq {}_xI_t^L \quad oppure \quad {}_xI_t^L \leq {}_xI_t^V \leq {}_xI_t^P $$

Formula di Fisher: $ {}_xI_t^F = \sqrt{{}_xI_t^L * {}_xI_t^P}; $

Formula di Sidgwick: $ \frac{1}{2}\left[{}_xI_t^L + {}_xI_t^P\right]; $

Formula di Marshall-Edgeworth-Bowley:

$$ \frac{\sum_{i=1}^n P_{it}\left(Q_{it} + Q_{ix}\right)}{\sum_{i=1}^n P_{ix}\left(Q_{it} + Q_{ix}\right)} = \frac{{}_xI_t^L * V_x + {}_xI_t^P * V_t}{V_x + V_t} $$

Formula di Lowe: $ {}_xI_t^S = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it}Q_{is}}{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{is}} * 100; \quad Q_{is} = \frac{\sum_{j=x}^t Q_{ij}}{t - x + 1}; \quad i = 1,2,\dots,n $

Formula di Walsh: $ {}_xW_t = \prod_{i=1}^n \left(\frac{P_{ix}}{P_{it}}\right)^{w_i}; \quad w_i > 0; \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1 $

Formula della quantità di Laspeyres:

$$ {}_xJ_t^L = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{ix}} * 100 = \sum_{i=1}^n {}_xJ_t^L w_i; \quad w_i = \frac{P_{ix}Q_{ix}}{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{ix}}; $$

Formula delle quantità di Paasche:

$$ {}_xJ_t^P = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{it}Q_{ix}} * 100 = \sum_{i=1}^n {}_xJ_t^P w_i; \quad w_i = \frac{P_{it}Q_{ix}}{\sum_{i=1}^n P_{it}Q_{ix}} $$

Indice della produzione industriale:

$$ {}_xPI_t = \sum_{i=1}^n {}_xJ_t^L w_i; \quad w_i = \frac{V_{ix}}{\sum_{i=1}^n V_{ix}}; \quad V_{ix} = valore\ \ aggiunto\ \ anno\ \ x\ \ settore\ \ i $$

Deflazione di serie monetarie: $ D_t = \frac{V_t}{{}_xI_t} * 100 $

Deflattore: $ \frac{100}{{}_xI_t} $

Valore patrimoniale acquistato all'anno "w" in valore comparabile con i prezzi dell'anno "y":

$$ Valore\ \ aggiornato = Valore\ \ originale * \frac{{}_xI_y}{{}_xI_w} $$

Variazione rispetto al mese precedente: $VP_t = \left(\frac{C_{t,m}}{C_{t,m-1}} - 1 \right) * 100$

Tasso tendenziale di inflazione: $TTE_t = \left(\frac{C_{t,m}}{C_{t-1,m}} - 1 \right) * 100$

Tasso medio di inflazione: $TME_t = \left(\frac{C_{t,m}}{\mu_{t,m}} - 1 \right) * 100$

Tasso di inflazione ereditata:

$$\varepsilon_t = \left[\frac{C_{t,m-1}}{\mu_{t,m-1}} - 1 \right] * 100; \; \mu_{t,m} = \frac{\sum_{r=1}^{t} C_{r,m} + \sum_{r=t+1}^{12} C_{r,m-1}}{12}$$

Tasso di inflazione lasciata in eredità: $\eta_t = \left[\frac{C_{t,m}}{\mu_{t,m}} - 1 \right] * 100;$

Paragrafo 5.3

Ammontari di variabile:

$$assoluto: \; a_i = X_i n_i; \; i = 1,2,\ldots,k \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i = n\mu;$$

$$relativo: \; g_i = \frac{a_i}{n\mu} = \frac{X_i}{\mu} f_i; \; i = 1,2,\ldots,k$$

Ammontari cumulati di variabili:

$$assoluto \;\; cumulato: \; A_i = \sum_{j=1}^{i} X_j n_j; \; A_k = n\mu;$$

$$relativo \;\; cumulato: q_i = \sum_{j=1}^{i} g_j; \; i = 1,2,\ldots,k; \; q_0 = 0$$

Formule di Aigner: $\begin{cases} \hat{\mu}_1 = c_1 + \frac{(U_1 - L_1)}{6} \\ \hat{\mu}_i = c_i + \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{f_i} \right) * \frac{(U_i - L_i)}{24} \\ \hat{\mu}_k = c_k - \frac{(U_k - L_k)}{6} \end{cases}$

Formule di Needleman per le medie di classe:

$$\mu_i = \begin{cases} L_1 + \frac{11 d_1}{24} + \frac{d_1^2}{48 n_1} \frac{3 n_2}{d_2} & per \;\; i = 1 \\ L_i + \frac{11 d_i}{24} + \frac{d_i^2}{48 n_i} \left[\frac{3 n_{i+1}}{d_{i+1}} - \frac{n_{i-1}}{d_{i-1}} \right] & per \;\; i = 1,2,\ldots,k-1 \\ L_{k-1} + \frac{11 d_{k-1}}{24} - \frac{d_{k-1}^2}{48 n_{k-1}} \frac{n_{k-2}}{d_{k-2}} & per \;\; i = k-1 \;\; e \;\; U_k \;\; indeter. \\ L_k \frac{\alpha}{\alpha - 1} \; ; \; \alpha = \frac{Ln\left[n_k / (n_k + n_{k-1}) \right]}{Ln(L_k / L_{k-1})} & per \;\; i = k \end{cases}$$

$$d_i = U_i - L_i$$

Condizioni sulla curva di Lorenz:

$$L(p) = \frac{1}{\mu} \int_0^p [g(t) - a] dt; \quad \mu = \int_0^1 [g(t) - a] dt;$$

$$F^{-1}(p) = X_p = g(p) = \begin{cases} Min\{x | F(x) \geq p\} & se \;\; 0 < p \leq 1 \\ a & se \;\; p = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{p \to 0+} L(p;d) = 0; \quad \lim_{p \to 1-} L(p;d) = 1;$$

$$L(p_2;d) - L(p_1;d) \geq \frac{g(p_1)}{\mu} (p_2 - p_1)$$

$$L(p;d) \leq \frac{L(p+\varepsilon;d) + L(p-\varepsilon;d)}{2}; \quad L'(p;d) = \frac{g(p)}{\mu} > 0; \;\; L''(p;d) \geq 0;$$

Esempi di curve di Lorenz:

1. $L(p) = p^b (2-p)^a; \; b \geq a, b + a = 1;$ *Pietra (1941)*

2. $L(p) = p^a e^{-b(1-p)}; \; a \geq 1, a + b > \sqrt{a}$ *Kakwani e Podder (1973)*

3. $L(p) = -abp + (1 - a + ab) p^c + a\left[1 - (1-p)^b\right]; \; a,b,c > 0;$

Maddala e Singh (1977)

4. $L(p) = \left[1 - (1-p)^a\right]^b;$ *Raasche, Gaffney, Koo, Obst (1980)*

5. $L(p) = \frac{(1-a)^2 p}{\left[(1+a)^2 - 4ap\right]}; \quad 0 < a < 1;$ *Aggarwal, Singh (1984)*

6. $L(p) = pA^{p-1}; \; A > 1$ *Gupta (1984)*

7. $L(p) = \frac{p[1 + (a-1)p]}{1 + (a-1)p + b(1-p)}; a,b > 0; \; b - a + 1 > 0;$

Arnold (1986).

8. $L(p) = [ap]^{b(1-p)}; \; a,b \geq 0$

Altre curve di Lorenz:

$$L(p) = \frac{\beta p^2}{\beta + 1 - p^2}; \; \beta > 0; \quad L(p) = p - \frac{\cos[\pi(p - 0.5)]}{\pi};$$

$$L(p) = p - ap(1-p)^b; \quad 0 \leq a,b \leq 1; \quad L(p) = \frac{e^p - 1}{e - 1}$$

$$L(p) = \left[\frac{p}{\left(2 - p^{\alpha}\right)} \right]^{\beta}; \; \beta \geq 1, \; 0 \leq \alpha \leq 1; \qquad L(p) = pe^{-\frac{a(1-p)^2}{2}} \quad a > 1$$

$$Doppio \;\; esponenziale: \; L(p;d_1,d_2) = 0.5\left[p^{d_1} + p^{d_2}\right]; \;\; d_1, d_2 \geq 1;$$

$$Quadratica - esp.: \; L(p;d_1,d_2) = \left[d_1 p + (1 - d_1) p^2\right]^{d_2}; \;\; 0 \leq d_1 \leq 1; \; d_2 \geq 1$$

Curve di Lorenz nel sistema di Gini:

$$z = \frac{a}{\pi} \operatorname{sen}\left(\pi \frac{w}{2}\right); \quad 0 \leq w \leq 2; \quad z = \frac{1 - (w-1)^2}{2};$$

$$z = \frac{a}{\pi} \operatorname{sen}\left(\pi \frac{w}{2}\right); \quad 0 \leq w \leq 2; \quad z = 1 - \frac{w^2 + 4}{2w + 4};$$

$$z = \sqrt{a\left[1 - (w-1)^2\right]}; \qquad z = aw^{\alpha}(2-w)^{\beta}; \; 0 \leq a, \alpha, \beta \leq 1;$$

$$z = a\left[1 - |1 - w|^{\frac{1}{a}}\right]; \quad 0 < a < 1 \; ; \; z = w^a \left[1 - \left(\frac{w}{2}\right)^b\right]$$

$$Z = \frac{Aw(2-w)}{\left[\alpha(2-w)^{\rho} + (1-\alpha)w^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}}}; \quad 0 \leq A, \alpha \leq 1, \rho \geq 0$$

Spezzata di Lorenz:

$$L(p) = p_{i-1} + \frac{\left(X_{(i)} - a\right)}{\mu}(p - p_{i-1}); \quad p \in (p_{i-1}, p_i]; \; i = 1,2,\ldots,n$$

Curva di Lorenz interpolante quadratica (Castellano):

$$q_i = q_{i-1} + \frac{\mu_i}{2\mu}(p - p_{i-1}) + \frac{\mu_i}{2 f_i \mu}(p - p_{i-1})^2; p_{i-1} \leq p \leq p_i$$

Indice di Emlen: $C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} g_i e^{-g_i}}$

Effetto desiderato di un trasferimento neutrale:

$L_y(p) \le L_x(p)$ *per ogni* $p \in [0,1] \Rightarrow C(y) \le C(x)$

Indice di Simpson: $C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \dfrac{T^2 - T}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - T}; \quad T = n\mu$

Indice di diversità di McIntosh: $MI = \dfrac{n\mu - \mu_2}{n\mu - \sqrt{n\mu}}$

Statistica di Eberhardt: $S = n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2$

Rapporto complementare dei decili estremi: $Rd = 1 - \dfrac{g_1}{g_{10}}$

Indice di Gastwirth: $G = \dfrac{2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \left[\dfrac{X_{(i)} - X_{(j)}}{X_{(i)} + X_{(j)}} \right]}{n(n-1)}$

Indice di concentrazione di Zenga: $Z_2 = 1 - \prod_{i=1}^{k} q_i^{(p_i - q_i)}$

Indice di Champernowne: $Ch = 1 - \dfrac{G}{\mu}$; $G = media\ geometrica$

Indice Hall-Tidemann: $HT = \dfrac{1}{2 \sum_{i=1}^{k} q_i - 1}$

Indice di concentrazione industriale di Herfindahl:

$$H_1 = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\mu_i}{\mu} \right)^2 f_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i^2}{f_i}$$

Varianza dei logaritmi (G è la media geometrica):

$$V = \sum_{i=1}^{k} \left[Ln(X_i) - Ln(G) \right]^2 f_i = \sum_{i=1}^{k} \left[Ln\left(\frac{X_i}{G} \right)^2 \right] f_i$$

Indice di Kuznets: $K = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} |g_i - 0.1|}{1.8}$

Delta del Gini: $\delta_i = \dfrac{Ln(1 - p_i)}{Ln(1 - q_i)}$

Scarti tra quote: $\dfrac{\sum_{i=1}^{k} |y_{(i)} - x_m| f_i}{2 x_m} = p_m - q_m$

Quota divisoria:

$D_2 = p_D - q_D$; $p_D + q_D = 1$; $p_{h-1} + q_{h-1} = min(p_i + q_i) \ge 1$

$q_{h-1} + \dfrac{x_h}{\mu}(p - p_{h-1}) = 1 - p \Rightarrow p_d = \left[(1 - q_{h-1}) + \dfrac{x_h}{\mu} p_{h-1} \right] \Big/ \left(1 + \dfrac{x_h}{\mu} \right)$

Indice di Giorgi: $g = D_2 * q_\mu$

Indice di Lee: $D_{2x} = \dfrac{D_2 + p_\mu}{2} = p_\mu - \dfrac{q_\mu}{2}$

Versione di D_2 secondo Shutz: $s = \int_0^{p_\mu} [1 - L'(p)] dp$

Indice Pietra-Ricci: $Max\ (p_i - q_i)$

Maggioranza minima e quota mediana

$D_3 = (p_{k-1} - 0.5) + \dfrac{\mu}{x_{(k)}} (0.5 - q_{k-1})$; $q_{k-1} \le 0.5 \le q_k$;

$D_4 = (0.5 - q_{h-1}) + \dfrac{x_{(h)}}{\mu} (0.5 - p_{h-1})$; $p_{h-1} \le 0.5 \le p_h$

Formula Newton-Raphson le equazioni non lineari:

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} - \frac{f\left[X^{(i)}\right]}{f'\left[X^{(i)}\right]}; \quad i = 1, 2, \ldots; \quad X^{(0)} = dato$$

da interrompere se: $\left| X^{(i+1)} - X^{(i)} \right| < 0.00001$

Rapporto di concentrazione. Dati in serie: $\dfrac{\Delta_R}{2\mu} = \dfrac{2 \sum_{i=1}^{n} (i-1) X_{(i)}}{n^2 \mu} - 1$

Rapporto di concentrazione. Coordinate di Lorenz:

$$R = 1 - \left[\sum_{i=1}^{n} (p_i - p_{i-1})(q_i + q_{i-1}) \right] = 1 - \left[\sum_{i=1}^{n} f_i (q_i + q_{i-1}) \right] \text{ (trapezi)}$$

