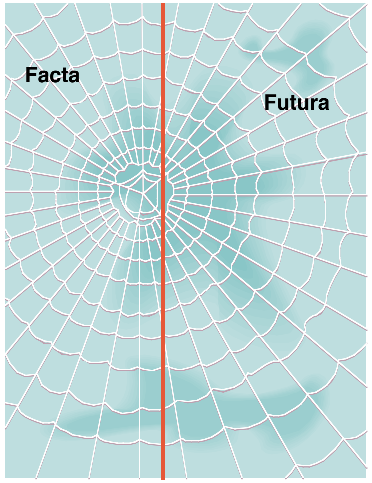
Concetto di previsione

Immagino il sistema degli eventi, passati e futuri, come una ragnatela.

Se la si tocca in un punto ci saranno reazioni moltiplicative in tutti i fili



Istante della previsione

Il sistema degli eventi futuri è visto come un complemento di quello del passato.

Attraverso la conoscenza delle reazioni in questo è possibile stabilire le reazioni sui fili del futuro

Possibilità e limiti delle previsioni

Distinguiamo gli eventi in due tipi

- **FACTA - avvenimenti che si collocano nel passato**
- **FUTURA- avvenimenti che si collocano nell'avvenire**

Il loro punto di incontro è quell'istante brevissimo in cui la delusione cede il passo alla speranza

In quanto soggetti agenti possiamo intervenire solo sui FUTURA: se qualcosa non è ancora accaduto è almeno concepibile l'idea di agire per modificarne il Corso.

D'altra parte, è possibile conoscere e descrivere solo i FACTA. Ciò che sarà può solo essere prefigurato: profezie, congetture, prospettive, proiezioni, etc.

Concetto di previsione/2

Dicesi PREVISIONE la descrizione di eventi futuri che si basa sulla conoscenza di eventi passati e su di un insieme di ipotesi

Quindi, la previsione altro non è che l'estensione ai FUTURA delle regolarità accertate per i FACTA

Su quali basi logiche si fonda tale estensione? Lo schema è riconducibile alla induzione per enumerazione

Dato che per "n" volte si è trovato che gli "α" sono dei "β" e che in nessuno di questi casi si è trovato che un "β" non fosse un "α", le due affermazioni:

1) Il prossimo "α" sarà anche un "β"
2) Tutti gli "α" sono anche dei "β"

diventano sempre più verosimili man mano che "n" si avvicina all'infinito

Concetto di previsione/3

Il principio dell'induzione non può essere generalizato perché si rivela talvolta falso. Possiamo però seguirlo in questo senso:

L'aver osservato che certi eventi si sono manifestati finora in una data maniera non autorizza a dedurne che essi continueranno a presentarsi nel medesimo modo in futuro.

Nulla però vieta di pensare che, fra tutte le possibili manifestazioni, la più plausibile sia proprio la ripetizione nei modi e nelle forme consuete.

Anzi, tale metodo della PREVISIONE ANNUNCIATA, è il criterio tipico adottato nelle scienze empiriche:

In presenza di certe condizioni si prevede il verificarsi di un evento. Se questo succede, si ha una conferma, ma sono richiesti ulteriori accertamenti.

Più accertamenti arrivano, più sicuri siamo della previsione

Le previsioni nelle scienze sociali

Esistono eventi caratterizzati da molta stabilità nel loro manifestarsi, ma ne esistono altri assai più mutevoli.

- I primi sono frequenti nelle SCIENZE FISICHE
- I secondi sono frequenti nelle SCIENZE SOCIALI

La loro prevedibilità è molto ineguale:

E' retorico domandarsi se un oggetto, lasciato libero, cadrà oppure rimarrà sospeso nell'aria in presenza di gravità.

L'idea invece che un aumento di prezzo induca una contrazione della domanda è solo plausibile.

Le regolarità empiriche riscontrate nelle scienze sociali sono più imprecise e vaghe che nelle scienze fisiche.