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i - q_i}{p_i} \right) p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \text{ (regola dei rettangoli)}$$

Effetto di un trasferimento neutrale:

$$\Delta R = \frac{d}{\mu} (w_i - w_j) = -\frac{2d}{\mu} \left(\frac{i - j}{n} \right)$$

Limite inferiore e superiore per il rapporto di concentrazione:

$R_u = R_l + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i$; $\quad R_l = 1 - \sum_{i=1}^{k} (p_i - p_{i-1})(q_i + q_{i-1})$;

$\gamma_i = \dfrac{1}{\mu} (p_i - p_{i-1})^2 \left[\dfrac{(\mu_i - L_i)}{(U_i - L_i)} \right] \left[\dfrac{(U_i - \mu_i)}{(U_i - L_i)} \right]$

Rapporto di concentrazione per modalità singole:

1. $R = \dfrac{n+1}{n} - \dfrac{2}{n^2 \mu} \sum_{i=1}^{n} (n + 1 - i) x_{(i)}$; 2. $R = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{i x_{(i)}}{n\mu}$
3. $R = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\dfrac{x_{(i)}}{\mu} \right)$ *con* $w_i = \dfrac{n - 2i + 1}{n}$

Rapporto di concentrazione. Variabile continua: $R = 1 - 2 \int_0^1 L(p) dp$

Indici lineari di concentrazione:

$$C_n = \frac{\sum_{i=1}^{k} J_n \left(\frac{i}{n+1} \right) X_{(i)}}{n\mu}; \quad \sum_{i=1}^{k} J_n \left(\frac{i}{n+1} \right) = 0;$$

$$C_\infty = \int_0^1 L'(p) w(p) dp; \quad \int_0^1 w(p) = 0$$

Indice	*Formula*
Bonferroni	$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{p_i - q_i}{p_i} \right)$
De Vergottini	$\dfrac{\sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{p_i - q_i}{1 - p_i} \right)}{\sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{p_i}{1 - p_i} \right)}$
Piesch	$\sum_{i=1}^{k} (q_i - q_{i-1}) \left(\frac{3}{2} p_i^2 - \frac{1}{2} \right)$
Mehran	$\sum_{i=1}^{k} (q_i - q_{i-1}) \left[1 - 3(1 - p_i)^2 \right]$
Gini	$\dfrac{\sum_{i=1}^{k-1} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{k-1} p_i}$

Effetto di un trasferimento neutrale:

$$\Delta B = \frac{d}{(n-1)\mu} * \sum_{r=i}^{j-1}\frac{1}{r}; \qquad \Delta V = \frac{d}{(n-1)\mu}\sum_{r=i}^{j-1}\left(\frac{1}{n-r}\right)$$

$$\Delta P = \frac{3d}{2n^3\mu}(j-i)(j+i); \qquad \Delta M = \frac{3d}{n^3\mu}(j-i)\left[2n-(j+i)\right]$$

Indice di concentrazione di Amato: $$A = \frac{\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{p_i - q_i}{\sqrt{(1-p_i)p_i}}\right)}{\sum_{i=1}^{k-1}\sqrt{\frac{p_i}{1-p_i}}}$$

Lunghezza della curva di Lorenz:

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(p_i - p_{i-1})_i\sqrt{1+\left(\frac{q_i - q_{i-1}}{p_i - p_{i-1}}\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} f_i\sqrt{1+\left(\frac{\mu_{(i)}}{\mu}\right)^2}$$

Lunghezza curve di Lorenz continue: $\lambda = \int_0^1\sqrt{1+\left[L'(p)\right]^2}\,dp$

Come formula G-K: $r(x) = \sqrt{1+(x/\mu)^2} - \sqrt{2}$;

Effetto di un trasferimento neutrale:

$$t'(x) = \left(\frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)\left\{1/\sqrt{\left(x^2+\mu^2\right)^3} - 1/\sqrt{\left[(x-d)^2+\mu^2\right]^3}\right\}$$

Indice quadratico di Bonferroni:

$$B_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} = \frac{\sigma^2}{\mu_2^2} = \frac{\mu_2^2-\mu^2}{\mu_2^2}; \ \left(\Delta_R^2\right)^2 = 2\sigma^2 \Rightarrow B_2 = 2\left[\frac{\Delta_R^2}{2\mu_2}\right]^2$$

Come formula G-K:$r(x)=[(x-\mu)/\mu_2]^2$

Effetto di un trasferimento neutrale: $t(x)=r'(x)-r'(x-d)=2d/(\mu_2)^2$

Indice entropico di Theil:

$$H = \sum_{i=1}^{n} f_i\left[\left(\frac{\mu_i}{\mu}\right)Ln\left(\frac{\mu_i}{\mu}\right)\right] = \sum_{i=1}^{k} g_i Ln\left(\frac{g_i}{f_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} g_i\left[Ln(g_i) - Ln(f_i)\right]$$

$$\lim_{x\to 0} xLn(x) = 0$$

Come formula G-K: $r(x)=(x/\mu)Ln(x/\mu)$.

Effetto di un trasferimento neutrale:
$t(x)=\mu^{-2}Ln[x/(x-d)]$.

Secondo indice di Theil:

$$H_2 = \sum_{i=1}^{n} f_i Ln\left(\frac{\mu}{\mu_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} f_i Ln\left(\frac{f_i}{g_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} f_i\left[Ln(f_i) - Ln(g_i)\right]$$

Condizione di Fellman sul confronto delle curve di Lorenz:

$$L_y(p) = L_x(p) \quad per \quad 0 \le p \le 1 \quad se \quad \frac{t(x)}{x} = costante;$$

$$L_y(p) \le L_x(p) \quad per \quad 0 \le p \le 1 \quad se \quad \frac{t(x)}{x} = monotona \quad crescente$$

$$L_y(p) \ge L_x(p) \quad per \quad 0 \le p \le 1 \quad se \quad \frac{t(x)}{x} = monotona \quad decrescente;$$

Indice di Hagerbaumer:

$$b = \frac{R(1-R)}{2(2-R)}; \quad H_a = \frac{b - \left[\int_0^{p_n} L(p)dp - \frac{q_n(p_n - R)}{2}\right]}{b}$$

Eltetö e Frigyes (1968):

$$u = \frac{p(\mu)}{q(\mu)}; \quad w = \frac{\left[1-q(\mu)\right]}{\left[1-p(\mu)\right]}; \quad v = u * w$$

Polo di simmetria della Lorenz:
$L(p)=1-p$

Aree della Lorenz:
$A_T=S_L+T_L$, $A_U=S_U+T_U$; $S_L=S_U=(p_D-q_D)/4$.

Condizione formale di simmetria:

$$L(p_D + p) - p = L(p_D - p) + p \quad per \quad 0 \le p \le min\{p_D, 1-p_D\}$$

Condizione di simmetria statistica della Lorenz secondo Zanardi:
$A_L=A_U$ ovvero $T_L=T_U$.

Condizione di sinistrosità della Lorenz:
$L(p_\mu)+p_\mu >1$;
Condizione di destrosità della Lorenz:
$L(p_\mu)+p_\mu <1$.
Condizione di culminanza:
$L(p_\mu)+p_\mu =1$

Indice di Panizzon:

$$A_R^{'} = Log_3(A_R) = 0.91024Ln(A_R) \quad con \ -1 \le A_R^{'} \le 1$$

Indici di Giurovich:

$$Destrorse: \ \frac{T_U}{T_L}; \qquad Sinistrorse: \ \frac{T_L}{T_U};$$

Indice di Patimo:

$$A_D^{'} = 2\left(\frac{T_U - T_L}{p_D Q_D}\right), \ -1 \le A_D \le 1$$

Indice di asimmetria di Zanardi:

$$Z = \frac{(T_U - T_L)}{R/4}; \qquad Z = 2p_D q_D\left(\frac{R_L - R_U}{R}\right)$$

Aree coinvolte nella misura della asimmetria. Curva continua:

$$T_L = \frac{p_D q_D}{2} - \int_0^{p_D} L(p)dp = \frac{p_D q_D}{2} - p_D - \frac{\delta}{\delta+1}\left[(1-p_D)^{\frac{\delta+1}{\delta}} - 1\right]$$

$$T_U = \frac{p_D q_D}{2} + q_D^2 - \int_{p_D}^{1} L(p)dp = \frac{p_D q_D}{2} - \left[q_D - \frac{\delta}{\delta+1}(1-p_D)^{\frac{\delta+1}{\delta}}\right] + q_D^2$$

Punti ed Aree coinvolte nella misura della asimmetria. Formule basate sulla spezzata di Lorenz

$$T_L = \frac{p_D q_D}{2} - \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{m}(p_i - p_{i-1})(q_i + q_{i-1}) + (p_D - p_m)(q_D + q_m)\right]$$

$$T_U = \frac{p_D q_D}{2} - \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\left[\sum_{i=m+1}^{k}(2 - p_i - p_{i-1})(q_{i+1} - q_i)\right] \\ +(2 - p_m - p_D)(q_D - q_m)\end{array}\right\}$$

Calcolo delle probabilità

$e_i \in E_j$ *se* e_i *è un esito incluso in* E_j

$e_i \notin E_j$ *se* e_i *non è un esito incluso in* E_j

Uguaglianza: $E = F$ *se* $E \subset F$ *e* $F \subset E$

Unione: $(E \cup F) = \{x | x \in E \ \text{oppure} \ x \in F\}$

Intersezione: $(E \cap F) = \{x | x \in E \ \text{e} \ x \in F\}$

Incompatibilità: $E \subset F^c$ *oppure* $F \subset E^c \Rightarrow E \cap F = \varnothing$

Differenza: $E - F = E \cap F^c$

Necessari: $E \cup F = S$

Relazioni con l'evento certo ed impossibile

$E \cup S = S; \quad E \cap S = E; \quad E \cup \varnothing = E; \quad E \cap \varnothing = \varnothing$

Copertura: $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = S$ *(unione per i che va da 1 a k di E con i)*

Partizione: $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = S$ *e* $E_i \cap E_j = \varnothing$ *per ogni* $i \neq j$

Legge commutativa:

$E \cup F = F \cup E$

$E \cap F = F \cap E$

Legge associativa:

$E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$

$E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$

Legge distributiva:

$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$

$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$

Idempotenza:

$E \cup E = E$

$E \cap E = E$

Monotonia:

$E \subset F \Rightarrow E \cup F = F, \ E \cap F = E$

Convoluzione:

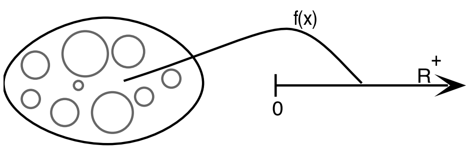
$\left(E^c\right)^c = E$

Leggi di De Morgan: 1) $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cap \overline{F}$; 2) $\overline{E \cap F} = \overline{E} \cup \overline{F}$;

Successioni: $\begin{cases} \text{Crescente} & \text{se } E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_i \subseteq \dots \\ \text{Decrescente} & \text{se } E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \supseteq E_i \supseteq \dots \end{cases}$

Decrescente: $\lim_{i \to \infty} E_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$; *Crescente*: $\lim_{i \to \infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$;

Funzione di insieme



Funzione di insieme additiva:

$$f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) + F(E_2)$$

Algebra: 1. $S \in W$;

2. *Se* $E, F \in W \Rightarrow (E \cup F) \in W, \ (E \cap F) \in W, \ E^c, F^c \in W$.

Assiomi:

1. S è l'universo degli eventi. Gli eventi generati da S formano un'algebra W;

2. Se $E \in W \Rightarrow P(E) \geq 0$

3. $P(S) = 1$

4. $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ *se* $E \cap F = \varnothing$

Teoremi

Evento complementare:

$1 = P(E) + P\left(E^c\right) \Rightarrow P\left(E^c\right) = 1 - P(E)$

Probabilità totale:

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

Monotonia:

Se $F \subset E \Rightarrow P(F) \leq P(E)$

Disug.Boole:

$P(E \cap F) \leq Min\{P(E), P(F)\} \leq Max\{P(E), P(F)\}$

$\leq P(E \cup F) \leq P(E) + P(F)$

Unione di tre eventi:

$P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(F \cap G)$

$- P(E \cap F) - P(E \cap G) + P(E \cap F \cap G)$

Disug. Bonferroni:

$1 - \sum_{i=1}^{n} P\left(E_i^c\right) \leq P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)$ *ovvero* $1 - \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \leq P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right)$

Prob. evento imp. $P(\varnothing) = 0$

Modello di probabilità uniforme:

$p_i = \frac{1}{n}; \quad i = 1, 2, \dots, n$

Probabilità soggettiva comeintervallo:

$\underline{P}_j(E_i|F) \leq P_j(E_i|F) \leq \overline{P}_j(E_i|F)$

Calcolo combinatorio

$S = \{C_1 \otimes C_2 \otimes \dots \otimes C_n\}$

evento elementare:

n-tupla ordinata: $(x_1 \in C_1, \ x_2 \in C_2, \dots, \ x_n \in C_n)$;

n-tupla non ordinata: $\{x_1 \in C_1, \ x_2 \in C_2, \dots, \ x_n \in C_n\}$

Cardinalità: $Card(S) = k = \prod_{i=1}^{n} n_i = n_1 n_2 \dots n_n$

Disposizione senza ripetizione

$D_{SR}(N, n) = N * (N-1) * (N-2) * \dots * (N-n+1)$

$D_{SR}(N, n) = N$ *per* $n = 1$;

$D_{SR}(N, n-1) = (N-n) * D_{SR}(N, n)$ *per* $n > 1$

$D_{SR}(N, n) = \frac{N!}{(N-n)!}$

Disposizione con ripetizione

$D_{CR}(N, n) = \overbrace{N * N * \dots * N}^{n \text{ volte}} = N^n$

Permutazioni senza ripetizione

$P_{SR}(n, n) = n * (n-1) * (n-2) * \dots * 2 * 1 = n!$

Permutazione con ripetizione

$\binom{N}{n_1} \binom{N - n_1}{n_2} \binom{N - n_1 - n_2}{n_3} \dots =$

$\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \frac{(N-n_1)!}{n_2!(N-n_1-n_2)!} \frac{(N-n_1-n_2)!}{n_3!(N-n_1-n_2-n_3)!} \dots =$