In molti contesti sono talmente incerte da far dubitare persino della loro utilità

Le previsioni economico-aziendali

Sono distinte per il tempo (con molta incertezza sui limiti)

- *A brevissimo termine (fino a ad un mese)*
  previsioni JIT (just-in-time)

- *A breve termine (fino ad un anno)*
  Hanno un ruolo di primo piano i fattori accidentali o erratici:scioperi, leggi speciali, catastrofi naturali, etc. oppure stagionali

- *A medio termine (da 1 a 5-10 anni)*
  Il ruolo centrale è svolto dalle fasi di espansione e contrazione che coinvolgono più settori di attività

- *A lungo termine (dai 10 anni in poi)*
  Dominano i fattori demografici, le modifiche strutturali del sistema economico, l'evoluzione tecnologica, il sistema dei valori, etc.

Metodi diversi per tempi diversi

- Per il MEDIO-LUNGO TERMINE la previsione non può limitarsi alla mera estensione del passato, ma comprendere varie alternative anche accompagnate da considerazioni qualitative (scenari).

- Per il BREVE TERMINE la previsione è legata all'inerzia intrinseca in ogni evoluzione dinamica e che impedisce repentini cambiamenti. In questo caso le previsioni si estendono per più periodi, ma non troppi.

- Per il BREVISSIMO TERMINE la previsione è condizionata dalla situazione presente che si ritiene senz’altro continuata nell'immediato futuro. In genere basta traslare la previsione di un solo periodo

Diagnosi congiunturali

C'è una "Terra di nessuno" che divide l'immaginazione creativa delle tecniche qualitative ed i modelli matematici delle tecniche quantitative

Analisi e conoscenza dell'evoluzione passata sono essenziali, ma più per individuare le relazioni fra variabili e regolarità di comportamento che non come fattore di predizione del futuro.

In molte analisi economiche l'interesse si accentra su di un periodo tra i 12 e 24 mesi.

Tale orizzonte è abbastanza ampio per dare spazio ad elementi decisionali, ma ancora breve perché si possa sentire l'influenza del passato più recente.

Qui trovano largo impiego le tecniche di decomposizione delle serie storiche e altri metodi di previsione

Previsione Naive/1

Il metodo di previsione più semplice, che non costa nulla e che tutti possono applicare è il seguente

$$\hat{y}_{n+1} = ky_n \quad \text{dove} \begin{cases} y_n = \text{ultimo valore conosciuto} \\ k = \text{fattore di proporzionalità} \\ \hat{y}_{n+1} = \text{valore previsto nel prossimo periodo} \end{cases}$$

Se k=1 allora la previsione coincide con l'ultimo valore noto.
Altre scelte sono

$$k = \left(\frac{y_n}{y_1}\right)^{\frac{1}{n}}; \qquad k = \frac{\sum_{t=2}^{n} \frac{y_i}{y_{i-1}}}{n-1}$$

Il primo usa il tasso di crescita (composto) della serie.

Il secondo la variazione relativa media da un periodo all'altro

La previsione NAIVE/1 ha pochissima memoria del passato ed è inutile per dati a forte stagionalità. Funziona bene quando c'è un marcato trend

Esempio

Per i seguenti dati si ha:

Anno	Trim	t	yt
1986	1	1	10.8
	2	2	9.8
	3	3	9.4
	4	4	9.8
1987	1	5	9.9
	2	6	9
	3	7	8.6
	4	8	9.4
1988	1	9	9.7
	2	10	9.1
	3	11	9
	4	12	9.8
1989	1	13	9.8
	2	14	9
	3	15	8.6
	4	16	9.1

Previsione per il primo trimestre '90

$$k = 1 \Rightarrow \hat{y}_{17} = 9.100$$
$$k = 0.9856 \ (\text{V\%Media}) \Rightarrow \hat{y}_{17} = 8.969$$
$$k = 0.9893 \ (\text{tasso}) \Rightarrow \hat{y}_{17} = 9.003$$

Tutte le previsioni sembrano sottostimare il valore per il primo trimestre

Previsione naive/2

La presenza di stagionalità rende scadente il metodo Naive/1 che ignora le influenze stagionali.

La stagionalità può essere inclusa con lo schema:

$$\hat{y}_{n+1} = ky_{n+1-s}; \quad s \text{ è il periodo della stagionalità}$$

il valore previsto è proporzionale al valore stagionale precedente.