$= \frac{N!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_m!} = \binom{N}{n_1, n_2, \dots, n_m} = P(n_1, n_2, \dots, n_m)$

Stirling : 1. $n! \cong \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$; 2. $n! \cong \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}\right)$

Combinazioni senza ripetizione

$$C(N,n)=\frac{D_{SR}(N,n)}{n!}=\frac{N!}{(N-n)!*n!}$$

$$C(N,n)=\frac{N*(N-1)*(N-2)*\ldots*(N-n+1)}{n!}$$

Combinazioni con ripetizione

$$\binom{N+n-1}{n}=\frac{(N+n-1)!}{n!\,(N-1)!}=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{N-1+i}{n-1}$$

$$\binom{N+n-1}{n}=\frac{N*(N+1)*(N+2)*\ldots*(N+n-1)}{n!}$$

Partizioni senza reimmissione

$$\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{r_i}=\binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}\ldots\binom{n_m}{r_m}$$

$$=\frac{n_1!\,n_2\ldots n_m!}{r_1!\,r_2\ldots r_m!}\left[\frac{1}{(n_1-r_1)!(n_2-r_2)!\ldots(n_m-r_m)!}\right]$$

Partizioni con reimmissione

$$\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i+r_i-1}{r_i}=\binom{n_1+r_1-1}{r_1}\binom{n_2+r_2-1}{r_2}\ldots\binom{n_m+r_m-1}{r_m}$$

Coefficiente binomiale

$$\frac{N!}{(N-n)!*n!}=\binom{N}{n} \quad \text{da leggere: "}N \text{ su } n\text{"}$$

$$a)\binom{N}{n}=0 \quad se \quad n>N; \qquad b)\binom{N}{N}=1; \qquad c)\binom{N}{0}=1$$

$$\binom{N}{n}=\binom{N}{N-n}; \qquad \binom{N}{n}=\binom{N-1}{n}+\binom{N-1}{n-1}$$

$$\binom{N}{n+1}=\left[\frac{(N-n)}{(n+1)}\right]*\binom{N}{n}$$

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}=\binom{n}{0}b^n+\binom{n}{1}ab^{n-1}+\binom{n}{2}a^2b^{n-2}+\ldots$$

$$+\binom{n}{n-1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{n}a^n$$

$$\binom{-\alpha}{n}=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{-\alpha+i-1}{i}\right)=(-1)^n\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}=$$

$$=(-1)^n\binom{n+\alpha-1}{n}$$

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{n}{i}\binom{N-n}{r-i}=\binom{n}{0}\binom{N-n}{r}+\binom{n}{1}\binom{N-n}{r-1}+\ldots+\binom{n}{r}\binom{N-n}{0}=$$

$$=\binom{N}{r}$$

Probabilità condizionata e indipendenza

$$P(E\subset W|C)=\frac{P(E\cap C)}{P(C)}; \quad con \quad P(C)>0;$$

$$oppure \quad P(E\cap C)=P(C)P(E|C)$$

1. $P(C|C)=1$;

2. $P(E|C)=\frac{P(E)}{P(C)}P(C|E)$; 3. $P(E\cap\overline{C})=P(\overline{C})P(E|\overline{C})$

4. $P(\overline{E}|C)=1-P(E|C)$; 5. $P(E)=P(C)P(E|C)+P(\overline{C})P(E|\overline{C})$

6. $P(E\cup F|C)=P(E|C)+P(F|C)-P(E\cap F|C)$;

7. $P(E\cap F|C)=P(E|C\cap F)*P(F|C)=P(E|C\cap E)*P(E|C)$;

8. $P(C|E\cup F)=\frac{P(C|E)*P(E)+P(C|F)*P(F)}{P(E\cup F)}$;

9. $P(C|E\cap F)=\frac{P(C\cap E|F)}{P(E|F)}$

$$P(E\cap F\cap G)=P(F\cap G)*P(E|F\cap G)=P(G)*P(F|G)*P(E|F\cap G)$$

Teorema di Bayes :

$$P(E)=\sum_{i=1}^{k}P(H_i\cap E)=\sum_{i=1}^{k}P(H_i)*P(E|H_i)$$

$$P(H_j|E)=\frac{P(H_j\cap E)}{P(E)}=\frac{P(H_j)P(E|H_j)}{P(E)}=\frac{P(H_j)P(E|H_j)}{\sum_{i=1}^{k}P(H_i)P(E|H_i)}$$

Indipendenza :

$$P(E|F)=P(E) \;\Rightarrow\; \frac{P(E\cap F)}{P(F)}=P(E) \;\Rightarrow\; P(E\cap F)=P(E)*P(F)$$

$$P(F\cap E)=P(E)*P(F)$$

indipendenza di n eventi

$$P\left(E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\ldots\cap E_{k_m}\right)=\prod_{i=1}^{m}P\left(E_{k_i}\right)$$

Unione di n eventi

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(E_i)-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}P(E_i\cap E_j)+$$

$$\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}P(E_i\cap E_j\cap E_k)-\ldots+(-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{i=1}^{n}E_i\right)$$

Selezione delle unità

Universo dei campioni

Cardinalità ν	*Ordinati*	*Non ordinati*	*Partiz. in "m" gr.*
Con reimmis.	N^n	$\binom{N+n-1}{n}$	$\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i+r_i-1}{r_i}$
Senza reimmis.	$N!/(N-n)!$	$\binom{N}{n}$	$\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{r_i}$

Tavola dei numeri casuali

Estratto superiore ad N

$$i=Resto(r,N)\;=\;r-\left[\frac{r}{N}\right]*N$$

Probabilità ineguali

unità	*attitudine*	A_i	*Scelta*
1	a_1	$A_1=a_1$	$]0,A_1]$
2	a_2	$A_2=a_1+a_2$	$]A_1,A_2]$
3	a_3	$A_3=a_1+a_2+a_3$	$]A_2,A_3]$
:	:	:	:
N	a_n	$A_N=\sum_{i=1}^{N}a_i$	$]A_{N-1},A_N]$

Numeri pseudo casuali

$$X_i\equiv(aX_{i-1}+c)\;mod\;m=Resto(aX_{i-1}+c,m); \quad i=1,2,\ldots,$$

P.P.S. Metodo cumulativo

unità	*attitudine*	A_i	*Scelta*
1	a_1	$A_1 = a_1$	$]0, A_1]$
2	a_2	$A_2 = a_1 + a_2$	$]A_1, A_2]$
3	a_3	$A_3 = a_1 + a_2 + a_3$	$]A_2, A_3]$
:	:	:	:
N	a_n	$A_N = \sum_{i=1}^{N} a_i$	$]A_{N-1}, A_N]$

Percentuale di risposta a domande sensibili:

$$\pi_1 = \frac{\lambda - (1-p)\pi_2}{p}$$

Selezione sistematica:

u_j *entra nel campione in posizione* $i-esima$

se $j = r + (i-1) * h$

Variabili casuali

Variabile casuale discreta finita

$X(e): S \to T \subset R, \quad T = \{x | x = X(e) \text{ per ogni } e \in S\}$

Funzione di ripartizione

$$F(x) = P(X \le x) = P\{E(-\infty, x]\} = P\left\{E(-\infty, x_1] \cup \left\{\bigcup_{j=2}^{i}(x_{j-1}, x_j]\right\}\right\} =$$

$$\sum_{j=1}^{i} P(X = x_j) \quad -\infty < x < \infty$$

$$p(x_i) = F(x_i) - F(x_i -) = \begin{cases} F(x_0) & \text{per } x \le x_0 \\ F(x_i) - F(x_{i-1}) & \text{per } x_{i-1} < x \le x_i \end{cases}$$

Trasformazioni

$$p(y) = P(Y = y_i) = P\left[X \in g^{-1}(y_i)\right]; \qquad F(y) = P\left[X \le g^{-1}(y_i)\right]$$

$$P(Y = y_i) = \sum_{x_j \in g^{-1}(y_i)} P(X = x_j)$$

Valore atteso

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Guadagno atteso

$$E(G) = xp - y(1-p) = xp - y + yp = (x+y)p - y$$

$$E(G) = 0 \Rightarrow (x+y)p - y = 0 \Rightarrow p = \frac{y}{x+y}, \quad 1-p = \frac{x}{x+y}$$

$$\text{Se } Y = g(x) \Rightarrow E(Y) = \sum_{r=1}^{k} y_j P\left[X \in g^{-1}(y_r)\right] = \sum_{r=1}^{k} g(x_j) P(X = x_j)$$

Momenti

$$\text{all' origine: } \mu_r = \sum_{i=1}^{k} x_i^r p_i; \qquad \text{centrati: } \mu'_r = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^r p_i$$

Trasformata lineare

$$\mu_y = \sum_{i=1}^{k} y_i p_i = \sum_{i=1}^{k} (ax_i + b) p_i = a\mu_x + b;$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{k} (ax_i + b - a\mu_x - b)^2 p_i = a^2 \sigma_x^2$$

Teorema della continuità

$$P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

Additività completa (σ *− additività*)

$$P(E) = \sum_{e_i \in E} P(e_i)$$

Tchebycheff

$$P\left[|X - E(X)| \ge b\sigma(X)\right] \le \frac{1}{b^2} \Rightarrow P\left[|X - E(X)| \ge a\right] \le \left[\frac{\sigma(X)}{a}\right]^2$$

con $a = b\sigma(X)$. *Ovvero*: $P\left[|X - E(X)| < a\right] \ge 1 - \left[\frac{\sigma(X)}{a}\right]^2$

$\sigma - algebra$

1) $S \in W$; 2) *Se* $E \in W \Rightarrow E^c \in W$;

3) *Se* $E_i \in W, \ i = 1, 2, \ldots, \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \in W$

Criterio di Raabe:

Sia $\frac{p_i}{p_{i+1}} = 1 + \frac{a}{i} + o\left(\frac{1}{i}\right)$; *se* $i \to \infty$ *allora*

$$\begin{cases} \text{se } a < 1 \ \sum p_i \text{ diverge} \\ \text{se } a > 1 \ \sum p_i \text{ converge} \\ \text{se } a = 1 \text{ il test non è conclusivo} \end{cases}$$

Infinitesimo:

$$f(x) = o[g(x)] \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Infinito:

$$f(x) = O[g(x)] \Rightarrow |f(x)| \le Mg(x) \text{ con } M > 0 \text{ per ogni } x$$

Momenti per le v.c. enumerabili:

$$\mu_r = E(X^r) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^r p_i, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

Conseguenza di Fisz:

$$\lim_{a\to\infty} a^r P(|x| > a) = 0$$

Condizione di convergenza assoluta:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |g(x_i) p(x_i)| = \sum_{i=0}^{\infty} |g(x_i)| p(x_i)$$

$$= |g(x_1)| p(x_1) + |g(x_2)| p(x_2) + \ldots < \infty$$

Idenficazione del modello attraverso i momenti:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{i!} a^i, \quad a > 0$$

Scelta del modello discreto

$$u_i = i \frac{p_i}{p_{i-1}} \quad \text{per} \quad i = 2, 3, \ldots$$

Modello	p	F	μ	σ
Dirac	$=\begin{cases}1 & se\ \ X=X_0\\0 & altrimenti\end{cases}$	$\begin{cases}0 & se\ \ X<X_0\\1 & altrimenti\end{cases}$	X_0	0
Bernoulli	$p^x(1-p)^{1-x},\ \ per\ \ x=0,1;$	$\begin{cases}0\ \ se\ \ x<0\\1-p\ \ se\ \ 0\le x<1\\1\ \ x\ge 1\end{cases}$	p	$\sqrt{p(1-p)}$
Uniforme	$\frac{1}{n}\quad per\ \ i=1,2,\dots,n$	$\frac{i}{n};\quad i=1,2,\ \dots,\ n$	$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\mu^2}$
Binomiale	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\ \ x=0,1,2,\dots,n$	$\sum_{i=0}^{x}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i},\quad x=0,1,\dots,n$	np	$\sqrt{np(1-p)}$
Frequenza	$p(H)=p(Bin.=nx)$		p	$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
Ipergeometrica	$\frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}};\ \ x=0,1,2,\ \dots,n;$	$\frac{\sum_{i=0}^{n}\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}};\quad 0\le x\le n$	$n\left(\frac{N_1}{N}\right)$	$\sqrt{n\left(\frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$
Iperg. negativa	$\frac{\binom{x-1}{r-1}\binom{N-x}{n-r}}{\binom{N}{n}}\quad r\le x\le N-n+r;$	$\sum_{i=r}^{x}\frac{\binom{i-1}{r-1}\binom{N-i}{n-r}}{\binom{N}{n}};\ \ r\le x\le N-n+r$	$r\left(\frac{N+1}{n+1}\right)$	$\sqrt{r\left(\frac{N+1}{n+1}\right)\left[(r+1)\left(\frac{N+2}{n+2}\right)-\frac{(n+1)+r(N+1)}{(n+1)}\right]}$

Modello	$p(x)$	$F(x)$	μ	σ
Poisson	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},\quad x=0,1,2,\dots,$	$\sum_{j=0}^{i}\frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}\quad i\le x<i;$	λ	$\sqrt{\lambda}$
Pascal	$\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r},\quad x=r,r+1,\dots,$	$\sum_{j=r}^{i}\binom{i-1}{r-1}p^r(1-p)^{i-r}\quad se\ \ i\le x<i$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\sqrt{\left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{1-p}{p}\right)}$
Geometrica	$p(1-p)^{x-1}\qquad x=1,2,\ \dots$	$p\sum_{i=1}^{x}(1-p)^i\qquad se\ \ i\le x<i$	$\frac{(1-p)}{p}$	$\frac{\sqrt{1-p}}{p}$

La classe di Borel:

$E(a_i,b_i]=\{x\in R \mid a_i<x\le b_i\};$

$a_1<a_2<\dots<a_n;\ \ b_1<b_2<\dots<b_n\ -\infty\le a_1;\ \ b_n<\infty$

Se $E(a_i,b_i],E(a_j,b_j]\subset W$

con $E(a_i,b_i]\cap E(a_j,b_j]=\varnothing$ *per* $i\ne j\ \Rightarrow$

$E_n=\bigcup_{i=1}^{n}E(a_i,b_i]\subset W$

Funzione di ripartizione per le continue:

1. $0\le F(x)\le 1,\ \ x\in R;$
2. $F(-\infty)=0;\ \ F(\infty)=1;$
3. $F(x)=F(x+);$
4. $F(x_1)\le F(x_2)$ *se* $x_1<x_2$

$P\{a<x\le b,\}=P\{E(a,b]\}=P\left\{\bigcup_{i=1}^{n}E(a_i,b_i]\right\}$

$a\le a_1<b_1\le a_2<b_2<\dots<b_n\le b$

$=\sum_{i=1}^{n}\left[F(b_i)-F(a_i)\right]=F(b)-F(a)$

per $E(a,b]\subset B$

Variabili casuali assolutamente continue

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}h(t)dt\ \ con\ \ h(x)\ge 0;\ \ \int_{-\infty}^{+\infty}h(x)dx$

$h(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\lim_{x_2\to x}\frac{F(x_2)-F(x)}{x_2-x};\ \ con\ \ x<x_2$

$P(x_1<x\le x_2)=\int_{x_1}^{x_2}h(t)dt;\quad P(x_1\le x\le x_1)=\int_{x_1}^{x_1}h(t)dt;=0$

$P\{x\in(a,b]\}=P\{x\in(a,b)\cup[b,b]\}=P\{x\in(a,b)\}+P\{x\in[b,b]\}$

$=\int_a^b h(x)dx+\int_b^b h(x)dx=F(b)-F(a)+0=F(b)-F(a)$

Funzione di ripartizione complementare:

$G(x)=\int_x^{\infty}h(t)dt=\ 1-\int_{-\infty}^{x}h(t)dt;$

Funzione di graduazione:

$X_p=F^{-1}(p)=Min\{x \mid F(x)=p\}$

Funzione di rischio:

$r(x)=-\frac{d}{dx}Log[1-F(x)]=\frac{h(x)}{1-F(x)}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t\le x\le t+\Delta t)}{\Delta t}$

$\int_0^x r(t)dt=-Ln[1-F(x)]\Rightarrow F(x)=1-e^{-\int_0^x r(t)dt},\ \ h(x)=r(x)e^{-\int_0^x r(t)dt}$

Moda continue

$$h'(x)=0$$

$$\left\{F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\left[\frac{1}{2}F(X_1)+\frac{1}{2}F(X_2)\right]\right\}*$$

$$\left\{F\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)-\left[\frac{1}{2}F(X_3)+\frac{1}{2}F(X_4)\right]\right\}$$

Mediana:

$$\int_{-\infty}^{x_p} h(x)dx = p$$

Valore atteso:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xh(x)dx$$

Esistenza del valore atteso

$$\underset{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}{Lim}\int_a^b |g(x)h(x)|dx = \underset{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}{Lim}\int_a^b |g(x)|h(x)dx = E\big[|g(x)|\big] < \infty$$

Deteterminazione del valore atteso:

$$\begin{cases} X^+ = Max\{X,0\} \\ X^- = Max\{-X,0\} \end{cases} \Rightarrow E(X) = E\left(X^+\right) - E\left(X^-\right)$$

Momenti :

$$\mu_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x^\alpha h(x)dx; \quad da\ \mu:\ \mu'_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^\alpha h(x)dx;$$

Momenti assoluti:

$$\nu_r = \int_{-\infty}^{\infty}|x|h(x)dx$$

Momenti parziali :

$$\mu_k^+(M) = \begin{cases} Discrete: \dfrac{\sum\limits_{X_{(i)}\le M} X_{(i)}^k f_i}{F(M)} \\[2ex] Continue: \dfrac{\int_{-\infty}^{M} x^k h(x)dx}{F(M)} \end{cases};$$

$$\mu_k^-(M) = \begin{cases} Discrete: \dfrac{\sum\limits_{X_{(i)}> M} X_{(i)}^k f_i}{F(M)} \\[2ex] Continue: \dfrac{\int_{M}^{\infty} x^k h(x)dx}{F(M)} \end{cases}$$

Disuguaglianza di Markov:

$$a^k P\big[|x|\ge a\big] \le E\Big[|x|^k\Big]$$

Esistenza dei momenti nelle continue

$$\underset{a\to\infty}{Lim}\int_{|x|>a}|x|^k h(x)dx \to 0 \Rightarrow \underset{a\to\infty}{Lim}\ a^k P(|x|>a) =$$

$$= \underset{a\to\infty}{Lim}\ a^k\big[1-F(a)\big] = 0$$

Disuguagianza di Liapunov:

$$\upsilon_k^{s-t} \le \upsilon_t^{s-k}\upsilon_s^{k-t} \Rightarrow \upsilon_{k+1} \le \frac{\upsilon_k^2}{\upsilon_{k-1}}$$

Deviazione standard:

$$\sigma = \sqrt{E\big[X-E(X)\big]} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 h(x)dx} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}x^2 h(x)dx - \mu^2}$$

Scarto ass. mediano:

$$S_{Me} = \int_{-\infty}^{+\infty}|x-M_e|h(x)dx = \int_{-\infty}^{M_e}(M_e-x)h(x)dx + \int_{-\infty}^{M_e}(x-M_e)h(x)dx$$

Deviazione media:

$$S_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty}|x-\mu|h(x)dx = 2\mu F(\mu) - 2\int_{-\infty}^{\mu} xh(x)dx$$

Differenza media:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|h(x)h(y)dxdy = 2\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\big[1-F(x)\big]dx =$$

$$= 4\int_{-\infty}^{+\infty}x\big[F(x)-0.5\big]h(x)dx = 2F(\mu)\big[\mu-\mu_1^+(\mu)\big];$$

Curva di Lorenz v.c. continue:

$$p = F(x); \quad L(p) = \frac{1}{\mu}\int_a^{g(p)}(x-a)h(x)dx; \quad \mu = \int_a^{\infty}xh(x)d(x); \quad g(p)$$

$$= F^{-1}\left(x_p\right), \quad x > a$$

Indici asimmetria:

$$\alpha_1 = \frac{\mu-M_e}{S_{Me}}; \ -1\le\alpha_1\le 1; \ \alpha_2 = \frac{\mu-M_o}{\sigma}; \ -3\le\alpha_2\le 3$$

$$\gamma_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^3 h(x)dx; \quad YB = \frac{Q_3+Q_1-2M_e}{Q_3-Q_1}; \ -1\le YB\le 1$$

Denominazione	*Densità*	*Dominio*
Uniforme	$h(x)=\dfrac{1}{b-a}$	$a<x<b$
Burr – Mielke	$h(x)=abcx^{b(c-1)}\left[\dfrac{x^b}{1+x^b}\right]^{1+c}$	$x>0;\ a,b,c>0$
Pareto	$h(x)=\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{a}{x}\right)^{b+1}$	$x>a;\ a,b>0$
Weibull	$h(x)=\dfrac{a}{b}\left(\dfrac{x}{b}\right)^{a-1}e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a}$	$x>0;\ a,b>0$
Normale	$h(x)=\dfrac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	$\sigma>0$
Lognormale	$h(x)=\dfrac{e^{-\frac{[Ln(x)-\mu]^2}{2\sigma^2}}}{x\sigma\sqrt{2\pi}}$	$\sigma>0$
Beta	$h(x)=\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$	$0<x<1;\ a,b>0$ $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$
Gamma	$h(x)=\dfrac{\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1}e^{-\frac{x}{b}}}{\Gamma(a)}$	$x>0;\ a,b>0$
Cauchy	$h(x)=\dfrac{\sigma}{\pi\left[1+\sigma^2(x-a)^2\right]}$	$\sigma>0$
Gumbel	$h(x)=\dfrac{e^{-\left[\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)+e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)}\right]}}{\sigma}$	$\sigma>0$
Laplace	$h(x)=\dfrac{e^{-\left\lvert\frac{x-a}{\sigma}\right\rvert}}{2\sigma}$	$\sigma>0$
Normale Inv.	$h(x)=\left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)\left(\dfrac{\mu}{x}\right)^{1.5}e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu}{x}\right)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}$	$x,\mu,\sigma>0$

La Normale:

$$X \sim N(\mu,\sigma) \rightarrow h(x) = \frac{e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}; \quad -\infty < \mu < \infty; \ \sigma > 0$$

$$\textit{Media aritmetica } \mu = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx;$$

$$\textit{Deviazione standard } \sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 h(x)dx}$$

Aree sottese:

$$F(x;\mu;\sigma) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx = \phi(z) = \int_{-\infty}^{w} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$\phi(-z) = 1-\phi(z); \quad Pr(Z \geq z) = 1-\phi(z)$$

Formula di Page:

$$\varphi(z) \cong \left[1+e^{-2y}\right]^{-1}, \ y = \sqrt{2/\pi}\left(1+0.044715z^2\right)z$$

Quantile:

$$P(|x-\mu| > r) = \alpha \Rightarrow r = \sigma\phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$P(X > X_\alpha) = \alpha \Rightarrow X_\alpha = \mu + \sigma\phi^{-1}(1-\alpha);$$

$$P(X < X_\alpha) = \alpha \Rightarrow X_\alpha = \mu + \sigma\phi^{-1}(\alpha);$$

Curtosi:

$$\gamma_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^4 h(x)dx - 3; \quad con \ \gamma_2 \begin{cases} = 0; & mesocurtica \\ < 0; & platicurtica \\ > 0; & leptocurtica \end{cases}$$

$$\textit{Indice di Hogg}: \ KH = \frac{\mu_1^-(x_{0.2}) - \mu_1^+(x_{0.2})}{\mu_1^-(M_e) - \mu_1^+(M_e)}$$

Groenvald – Meeden:

$$GM_p = \frac{\left(X_{1-\frac{p}{2}} - Q_3\right) - \left(Q_3 - X_{\frac{1+p}{2}}\right)}{\left(X_{1-\frac{p}{2}} - Q_3\right) + \left(Q_3 - X_{\frac{1+p}{2}}\right)} = \frac{X_{1-\frac{p}{2}} + X_{\frac{1+p}{2}} - 2Q_3}{X_{1-\frac{p}{2}} + X_{\frac{1+p}{2}}};$$

$0 < p < 0.5$

Approssimazione discrete:

$$f(a) = \phi(a+0.5) - \phi(a-0.5)$$

$$F(X < a) = \phi(a-0.5); \qquad F(X \leq a) = \phi(a+0.5);$$

$$F(X > a) = 1-\phi(a+0.5); \qquad F(X \geq a) = 1-\phi(a-0.5);$$

Coordinate grafico di normalità:

$$\hat{Z}_i = \frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma}, \ Z_{p_i} \quad i = 1,2,\ldots,n \ \ dove \ \ p_i = \frac{i-0.5}{n}$$

Trasformazione Box – Cox:

$$Y_i(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{X_i^\alpha - 1}{\alpha} & per \ \ \alpha \neq 0 \\ Ln(X) & per \ \ \alpha = 0 \end{cases}$$

Bivariate:

Distribuzione congiunta discreta

$$P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = p_{ij} \quad con \quad \begin{cases} p_{ij} \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} p_{ij=1} \end{cases}$$

(X,Y)	y_1	y_2	$\cdots$	y_h	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1h}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2h}	$p_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	p_{k1}	p_{k2}	$\cdots$	p_{kh}	$p_{k.}$
	$p_{.1}$	$p_{.1}$	$\cdots$	$p_{.h}$	1

$$p_{.j} = \sum_{i=1}^{k} p_{ij} \qquad p_{i.} = \sum_{j=1}^{h} p_{ij}$$

Marginale della X

$$P(X = x_i) = P\left\{(X = x_i) \cap \bigcup_{j=1}^{h}\left(Y = y_j\right)\right\} = P\left\{\bigcup_{j=1}^{h}(X = x_i) \cap \left(Y = y_j\right)\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{h} p_{ij} = p_{i.}$$

Marginale della Y

$$P\left(Y = y_j\right) = P\left\{\left(Y = y_j\right) \cap \bigcup_{i=1}^{x}(X = X_i)\right\} = P\left\{\bigcup_{i=1}^{k}(X = x_i) \cap \left(Y = y_j\right)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} p_{ij} = p_{.j}$$

Distribuzioni parziali o condizionate:

$$P\left(X = x_i | Y = y_j\right) = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{P\left(Y = y_j\right)};$$

$$P\left(Y = y_j | X = x_i\right) = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{P(X = x_i)}$$

Indipendenza in distribuzione

$$P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = p_{i.}p_{.j} \qquad i = 1,2,\ldots k; \quad j = 1,2,\ldots,h$$

$$P\left(X = x_i | Y = y_j\right) = P(X = x_i) \quad j = 1,2,\ldots h;$$

$$P\left(Y = y_j | X = x_i\right) = P\left(Y = y_j\right) \quad i = 1,2,\ldots k;$$

Uniforme discreta bivariata

$$P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = \frac{1}{k*h}; \quad i = 1,2,\ldots,k; \ \ j = 1,2,\ldots,h$$

Momenti della v.c. discreta bivariata

$$E[g(X,Y)] = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} g\left(x_i, y_j\right)p_{ij}$$

$$Se \ \ g\left(x_i, y_j\right) = x_i^r \Rightarrow$$

$$\textit{Momenti della marginale in X}: \ \sum_{i=1}^{k} x_i^r p_{i.}$$

$$Se \ \ g\left(x_i, y_j\right) = y_j^s \Rightarrow$$

$$\textit{Momenti della marginale in Y}: \ \sum_{j=1}^{h} y_j^s p_{.j}$$

$$Se \ \ g\left(x_i, y_j\right) = x_i^r y_j^s \Rightarrow$$

$$\textit{Momenti misti all'origine}: \ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} x_i^r y_j^s p_{ij}$$

$$Se \ \ g\left(x_i, y_j\right) = (x_i - \mu_x)^r \left(y_j - \mu_y\right)^s \Rightarrow$$

$$\textit{Momenti misti scarto}: \ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} (x_i - \mu_x)^r \left(y_j - \mu_y\right)^s p_{ij}$$

Proprietà del valore atteso :

$$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$$

$$E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)\ \ se\ \ p(X_1,X_2)=p(X_1)p(X_2)$$

Valore atteso condizionale :

$$E(X|Y=y_j)=\sum_{i=1}^{k}x_i\frac{p_{ij}}{p_{.j}};\quad E(Y|X=x_i)=\sum_{j=1}^{h}y_j\frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

Indipendenza in media :

$$\begin{cases}E(X|Y=y_j)=E(X) & per\ \ ogni\ \ j\\ E(Y|X=x_i)=E(Y) & per\ \ ogni\ \ i\end{cases}$$

$$Covarianza: Cov(X,Y)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h}(x_i-\mu_x)(y_j-\mu_y)p_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h}x_iy_jp_{ij}-E(X)E(Y);\quad p_{ij}=\frac{n_{ij}}{n}$$

Varianza della somma :

$$Var(X\pm Y)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h}\left[(x_i+y_j)-(\mu_x+\mu_y)\right]^2p_{ij}$$

$$=Var(X)+Var(Y)\pm 2Cov(X,Y)$$

Proprietà della covarianza :

$$Cov(a+bX,c+dY)=bdCov(X,Y)$$

$$[Cov(X,Y)]^2\le\sigma^2(X)\sigma^2(Y)$$

$$Coefficiente\ \ di\ \ correlazione: r(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Proprietà del coefficiente di correlazione

$$r(X,Y)=r(Y,X)$$

$$r(a+bX,c+dY)=r(X,Y)$$

$$-1\le r(X,Y)\le 1;\quad r(X,Y)=\begin{cases}1 & se\ \ X=a+bY;\ b>0\\ -1 & se\ \ X=a+bY;\ b<0\end{cases}$$

Coppie di valori :

$$r(X,Y)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\mu_x\mu_y}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\mu_x^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\mu_y^2\right)}}$$

Funzione di densità doppia:

$$P[(X,Y)\in A]=\iint_A f(x,x)dxdy$$

Proprietà della funzione di densità doppia:

$$f(x,y)\ge 0\ \ \forall(x,y)\in A;\quad f(x,y)=0\ \ \forall(x,y)\notin A$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$$

Funzione di ripartizione:

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)dsdt$$

Proprietà della funzione di distribuzione doppia:

$F(x,y)$ *non decrescente per ogni argomento*

$F(x,y)$ *continua a destra per ogni argomento*

$$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0$$

$$F(-\infty,\infty)=1$$

Per ogni $x_1<x_2$ *e* $y_1<y_2$

$$F(x_1,y_1)+F(x_2,y_2)\ge F(x_2,y_1)+F(x_1,y_2)$$

Calcolo della funzione di ripartizione:

$$F(X\le x_0,Y\le y_0)=\int_a^{x_0}\int_c^{y_0}f(x,y)dxdy;\quad a\le x\le b;\ c\le y\le d$$

$$=\int_c^{y_0}\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}f(x,y)dx\right]dy=F(x_0,y_0)$$

$$F(X\le x_0,Y\le y_0)=\int_c^{y_0}\left[\int_a^{x_0}f(x,y)dx\right]dy=a\le x\le b;$$

$$g_1(x)\le y\le g_2(x)$$

$$F(X,Y)=F(x)*F(y)=$$

Funzioni di densità marginali:

$$f(x)=\int_A f(x,y)dy;\quad f(y)=\int_A f(x,y)dx;$$

Funzioni di densità condizionate:

$$f(X|Y)=\frac{f(X,Y)}{f(Y)}=\frac{f(X,Y)}{\int_A f(x,y)dx;};$$

$$f(Y|X)=\frac{f(X,Y)}{f(X)}=\frac{f(X,Y)}{\int_A f(x,y)dy;};$$

Indipendenza nelle doppie continue:

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy=\int_a^b\int_c^d g(x)h(y)dxdy=\left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right)$$

$$Se\ \ f(x,y)=g_1(x)g_2(y)\Rightarrow f[t_1(x),t_2(y)]=h_1[t_1(x)]h_2[t_2(y)]$$

$$Se\ \ f[t_1(x),t_2(y)]=h_1[t_1(x)]h_2[t_2(y)]$$

$$non\ \ necess.\ \ f(x,y)=g_1(x)g_2(y)$$

Momenti delle bivariate continue

$$E[g(x,y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$E(X|y)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(X|y)dx;\quad E(Y|x)=\int_{-\infty}^{\infty}yf(Y|x)dy;$$

$$Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy-E(X)E(Y)$$

$$r(X,Y)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy-E(X)E(Y)}{\sqrt{\left\{\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-[E(x)]^2\right\}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}y^2f(y)dy-[E(y)]^2\right\}}}$$

Densità uniforme bivariata

$$f(X,Y)=k\quad per\ \ (x,y)\in A$$

Densità normale bivariata

$$f(X,Y)=\frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$per\ \ -\infty<x,y<\infty$$

$$X|y \sim N\left[\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-\mu_y\right), \sqrt{\sigma_x^2\left(1-\rho^2\right)}\right]$$

$$Y|x \sim N\left[\mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x-\mu_x\right), \sqrt{\sigma_y^2\left(1-\rho^2\right)}\right]$$

Distribuzione multinomiale

$$P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k\right) =$$
$$= \frac{n!}{x_1! * x_2! * \ldots * x_k!} p^{X_1} p^{X_2} * \ldots * p^{X_k}$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

$$p_1, p_2, \ldots, p_k \geq 0; \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

$$P\left(X_i = x_i\right) = \binom{n}{x_i} p_i^{x_i}\left(1-p_i\right)^{n-x_i}$$

$$E\left(X_i\right) = np_i; \; \sigma^2\left(X_i\right) = np_i(1-p_i)$$

$$Cov\left(X_i, X_j\right) = -np_i p_j \quad \forall \; i \neq j$$

Indipendenza nelle v.c. n-dimensionali

$$f\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(X_i\right)$$

$$P\left(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} F\left(x_i\right)$$

Variabili casuali identicamente distribuite

$$f\left(X_1\right) = f\left(X_2\right) = \; \ldots \; = f\left(X_n\right)$$

Funzione di distribuzione del campione

$$f\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(X_i\right)$$

Combinazione lineare di n variabili casuali

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i$$

$$E\left[C_n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} w_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[w_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} w_i E\left[X_i\right]$$

$$\sigma^2\left[C_n\right] = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma^2\left(X_i\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} w_i w_j Cov\left(X_i, X_j\right)$$

Campionamento senza reimmisione:

$$\sigma^2\left(C_n\right) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} w_i^2\left(X_i\right) + 2d\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i} w_i w_j$$

Variabili casuali gaussiane:

$$C_n \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2}\right)$$

Media campionaria: $\hat{\mu}_x \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Media campionaria da popolazioni finite:

$$E(x) = \mu; \quad \sigma^2(x) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Totale campionario: $Q_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu, \sqrt{n}\sigma\right)$

Teorema del limite centrale $\dfrac{\bar{x}_n - \sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{n}}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i}{n}}} \sim N(0,1)$

Stima puntuale

Metodo dei momenti:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = E(X); \quad \hat{\mu}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} = E\left(X^2\right)$$

....

$$\hat{\mu}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^k}{n} = E\left(X^k\right)$$

Funzione di verosimiglianza: $L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} Ln\left[f\left(X_i;\theta\right)\right]$

Sima di massima verosimiglianza:

$$\hat{\theta} \; tale \; che \quad L\left(\hat{\theta}\right) \geq \; L(\theta) \; per \; ogni \; \theta \in \Theta$$

$$L'(\theta) = 0; \quad dove \quad L'(\theta) = \frac{dL(\theta)}{d\theta}; \qquad L''(\theta) < 0$$

Sufficienza dello stimatore (fattorizzazione):

$$L(\theta) = g\left[T\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right);\theta\right]$$

Centramento dello stimatore:

$$E(T-\theta) = 0$$

Errore quadratico medio:

$$E(T-\theta)^2 = \sigma^2(T) + \left[E(T)-\theta\right]^2$$

Consistenza in probabilità dello stimatore:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|T_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad \forall\theta \in \Theta \quad e \quad \forall\varepsilon > 0$$

Consistenza in media quadratica dello stimatore:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left(T_n - \theta\right)^2\right] = 0 \quad \forall\theta \in \Theta \quad e \quad \forall\varepsilon > 0$$

Intervalli di stima

Stimatori intervallari:

$$L\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right); \quad U\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right);$$
$$P\left(L_n \leq \theta \leq U_n\right) \geq 1-\alpha$$

Inervalli non parametrici

$$\left(-\infty, X_{max}\right], \quad \left[X_{min}, \; \infty\right), \quad \left[X_{min}, \; X_{max}\right]$$

Statistiche pivotali:

$$T(X;\theta) = \frac{T-\theta}{\sigma(T)}$$

Intervalli di Tchebycheff

$$T - \frac{\sigma(T)}{\sqrt{\alpha}} \leq \theta \leq T + \frac{\sigma(T)}{\sqrt{\alpha}}; \; confidenza \geq (1-\alpha)$$

Oggetto	Condizioni	Intervallo bilaterale
μ	σ noto;	$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
μ	σ incognito;	$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$
μ	σ incognito	$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$
μ	σ noto; pop.finita	$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{\frac{N-n}{n(N-1)}} \le \mu \le \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{\frac{N-n}{n(N-1)}}$
σ^2	Normale n grande	$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$
		$H - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{H(1-H)}{n}} \le \pi \le H + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{H(1-H)}{n}}$
π	Bernoulli	$H - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{H(1-H)}{n} * \frac{N-n}{(N-1)}} \le \pi \le H + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{H(1-H)}{n} * \frac{N-n}{(N-1)}}$
π_1-π_2	Bernoulli	$(H_1 - H_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{H_1(1-H_1)}{n_1} + \frac{H_2(1-H_2)}{n_2}} \le \pi_1 - \pi_2 \le (H_1 - H_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{H_1(1-H_1)}{n_1} + \frac{H_2(1-H_2)}{n_2}}$

Intervalli unilaterali		Ampiezza
$\mu \le \bar{x} + Z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\mu \ge \bar{x} - Z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$n = \left[\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}}{\lvert E \rvert} \right]^2$; $\hat{\sigma} = \frac{X_{max} - X_{min}}{4}$; $\hat{\sigma} = \frac{X_{max} - X_{min}}{3.4641}$
$\mu \le \bar{x} + t_{\alpha, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$	$\mu \ge \bar{x} - t_{\alpha, n-1} \sigma \frac{s}{\sqrt{n}}$	come sopra
$\mu \le \bar{x} + Z_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}$	$\mu \ge \bar{x} - t_{\alpha, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$	non applicabile
$\mu \le \bar{x} + Z_{\alpha} \sigma \sqrt{\frac{N-n}{n(N-1)}}$	$\mu \ge \bar{x} - Z_{\alpha} \sigma \sqrt{\frac{N-n}{n(N-1)}}$	$n = \frac{k^2 * N}{k^2 + (N-1)}$; $k = \frac{Z_{a/2} \hat{\sigma}}{\lvert E \rvert}$
$\sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha, n-1}}$	$\sigma^2 \ge \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha, n-1}}$	$n = 1 + 2 \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma^2}{\lvert E \rvert} \right)^2$
$\pi \le H + Z_{\alpha} \sqrt{\frac{H(1-H)}{n}}$	$\pi \ge H - Z_{\alpha} \sqrt{\frac{H(1-H)}{n}}$	$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{\lvert E \rvert} \right)^2 * \hat{H}(1-\hat{H})$; $\hat{H} = 0.5$
$\pi \le H + Z_{\alpha} \sqrt{\frac{H(1-H)}{n} * \frac{N-n}{(N-1)}}$	$\pi \ge H - Z_{\alpha} \sqrt{\frac{H(1-H)}{n} * \frac{N-n}{(N-1)}}$	$n = \frac{k^2 * N}{k^2 + (N-1)}$; $k = \frac{Z_{a/2}}{2\lvert E \rvert}$
$\pi_1 - \pi_2 \le (H_1 - H_2) + Z_{\alpha} \sqrt{\frac{H_1(1-H_1)}{n_1} + \frac{H_2(1-H_2)}{n_2}}$	$\pi_1 - \pi_2 \ge (H_1 - H_2) - Z_{\alpha} \sqrt{\frac{H_1(1-H_1)}{n_1} + \frac{H_2(1-H_2)}{n_2}}$	$n_1 = \left(\frac{c+1}{c} \right) * \left[\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{2\lvert E \rvert} \right]^2$; $n_2 = c n_1$

Oggetto	Condizioni	Intervallo bilaterale
μ	σ noto;	$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
μ	σ incognito;	$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$
μ	σ incognito	$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$
μ	σ noto; pop.finita	$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{\frac{N-n}{n(N-1)}} \le \mu \le \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{\frac{N-n}{n(N-1)}}$
σ^2	Normale n grande	$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$
		$H - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{H(1-H)}{n}} \le \pi \le H + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{H(1-H)}{n}}$
π	Bernoulli	$H - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{H(1-H)}{n} * \frac{N-n}{(N-1)}} \le \pi \le H + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{H(1-H)}{n} * \frac{N-n}{(N-1)}}$
π_1-π_2	Bernoulli	$(H_1 - H_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{H_1(1-H_1)}{n_1} + \frac{H_2(1-H_2)}{n_2}} \le \pi_1 - \pi_2 \le (H_1 - H_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{H_1(1-H_1)}{n_1} + \frac{H_2(1-H_2)}{n_2}}$

Intervalli unilaterali		Ampiezza
$\mu \le \bar{x} + Z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\mu \ge \bar{x} - Z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$n = \left[\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}}{\lvert E \rvert}\right]^2$; $\hat{\sigma} = \frac{X_{max} - X_{min}}{4}$; $\hat{\sigma} = \frac{X_{max} - X_{min}}{3.4641}$
$\mu \le \bar{x} + t_{\alpha, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$	$\mu \ge \bar{x} - t_{\alpha, n-1} \sigma \frac{s}{\sqrt{n}}$	come sopra
$\mu \le \bar{x} + Z_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}$	$\mu \ge \bar{x} - t_{\alpha, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$	non applicabile
$\mu \le \bar{x} + Z_{\alpha} \sigma \sqrt{\frac{N-n}{n(N-1)}}$	$\mu \ge \bar{x} - Z_{\alpha} \sigma \sqrt{\frac{N-n}{n(N-1)}}$	$n = \frac{k^2 * N}{k^2 + (N-1)}$; $k = \frac{Z_{a/2}\hat{\sigma}}{\lvert E \rvert}$
$\sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha, n-1}}$	$\sigma^2 \ge \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha, n-1}}$	$n = 1 + 2\left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma^2}{\lvert E \rvert}\right)^2$
$\pi \le H + Z_{\alpha} \sqrt{\frac{H(1-H)}{n}}$	$\pi \ge H - Z_{\alpha} \sqrt{\frac{H(1-H)}{n}}$	$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{\lvert E \rvert}\right)^2 * \hat{H}(1-\hat{H})$; $\hat{H} = 0.5$
$\pi \le H + Z_{\alpha} \sqrt{\frac{H(1-H)}{n} * \frac{N-n}{(N-1)}}$	$\pi \ge H - Z_{\alpha} \sqrt{\frac{H(1-H)}{n} * \frac{N-n}{(N-1)}}$	$n = \frac{k^2 * N}{k^2 + (N-1)}$; $k = \frac{Z_{a/2}}{2\lvert E \rvert}$
$\pi_1 - \pi_2 \le (H_1 - H_2) + Z_{\alpha} \sqrt{\frac{H_1(1-H_1)}{n_1} + \frac{H_2(1-H_2)}{n_2}}$		$n_1 = \left(\frac{c+1}{c}\right) * \left[\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{2\lvert E \rvert}\right]^2$; $n_2 = cn_1$
$\pi_1 - \pi_2 \ge (H_1 - H_2) - Z_{\alpha} \sqrt{\frac{H_1(1-H_1)}{n_1} + \frac{H_2(1-H_2)}{n_2}}$		

Ipotesi nulla	Condizioni	Statistica test	Valore di probabilità
$H_0:\ \mu = \mu_0$	Varianza nota; Normale, Indipendenza	$Z_c = \sqrt{n}\left(\frac{\hat{\mu}-\mu_0}{\sigma}\right)$	Se $H_1: \mu > \mu_0 \Rightarrow p-value = 1-\phi(Z \le Z_c)$ Se $H_1: \mu < \mu_0 \Rightarrow p-value = \phi(Z \le Z_c)$ Se $H_1: \mu \ne \mu_0 \Rightarrow p-value = 2[1-\phi(Z_c)]$
$H_0:\ \mu = \mu_0$	Varianza incognita Normale, Indipendenza	$t_c = \sqrt{n}\left(\frac{\hat{\mu}-\mu_0}{\hat{\sigma}}\right)$; $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{n_i}{n}$; $\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i-\hat{\mu})^2 \frac{n_i}{n-1}}$	Se $H_1: \mu > \mu_0 \Rightarrow p-value = 1-P(t_{n-1} \le t_c)$ Se $H_1: \mu < \mu_0 \Rightarrow p-value = P(t_{n-1} \le t_c)$ Se $H_1: \mu \ne \mu_0 \Rightarrow p-value = 2[P(-t_c \le t_{n-1} \le t_c)]$
$H_0:\ \mu = \mu_0$	Varianza incognita n grande Indipendenza	$Z_c = \sqrt{n}\left(\frac{\hat{\mu}-\mu_0}{\hat{\sigma}}\right)$; $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{n_i}{n}$; $\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i-\hat{\mu})^2 \frac{n_i}{n-1}}$	Se $H_1: \mu > \mu_0 \Rightarrow p-value = 1-\phi(Z \le Z_c)$ Se $H_1: \mu < \mu_0 \Rightarrow p-value = \phi(Z \le Z_c)$ Se $H_1: \mu \ne \mu_0 \Rightarrow p-value = 2[1-\phi(Z_c)]$
$H_0:\ \sigma^2 = \sigma_0^2$	Media incognita Normale Indipendenza	$c^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	Se $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \Rightarrow p-value = 1-P(\chi_{n-1}^2 \le c^2)$ Se $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \Rightarrow p-value = P(\chi_{n-1}^2 \le c^2)$ Se $H_1: \sigma^2 \ne \sigma_0^2 \Rightarrow p-value \cong 2[P(\chi_{n-1}^2 \le c^2)]$
$H_0:\ \sigma^2 = \sigma_0^2$	Media nota Normale Indipendenza	$c^2 = \frac{(n-1)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$	Se $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \Rightarrow p-value = 1-P(\chi_{n}^2 \le c^2)$ Se $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \Rightarrow p-value = P(\chi_{n}^2 \le c^2)$ Se $H_1: \sigma^2 \ne \sigma_0^2 \Rightarrow p-value \cong 2[P(\chi_{n}^2 \le c^2)]$
$H_0:\ \pi = \pi_0$	Prove bernoulliane n grande	$Z_c = \frac{H-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$	Se $H_1: \mu > \mu_0 \Rightarrow p-value = 1-\phi(Z \le Z_c)$ Se $H_1: \mu < \mu_0 \Rightarrow p-value = \phi(Z \le Z_c)$ Se $H_1: \mu \ne \mu_0 \Rightarrow p-value = 2[1-\phi(Z_c)]$
$H_0:\ \pi_1 - \pi_2 = \pi_0$	Prove bernoulliane n grande	$Z_c = \frac{(\hat{\pi}_1-\hat{\pi}_2)-\pi_0}{\sqrt{\frac{\hat{\pi}_1(1-\hat{\pi}_1)}{n_1}+\frac{\hat{\pi}_2(1-\hat{\pi}_2)}{n_2}}}$	Se $H_1: \mu > \mu_0 \Rightarrow p-value = 1-\phi(Z \le Z_c)$ Se $H_1: \mu < \mu_0 \Rightarrow p-value = \phi(Z \le Z_c)$ Se $H_1: \mu \ne \mu_0 \Rightarrow p-value = 2[1-\phi(Z_c)]$
$H_0:\ \pi_1 - \pi_2 = 0$	Prove bernoulliane n grande	$Z_c = \frac{(\hat{\pi}_1-\hat{\pi}_2)-\pi_0}{\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$ $\hat{\pi} = \frac{x_1+x_2}{n_1+n_2} = \frac{n_1}{n_1+n_2}\hat{\pi}_1 + \frac{n_2}{n_1+n_2}\hat{\pi}_2$	Se $H_1: \mu > \mu_0 \Rightarrow p-value = 1-\phi(Z \le Z_c)$ Se $H_1: \mu < \mu_0 \Rightarrow p-value = \phi(Z \le Z_c)$ Se $H_1: \mu \ne \mu_0 \Rightarrow p-value = 2[1-\phi(Z_c)]$
$H_0: \mu_1 - \mu_2 = D_0$	Camp. Indip. Normali Varianze note	$Z_c = \frac{(\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2)-D_0}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}}$	Se $H_1: \mu > \mu_0 \Rightarrow p-value = 1-\phi(Z \le Z_c)$ Se $H_1: \mu < \mu_0 \Rightarrow p-value = \phi(Z \le Z_c)$ Se $H_1: \mu \ne \mu_0 \Rightarrow p-value = 2[1-\phi(Z_c)]$
$H_0:\ \mu_1 - \mu_2 = D_0$	Camp. Indip. Normali Varianze uguali e non note	$t_c = \frac{(\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2)-D_0}{\sqrt{S_A\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$; $S_A = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-1}}$	Se $H_1: \mu_1-\mu_2 \ge D_0 \Rightarrow p-value = 1-P(t_{n_1+n_2-2} \le t_c)$ Se $H_1: \mu_1-\mu_2 \ge D_0 \Rightarrow p-value = P(t_{n_1+n_2-2} \le t_c)$ Se $H_1: \mu_1-\mu_2 \ne D_0 \Rightarrow \alpha = 2[P(-t_c \le t_{n_1+n_2-2} \le t_c)]$
$H_0:\ \mu_1 - \mu_2 = D_0$	Camp. Dip. Normali Varianze non note	$t_c = \frac{(\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2)-D_0}{\hat{\sigma}_d / \sqrt{n}}$; $\hat{\sigma}_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\hat{d})^2}{(n-1)}}$; $\hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$; $d_i = X_{1i} - X_{2i}$	Se $H_1: d > d_0 \Rightarrow p-value = 1-P(t_{n-1} \le t_c)$ Se $H_1: d < d_0 \Rightarrow p-value = P(t_{n-1} \le t_c)$ Se $H_1: d \ne d_0 \Rightarrow p-value = 2[P(-t_c \le t_{n-1} \le t_c)]$

$H_0 : F_1 = F_2$	n grande Indipendenza	$\chi_c^2 = n\left[\sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - \pi_i)^2}{\pi_i}\right]$ $= \sum_{i=1}^{n} \frac{(n_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i} = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{n_i^2}{n\pi_i}\right] - n$	$p - value = 1 - P\left(\chi_{k-1}^2 \leq \chi_c^2\right)$
$H_0 : \pi_{1i} = \pi_{2i}$ *per ogni "i"*		$\chi_c^2 = n\left[\sum_{i=1}^{k} \frac{(\pi_{i1} - \pi_{i2})^2}{\pi_{i2}}\right]$	$p - value = 1 - P\left(\chi_{k-1}^2 \leq \chi_c^2\right)$
$H_0 : \pi_{ij} = (\pi_{i.})(\pi_{.j})$		$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} \frac{\left[n_{ij} - (n_{i.})(n_{.j})\right]^2}{(n_{i.})(n_{.j})}$	$p - value = 1 - P\left(\chi_{(k-1)(h-1)}^2 \leq \chi_c^2\right)$

$1° \ tipo : a = P(C \in C_1 | H_0)$;

$2° \ tipo : \beta = P(C \in C_0 | H_1)$

$Potenza \ del \ test : 1 - \beta = P(C \in C_1 | H_1)$

Regressione

Modello logistico $Y = \dfrac{\beta_0}{1 + e^{-\beta_1 X}}$

Modello di regressione lineare semplice:

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + e_i; \quad i = 1, 2, \dots, n$

Criteri di calcolo per i parametri

$$Q_r(\beta_0, \beta_1) = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left|Y_i - \hat{Y}_i\right|^r}{n}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left|Y_i\right|^r}{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|Y_i - \hat{Y}_i\right|^r}{\sum_{i=1}^{n} \left|Y_i\right|^r}$$

Devianze:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2;$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2;$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y});$$

Stime con i minimi quadrati

1) $\hat{\beta}_1 = \dfrac{S_{yx}}{S_{xx}}; \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

2) $$\hat{\beta}_1 = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Stima della varianza degli errori

$$s_e^2 = S_{yy}\left(1 - r_{xy}\sqrt{\frac{S_{xx}}{S_{yy}}}\right)$$

Covarianza tra osservate e teoriche

$$\frac{Cov(y_i, \hat{y}_i)}{\sigma(y_i)\sigma(\hat{y}_i)} = \frac{\hat{\beta}_1}{\left|\hat{\beta}_1\right|} r_{yx}$$

Coefficiente di determinazione

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2}$$

Scambo di ruolo tra variabili

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i \Rightarrow \hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \quad dove \begin{cases} \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ \hat{\beta}_1 = \dfrac{S_{xy}}{S_{xx}} \end{cases}$$

$$x_i = \gamma_0 + \gamma_1 y_i + e_i^{'} \Rightarrow \hat{x}_i = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 y_i \quad dove \begin{cases} \hat{\gamma}_0 = \bar{x} - \hat{\gamma}_1 \bar{y} \\ \hat{\gamma}_1 = \dfrac{S_{xy}}{S_{yy}} \end{cases}$$

$$\hat{\gamma}_1 * \hat{\beta}_1 = r^2$$

Test sul coefficiente angolare

$H_0: \beta_1 = \theta_0$

$$\sigma^2\left(\hat{\beta}_1\right) = \sqrt{\frac{s_e^2}{SS_{xx}}}; \quad t_c\left(\hat{\beta}_1\right) = \frac{\hat{\beta}_1 - \theta_0}{\sigma^2\left(\hat{\beta}_1\right)}$$

$Se \;\; H_1: \beta_0 > \theta \Rightarrow p - value = 1 - P(t_{n-2} \le t_c)$

$Se \;\; H_1: \beta_0 < \theta \Rightarrow p - value = P(t_{n-2} \le t_c)$

$Se \;\; H_1: \beta_0 \ne \theta \Rightarrow p - value = 2\left[P(-t_c \le t_{n-2} \le t_c)\right]$

Relazione tra test ed R² $R^2 = \dfrac{\left[t\left(\hat{\beta}_1\right)\right]^2}{\left[t\left(\hat{\beta}_1\right)\right]^2 + n - 2}$

Test sull'intercetta

$H_0: \beta_0 = 0$

$$\sigma\left(\hat{\beta}_0\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(1 + \frac{n\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}$$

$$t\left(\hat{\beta}_0\right) = \frac{\hat{\beta}_0}{\sigma\left(\hat{\beta}_0\right)}$$

$Se \;\; H_1: \beta_0 > \theta \Rightarrow p - value = 1 - P(t_{n-2} \le t_c)$

$Se \;\; H_1: \beta_0 < \theta \Rightarrow p - value = P(t_{n-2} \le t_c)$

$Se \;\; H_1: \beta_0 \ne \theta \Rightarrow p - value = 2\left[P(-t_c \le t_{n-2} \le t_c)\right]$

Intervallo di previsione come parametro:

$$\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*\right) - t_{\frac{\alpha}{2};n-2} s(y) \le y^* \le \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*\right) + t_{\frac{\alpha}{2};n-2} s(y)$$

$$s(y) = s_e\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(x^* - \bar{x}\right)^2}{SS_{xx}}}$$

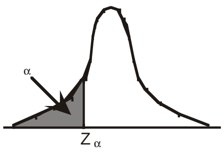
Intervallo di previsione come variabile:

$$\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*\right) - t_{\frac{\alpha}{2};n-2} s(y) \le y^* \le \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*\right) + t_{\frac{\alpha}{2};n-2} s(y)$$

$$s(y) = s_e\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(x^* - \bar{x}\right)^2}{SS_{xx}}}$$

Modello di autoregressione $y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + e_t$

Analisi del trend $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + e_t$



Area sottesa alla curva normale standardizzata

	2ª cifra									
1ª cifra	0 00	0 01	0 02	0 03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0 09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.6900	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7518	0.7549
0.7	0.7580	0.7612	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99856	0.99861
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99916	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989	0.99989	0.99989	0.99990	0.99990

N.B. per intervalli asimmetrici si deve cercare all'interno della tavola il valore più prossimo a 1-γ. Ad esempio: γ=2/7=0.286; si cerca 1-0.286=0.7143 che è più vicino a 0.57

Percentili della Normale per test ed intervalli unilaterali

α =Pr(Z≤Zα)	Z_α	α =Pr(Z≤Zα)	Z_α
0.001	-3.0905	0.999	3.0905
0.005	-2.5763	0.995	2.5763
0.01	-2.3268	0.99	2.3268
0.02	-2.0542	0.98	2.0542
0.03	-1.8812	0.97	1.8812
0.04	-1.7511	0.96	1.7511
0.05	-1.6452	0.95	1.6452
0.10	-1.2818	0.90	1.2818
0.15	-1.0365	0.85	1.0365
0.20	-0.8415	0.80	0.8415
0.25	-0.6742	0.75	0.6742
0.30	-0.5241	0.70	0.5241
0.35	-0.3849	0.65	0.3849
0.40	-0.2530	0.60	0.2530
0.45	-0.1254	0.55	0.1254
0.50	0.0000		

Percentili della Normale per test ed intervalli bilaterali

α=Pr(|Z|≥Z_α)	Z_α
0.001	3.2905
0.002	3.0905
0.005	2.8071
0.01	2.5783
0.02	2.3268
0.03	2.1703
0.04	2.0542
0.05	1.9600
0.06	1.8812
0.08	1.7511
0.10	1.6452
0.15	1.4393
0.20	1.2816
0.30	1.0364

Esempio di tabella di numeri casuali

	1	2	3	4
1	53 74 23 99 67	61 32 28 69 84	94 62 67 86 24	98 33 41 19 9S
	63 38 06 86 54	99 00 65 26 94	02 82 90 23 07	79 62 67 80 60
	35 30 58 21 46	06 72 17 10 94	25 21 31 75 96	49 28 24 00 49
	63 43 36 82 69	65 51 18 37 88	61 38 44 12 45	32 92 85 88 65
	98 25 37 55 26	01 91 82 81 46	74 71 12 94 97	24 02 71 37 07
2	02 63 21 17 69	71 50 80 89 56	38 15 70 11 48	43 40 45 86 98
	64 55 22 21 82	48 22 28 06 00	61 54 13 43 91	82 78 12 23 29
	85 07 26 13 89	01 10 07 82 04	59 63 69 36 03	69 11 15 83 80
	58 54 16 24 15	51 54 44 82 00	62 61 65 04 69	38 18 65 18 97
	34 85 27 84 87	61 48 64 56 26	90 18 48 13 26	37 70 15 42 57
	03 92 18 27 46	57 99 16 96 56	30 33 72 85 22	84 64 38 56 98
3	62 95 30 27 59	37 75 41 66 48	86 97 80 61 45	23 53 04 01 63
	08 45 93 15 22	60 21 75 46 91	98 77 27 85 42	28 88 61 08 84
	07 08 55 18 40	45 44 75 13 90	24 94 96 61 02	57 55 66 83 15
	01 85 89 95 66	51 10 19 34 88	15 84 97 19 75	12 76 39 43 78
	72 84 71 14 35	19 11 58 49 26	50 11 17 17 76	86 31 57 20 18
4	88 78 28 16 84	13 52 53 94 53	75 45 69 30 96	73 89 65 70 31
	45 17 75 65 57	28 40 19 72 12	25 12 74 75 67	60 40 60 81 19
	96 76 28 12 54	22 01 11 94 25	71 96 16 16 88	68 64 36 74 45
	43 31 67 72 30	24 02 94 08 63	38 32 36 66 02	69 36 38 25 39
5	50 44 66 44 21	66 06 58 05 62	68 15 54 35 02	42 35 48 96 32
	22 66 22 15 86	26 63 75 41 99	58 42 36 72 24	58 37 52 18 51
	96 24 40 14 51	23 22 30 88 57	95 67 47 29 83	94 69 40 06 07
	31 73 91 61 19	60 20 72 93 48	98 57 07 23 69	65 95 39 69 58
	78 60 73 99 84	43 89 94 36 45	56 69 47 07 41	90 22 91 07 12
6	84 37 90 61 56	70 10 23 98 05	85 11 34 76 60	76 48 45 34 60
	36 67 10 08 23	98 93 35 08 86	99 29 76 29 81	33 34 91 58 93
	07 28 59 07 48	89 64 58 89 75	83 85 62 27 89	30 14 78 56 27
	10 15 83 87 60	79 24 31 66 56	21 48 24 06 93	91 98 94 05 49
	55 19 68 97 65	03 73 52 16 56	00 53 55 90 27	33 42 29 38 87
7	53 81 29 13 39	35 01 20 71 34	62 33 74 82 14	53 73 19 09 03
	51 86 32 68 92	33 98 74 66 99	40 14 71 94 58	45 94 19 38 81
	35 91 70 29 13	80 03 54 07 27	96 94 78 32 66	50 95 52 74 33
	37 71 67 95 13	20 02 44 95 94	64 85 04 05 72	01 32 90 76 14
	93 66 13 83 27	92 79 64 64 72	28 54 96 53 84	48 14 52 98 94
	02 96 08 45 65	13 05 00 41 84	93 07 54 72 59	21 45 57 09 77
8	49 83 43 48 35	82 88 33 69 96	72 36 04 19 76	47 45 15 18 60
	84 60 71 62 46	40 80 81 30 37	34 39 23 05 38	25 15 35 71 30
	18 17 30 88 71	44 91 14 88 47	89 23 30 63 15	56 34 20 47 89
	79 69 10 61 78	71 32 76 95 62	87 00 22 58 40	92 54 01 75 25

Soglie della statistica F al livello dell’1%

	Numeratore														
Den.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	4052.2	4999.3	5403.5	5624.3	5764.0	5859.0	5928.3	5981.0	6022.4	6055.9	6083.4	6106.7	6125.8	6143.0	6157.0
2	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.41	99.42	99.42	99.43	99.43
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05	26.98	26.92	26.87
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.45	14.37	14.31	14.25	14.20
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.96	9.89	9.82	9.77	9.72
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	7.66	7.60	7.56
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47	6.41	6.36	6.31
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67	5.61	5.56	5.52
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	5.05	5.01	4.96
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71	4.65	4.60	4.56
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	4.34	4.29	4.25
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	4.10	4.05	4.01
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96	3.91	3.86	3.82
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80	3.75	3.70	3.66
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	3.61	3.56	3.52
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55	3.50	3.45	3.41
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46	3.40	3.35	3.31
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37	3.32	3.27	3.23
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.24	3.19	3.15
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.09
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17	3.12	3.07	3.03
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	3.07	3.02	2.98
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07	3.02	2.97	2.93
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	2.98	2.93	2.89
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	3.06	2.99	2.94	2.89	2.85
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96	2.90	2.86	2.81
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.99	2.93	2.87	2.82	2.78
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90	2.84	2.79	2.75
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.93	2.87	2.81	2.77	2.73
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84	2.79	2.74	2.70
31	7.53	5.36	4.48	3.99	3.67	3.45	3.28	3.15	3.04	2.96	2.88	2.82	2.77	2.72	2.68
32	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.02	2.93	2.86	2.80	2.74	2.70	2.65
33	7.47	5.31	4.44	3.95	3.63	3.41	3.24	3.11	3.00	2.91	2.84	2.78	2.72	2.68	2.63
34	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98	2.89	2.82	2.76	2.70	2.66	2.61
35	7.42	5.27	4.40	3.91	3.59	3.37	3.20	3.07	2.96	2.88	2.80	2.74	2.69	2.64	2.60
36	7.40	5.25	4.38	3.89	3.57	3.35	3.18	3.05	2.95	2.86	2.79	2.72	2.67	2.62	2.58
37	7.37	5.23	4.36	3.87	3.56	3.33	3.17	3.04	2.93	2.84	2.77	2.71	2.65	2.61	2.56
38	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.92	2.83	2.75	2.69	2.64	2.59	2.55
39	7.33	5.19	4.33	3.84	3.53	3.30	3.14	3.01	2.90	2.81	2.74	2.68	2.62	2.58	2.54
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66	2.61	2.56	2.52
41	7.30	5.16	4.30	3.81	3.50	3.28	3.11	2.98	2.87	2.79	2.71	2.65	2.60	2.55	2.51
42	7.28	5.15	4.29	3.80	3.49	3.27	3.10	2.97	2.86	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54	2.50
43	7.26	5.14	4.27	3.79	3.48	3.25	3.09	2.96	2.85	2.76	2.69	2.63	2.57	2.53	2.49
44	7.25	5.12	4.26	3.78	3.47	3.24	3.08	2.95	2.84	2.75	2.68	2.62	2.56	2.52	2.47
45	7.23	5.11	4.25	3.77	3.45	3.23	3.07	2.94	2.83	2.74	2.67	2.61	2.55	2.51	2.46
46	7.22	5.10	4.24	3.76	3.44	3.22	3.06	2.93	2.82	2.73	2.66	2.60	2.54	2.50	2.45
47	7.21	5.09	4.23	3.75	3.43	3.21	3.05	2.92	2.81	2.72	2.65	2.59	2.53	2.49	2.44
48	7.19	5.08	4.22	3.74	3.43	3.20	3.04	2.91	2.80	2.71	2.64	2.58	2.53	2.48	2.44
49	7.18	5.07	4.21	3.73	3.42	3.19	3.03	2.90	2.79	2.71	2.63	2.57	2.52	2.47	2.43
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.63	2.56	2.51	2.46	2.42
51	7.16	5.05	4.19	3.71	3.40	3.18	3.01	2.88	2.78	2.69	2.62	2.55	2.50	2.45	2.41
52	7.15	5.04	4.18	3.70	3.39	3.17	3.00	2.87	2.77	2.68	2.61	2.55	2.49	2.45	2.40
53	7.14	5.03	4.17	3.70	3.38	3.16	3.00	2.87	2.76	2.68	2.60	2.54	2.49	2.44	2.40
54	7.13	5.02	4.17	3.69	3.38	3.16	2.99	2.86	2.76	2.67	2.60	2.53	2.48	2.43	2.39
55	7.12	5.01	4.16	3.68	3.37	3.15	2.98	2.85	2.75	2.66	2.59	2.53	2.47	2.42	2.38
56	7.11	5.01	4.15	3.67	3.36	3.14	2.98	2.85	2.74	2.66	2.58	2.52	2.47	2.42	2.38
57	7.10	5.00	4.15	3.67	3.36	3.14	2.97	2.84	2.74	2.65	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37
58	7.09	4.99	4.14	3.66	3.35	3.13	2.96	2.83	2.73	2.64	2.57	2.51	2.45	2.41	2.36
59	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.96	2.83	2.72	2.64	2.56	2.50	2.45	2.40	2.36
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50	2.44	2.39	2.35

Percentili della distribuzione t-Student

Gradi di libertà	0.0001	0.0005	0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
1	6370.544	1273.155	636.578	127.321	63.656	25.452	12.706	10.579	9.058	7.916	7.026	6.314
2	100.136	44.703	31.600	14.089	9.925	6.205	4.303	3.896	3.578	3.320	3.104	2.920
3	28.014	16.326	12.924	7.453	5.841	4.177	3.182	2.951	2.763	2.605	2.471	2.353
4	15.534	10.305	8.610	5.598	4.604	3.495	2.776	2.601	2.456	2.333	2.226	2.132
5	11.176	7.976	6.869	4.773	4.032	3.163	2.571	2.422	2.297	2.191	2.098	2.015
6	9.080	6.788	5.959	4.317	3.707	2.969	2.447	2.313	2.201	2.104	2.019	1.943
7	7.888	6.082	5.408	4.029	3.499	2.841	2.365	2.241	2.136	2.046	1.966	1.895
8	7.120	5.617	5.041	3.833	3.355	2.752	2.306	2.189	2.090	2.004	1.928	1.860
9	6.594	5.291	4.781	3.690	3.250	2.685	2.262	2.150	2.055	1.973	1.899	1.833
10	6.212	5.049	4.587	3.581	3.169	2.634	2.228	2.120	2.028	1.948	1.877	1.812
11	5.923	4.863	4.437	3.497	3.106	2.593	2.201	2.096	2.007	1.928	1.859	1.796
12	5.695	4.717	4.318	3.428	3.055	2.560	2.179	2.076	1.989	1.912	1.844	1.782
13	5.513	4.597	4.221	3.372	3.012	2.533	2.160	2.060	1.974	1.899	1.832	1.771
14	5.364	4.499	4.140	3.326	2.977	2.510	2.145	2.046	1.962	1.887	1.821	1.761
15	5.239	4.417	4.073	3.286	2.947	2.490	2.131	2.034	1.951	1.878	1.812	1.753
16	5.134	4.346	4.015	3.252	2.921	2.473	2.120	2.024	1.942	1.869	1.805	1.746
17	5.043	4.286	3.965	3.222	2.898	2.458	2.110	2.015	1.934	1.862	1.798	1.740
18	4.966	4.233	3.922	3.197	2.878	2.445	2.101	2.007	1.926	1.855	1.792	1.734
19	4.899	4.187	3.883	3.174	2.861	2.433	2.093	2.000	1.920	1.850	1.786	1.729
20	4.838	4.146	3.850	3.153	2.845	2.423	2.086	1.994	1.914	1.844	1.782	1.725
21	4.785	4.109	3.819	3.135	2.831	2.414	2.080	1.988	1.909	1.840	1.777	1.721
22	4.736	4.077	3.792	3.119	2.819	2.405	2.074	1.983	1.905	1.835	1.773	1.717
23	4.694	4.047	3.768	3.104	2.807	2.398	2.069	1.978	1.900	1.832	1.770	1.714
24	4.654	4.021	3.745	3.091	2.797	2.391	2.064	1.974	1.896	1.828	1.767	1.711
25	4.619	3.997	3.725	3.078	2.787	2.385	2.060	1.970	1.893	1.825	1.764	1.708
26	4.587	3.974	3.707	3.067	2.779	2.379	2.056	1.967	1.890	1.822	1.761	1.706
27	4.556	3.954	3.689	3.057	2.771	2.373	2.052	1.963	1.887	1.819	1.758	1.703
28	4.531	3.935	3.674	3.047	2.763	2.368	2.048	1.960	1.884	1.817	1.756	1.701
29	4.505	3.918	3.660	3.038	2.756	2.364	2.045	1.957	1.881	1.814	1.754	1.699
30	4.482	3.902	3.646	3.030	2.750	2.360	2.042	1.955	1.879	1.812	1.752	1.697
31	4.461	3.887	3.633	3.022	2.744	2.356	2.040	1.952	1.877	1.810	1.750	1.696
32	4.440	3.873	3.622	3.015	2.738	2.352	2.037	1.950	1.875	1.808	1.748	1.694
33	4.421	3.860	3.611	3.008	2.733	2.348	2.035	1.948	1.873	1.806	1.747	1.692
34	4.405	3.848	3.601	3.002	2.728	2.345	2.032	1.946	1.871	1.805	1.745	1.691
35	4.389	3.836	3.591	2.996	2.724	2.342	2.030	1.944	1.869	1.803	1.744	1.690
36	4.373	3.825	3.582	2.990	2.719	2.339	2.028	1.942	1.867	1.802	1.742	1.688
37	4.359	3.816	3.574	2.985	2.715	2.336	2.026	1.940	1.866	1.800	1.741	1.687
38	4.345	3.806	3.566	2.980	2.712	2.334	2.024	1.939	1.864	1.799	1.740	1.686
39	4.333	3.797	3.558	2.976	2.708	2.331	2.023	1.937	1.863	1.798	1.739	1.685
40	4.321	3.788	3.551	2.971	2.704	2.329	2.021	1.936	1.862	1.796	1.737	1.684
41	4.310	3.780	3.544	2.967	2.701	2.327	2.020	1.934	1.860	1.795	1.736	1.683
42	4.298	3.773	3.538	2.963	2.698	2.325	2.018	1.933	1.859	1.794	1.735	1.682
43	4.289	3.765	3.532	2.959	2.695	2.323	2.017	1.932	1.858	1.793	1.734	1.681
44	4.278	3.758	3.526	2.956	2.692	2.321	2.015	1.931	1.857	1.792	1.734	1.680
45	4.269	3.752	3.520	2.952	2.690	2.319	2.014	1.929	1.856	1.791	1.733	1.679
46	4.261	3.746	3.515	2.949	2.687	2.317	2.013	1.928	1.855	1.790	1.732	1.679
47	4.251	3.740	3.510	2.946	2.685	2.315	2.012	1.927	1.854	1.789	1.731	1.678
48	4.243	3.734	3.505	2.943	2.682	2.314	2.011	1.926	1.853	1.789	1.730	1.677
49	4.235	3.728	3.500	2.940	2.680	2.312	2.010	1.925	1.852	1.788	1.730	1.677
50	4.228	3.723	3.496	2.937	2.678	2.311	2.009	1.924	1.852	1.787	1.729	1.676
51	4.221	3.718	3.492	2.934	2.676	2.310	2.008	1.924	1.851	1.786	1.728	1.675
52	4.214	3.713	3.488	2.932	2.674	2.308	2.007	1.923	1.850	1.786	1.728	1.675
53	4.207	3.709	3.484	2.929	2.672	2.307	2.006	1.922	1.849	1.785	1.727	1.674
54	4.201	3.704	3.480	2.927	2.670	2.306	2.005	1.921	1.849	1.784	1.726	1.674
55	4.196	3.700	3.476	2.925	2.668	2.304	2.004	1.920	1.848	1.784	1.726	1.673
56	4.190	3.696	3.473	2.923	2.667	2.303	2.003	1.920	1.847	1.783	1.725	1.673
57	4.184	3.692	3.469	2.920	2.665	2.302	2.002	1.919	1.847	1.782	1.725	1.672
58	4.179	3.688	3.466	2.918	2.663	2.301	2.002	1.918	1.846	1.782	1.724	1.672
59	4.173	3.684	3.463	2.916	2.662	2.300	2.001	1.918	1.845	1.781	1.724	1.671
60	4.169	3.681	3.460	2.915	2.660	2.299	2.000	1.917	1.845	1.781	1.723	1.671

N.B. Per intervalli ed ipotesi alternative adoperare $\alpha/2$.

Percentili della distribuzione χ^2 (coda a destra)

Gradi di libertà	0.999	0.995	0.99	0.98	0.975	0.96	0.95	0.94	0.90
1	10.827	7.879	6.635	5.412	5.024	4.218	3.841	3.537	2.706
2	13.815	10.597	9.210	7.824	7.378	6.438	5.991	5.627	4.605
3	16.266	12.838	11.345	9.837	9.348	8.311	7.815	7.407	6.251
4	18.466	14.860	13.277	11.668	11.143	10.026	9.488	9.044	7.779
5	20.515	16.750	15.086	13.388	12.832	11.644	11.070	10.596	9.236
6	22.457	18.548	16.812	15.033	14.449	13.198	12.592	12.090	10.645
7	24.321	20.278	18.475	16.622	16.013	14.703	14.067	13.540	12.017
8	26.124	21.955	20.090	18.168	17.535	16.171	15.507	14.956	13.362
9	27.877	23.589	21.666	19.679	19.023	17.608	16.919	16.346	14.684
10	29.588	25.188	23.209	21.161	20.483	19.021	18.307	17.713	15.987
11	31.264	26.757	24.725	22.618	21.920	20.412	19.675	19.061	17.275
12	32.909	28.300	26.217	24.054	23.337	21.785	21.026	20.393	18.549
13	34.527	29.819	27.688	25.471	24.736	23.142	22.362	21.711	19.812
14	36.124	31.319	29.141	26.873	26.119	24.485	23.685	23.017	21.064
15	37.698	32.801	30.578	28.259	27.488	25.816	24.996	24.311	22.307
16	39.252	34.267	32.000	29.633	28.845	27.136	26.296	25.595	23.542
17	40.791	35.718	33.409	30.995	30.191	28.445	27.587	26.870	24.769
18	42.312	37.156	34.805	32.346	31.526	29.745	28.869	28.137	25.989
19	43.819	38.582	36.191	33.687	32.852	31.037	30.144	29.396	27.204
20	45.314	39.997	37.566	35.020	34.170	32.321	31.410	30.649	28.412
21	46.796	41.401	38.932	36.343	35.479	33.597	32.671	31.895	29.615
22	48.268	42.796	40.289	37.659	36.781	34.867	33.924	33.135	30.813
23	49.728	44.181	41.638	38.968	38.076	36.131	35.172	34.370	32.007
24	51.179	45.558	42.980	40.270	39.364	37.389	36.415	35.599	33.196
25	52.619	46.928	44.314	41.566	40.646	38.642	37.652	36.824	34.382
26	54.051	48.290	45.642	42.856	41.923	39.889	38.885	38.044	35.563
27	55.475	49.645	46.963	44.140	43.195	41.132	40.113	39.259	36.741
28	56.892	50.994	48.278	45.419	44.461	42.370	41.337	40.471	37.916
29	58.301	52.335	49.588	46.693	45.722	43.604	42.557	41.679	39.087
30	59.702	53.672	50.892	47.962	46.979	44.834	43.773	42.883	40.256
31	61.098	55.002	52.191	49.226	48.232	46.059	44.985	44.084	41.422
32	62.487	56.328	53.486	50.487	49.480	47.282	46.194	45.281	42.585
33	63.869	57.648	54.775	51.743	50.725	48.501	47.400	46.476	43.745
34	65.247	58.964	56.061	52.995	51.966	49.716	48.602	47.667	44.903
35	66.619	60.275	57.342	54.244	53.203	50.928	49.802	48.856	46.059
36	67.985	61.581	58.619	55.489	54.437	52.137	50.998	50.042	47.212
37	69.348	62.883	59.893	56.730	55.668	53.344	52.192	51.225	48.363
38	70.704	64.181	61.162	57.969	56.895	54.547	53.384	52.406	49.513
39	72.055	65.475	62.428	59.204	58.120	55.748	54.572	53.584	50.660
40	73.403	66.766	63.691	60.436	59.342	56.946	55.758	54.761	51.805
41	74.744	68.053	64.950	61.665	60.561	58.141	56.942	55.934	52.949
42	76.084	69.336	66.206	62.892	61.777	59.335	58.124	57.106	54.090
43	77.418	70.616	67.459	64.116	62.990	60.526	59.304	58.276	55.230
44	78.749	71.892	68.710	65.337	64.201	61.714	60.481	59.444	56.369
45	80.078	73.166	69.957	66.555	65.410	62.901	61.656	60.609	57.505
46	81.400	74.437	71.201	67.771	66.616	64.085	62.830	61.773	58.641
47	82.720	75.704	72.443	68.985	67.821	65.268	64.001	62.936	59.774
48	84.037	76.969	73.683	70.197	69.023	66.448	65.171	64.096	60.907
49	85.350	78.231	74.919	71.406	70.222	67.627	66.339	65.255	62.038
50	86.660	79.490	76.154	72.613	71.420	68.804	67.505	66.412	63.167

Percentili della distribuzione χ^2 (coda a sinistra)

Gradi di libertà	0.001	0.005	0.01	0.02	0.025	0.04	0.05	0.06	0.10
1	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.003	0.004	0.006	0.016
2	0.002	0.010	0.020	0.040	0.051	0.082	0.103	0.124	0.211
3	0.024	0.072	0.115	0.185	0.216	0.300	0.352	0.401	0.584
4	0.091	0.207	0.297	0.429	0.484	0.627	0.711	0.788	1.064
5	0.210	0.412	0.554	0.752	0.831	1.031	1.145	1.250	1.610
6	0.381	0.676	0.872	1.134	1.237	1.492	1.635	1.765	2.204
7	0.599	0.989	1.239	1.564	1.690	1.997	2.167	2.320	2.833
8	0.857	1.344	1.647	2.032	2.180	2.537	2.733	2.908	3.490
9	1.152	1.735	2.088	2.532	2.700	3.105	3.325	3.521	4.168
10	1.479	2.156	2.558	3.059	3.247	3.697	3.940	4.157	4.865
11	1.834	2.603	3.053	3.609	3.816	4.309	4.575	4.810	5.578
12	2.214	3.074	3.571	4.178	4.404	4.939	5.226	5.480	6.304
13	2.617	3.565	4.107	4.765	5.009	5.584	5.892	6.163	7.041
14	3.041	4.075	4.660	5.368	5.629	6.243	6.571	6.859	7.790
15	3.483	4.601	5.229	5.985	6.262	6.914	7.261	7.566	8.547
16	3.942	5.142	5.812	6.614	6.908	7.596	7.962	8.283	9.312
17	4.416	5.697	6.408	7.255	7.564	8.288	8.672	9.008	10.085
18	4.905	6.265	7.015	7.906	8.231	8.989	9.390	9.742	10.865
19	5.407	6.844	7.633	8.567	8.907	9.698	10.117	10.483	11.651
20	5.921	7.434	8.260	9.237	9.591	10.415	10.851	11.231	12.443
21	6.447	8.034	8.897	9.915	10.283	11.140	11.591	11.986	13.240
22	6.983	8.643	9.542	10.600	10.982	11.870	12.338	12.746	14.041
23	7.529	9.260	10.196	11.293	11.689	12.607	13.091	13.512	14.848
24	8.085	9.886	10.856	11.992	12.401	13.350	13.848	14.283	15.659
25	8.649	10.520	11.524	12.697	13.120	14.098	14.611	15.059	16.473
26	9.222	11.160	12.198	13.409	13.844	14.851	15.379	15.839	17.292
27	9.803	11.808	12.878	14.125	14.573	15.609	16.151	16.624	18.114
28	10.391	12.461	13.565	14.847	15.308	16.371	16.928	17.412	18.939
29	10.986	13.121	14.256	15.574	16.047	17.138	17.708	18.204	19.768
30	11.588	13.787	14.953	16.306	16.791	17.908	18.493	19.000	20.599
31	12.196	14.458	15.655	17.042	17.539	18.683	19.281	19.800	21.434
32	12.810	15.134	16.362	17.783	18.291	19.461	20.072	20.602	22.271
33	13.431	15.815	17.073	18.527	19.047	20.242	20.867	21.408	23.110
34	14.057	16.501	17.789	19.275	19.806	21.027	21.664	22.217	23.952
35	14.688	17.192	18.509	20.027	20.569	21.815	22.465	23.028	24.797
36	15.324	17.887	19.233	20.783	21.336	22.607	23.269	23.843	25.643
37	15.965	18.586	19.960	21.542	22.106	23.401	24.075	24.659	26.492
38	16.611	19.289	20.691	22.304	22.878	24.197	24.884	25.479	27.343
39	17.261	19.996	21.426	23.069	23.654	24.997	25.695	26.301	28.196
40	17.917	20.707	22.164	23.838	24.433	25.799	26.509	27.125	29.051
41	18.576	21.421	22.906	24.609	25.215	26.603	27.326	27.951	29.907
42	19.238	22.138	23.650	25.383	25.999	27.410	28.144	28.779	30.765
43	19.905	22.860	24.398	26.159	26.785	28.220	28.965	29.610	31.625
44	20.576	23.584	25.148	26.939	27.575	29.031	29.787	30.442	32.487
45	21.251	24.311	25.901	27.720	28.366	29.845	30.612	31.276	33.350
46	21.929	25.041	26.657	28.504	29.160	30.660	31.439	32.112	34.215
47	22.610	25.775	27.416	29.291	29.956	31.478	32.268	32.950	35.081
48	23.294	26.511	28.177	30.080	30.754	32.298	33.098	33.790	35.949
49	23.983	27.249	28.941	30.871	31.555	33.119	33.930	34.631	36.818
50	24.674	27.991	29.707	31.664	32.357	33.943	34.764	35.474	37.689