Le determinazioni di "k" seguono le serie parziali costituite dal succedersi dei valori stagionali

1986	1	10.8
1987	5	9.9
1988	9	9.7
1989	13	9.8

$$k = 1 \Rightarrow \hat{y}_{17} = 9.80$$
$$k = 1.03(\text{V\%}) \Rightarrow \hat{y}_{17} = 10.13$$
$$k = 0.68(\text{tasso}) \Rightarrow \hat{y}_{17} = 6.64$$

Le cose sembrano andare meglio, ma il metodo è troppo fragile per essere realmente affidabile

Metodo della media

i metodi naive sfruttano poco le informazioni ultime della serie che in fondo contengono le informazioni più valide per la previsione futura

Un metodo, analogo è il metodo della media

DATI NON STAGIONALI
$$\hat{y}_{n+1} = \frac{y_n + y_{n-1} + y_{n-2} + \ldots + y_{n-m+1}}{m}$$

dove "m" è il numero di termini: solitamente da 3 a 6

DATI STAGIONALI
$$\hat{y}_{n+1} = \frac{y_{n-s+1} + y_{n-2s+1} + \ldots + y_{n-as+1}}{a}$$

dove "s" è la stagionalità ed "a" il numero di anni.

Esempio

1986	1	10.8
1987	5	9.9
1988	9	9.7
1989	13	9.8

$$\hat{y}_{17} = \frac{y_{13} + y_9 + y_5 + y_1}{4} = \frac{10.9 + 9.9 + 9.7 + 9.8}{4} = 10.075$$

E' anche possibile usare medie ponderate invece di medie semplici. Così si possono pesare di più i valori recenti e meno i valori passati

Ad esempio: $$\hat{y}_{17} = \frac{16y_{13} + 8y_9 + 4y_5 + 2y_1}{30} = 9.85$$

Da notare che il valore previsto in base alle medie non potrà mai andare oltre il valore più piccolo o più grande tra quelli già osservati .

Si possono però usare i pesi negativi per aggirare l'ostacolo.

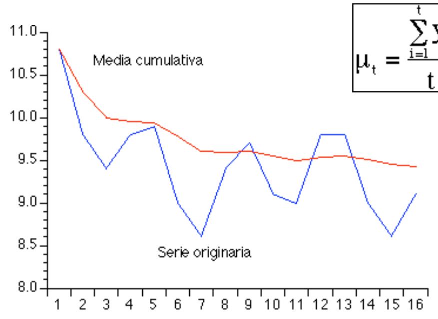
Metodo della media cumulativa

A partire dal primo termine si calcola una media che include via via un numero crescente di termini:

Anno	Seq.	Valore	M.Cum.
1986	1	10.8	10.80
	2	9.8	10.30
	3	9.4	10.00
	4	9.8	9.95
1987	5	9.9	9.94
	6	9	9.78
	7	8.6	9.61
	8	9.4	9.59
1988	9	9.7	9.60
	10	9.1	9.55
	11	9	9.50
	12	9.8	9.53
1989	13	9.8	9.55
	14	9	9.51
	15	8.6	9.45
	16	9.1	9.43

La previsione è data dagli ultimi tre termini nella progressione delle medie: (9.55+9.60+9.94)/3=9.7

$$\mu_t = \frac{\sum_{i=1}^{t} y_i}{t}$$

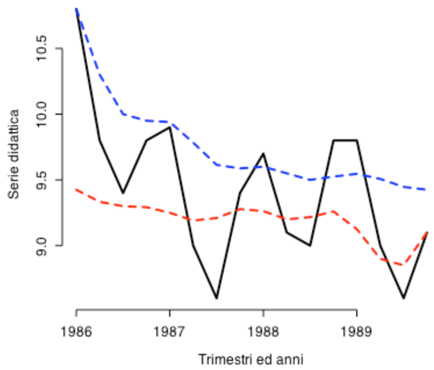


Questa tecnica ha il difetto di generare medie con termini non comparabili, ma tende a ripulire l'andamento della serie e ciò la rende apprezzabile per previsioni a corto raggio.

Metodo della media retrocumulata

A partire dall'ultimo termine si calcola una media che include via via un numero crescente di termini fino ad arrivare al primo:

	Qtr1	Qtr2	Qtr3	Qtr4
1986	9.425000	9.333333	9.300000	9.292308
1987	9.250000	9.190909	9.210000	9.277778
1988	9.262500	9.200000	9.216667	9.260000
1989	9.125000	8.900000	8.850000	9.100000



Anche in questo caso possiamo usare la media degli ultimi tre termini nella progressione:

(9.25+9.26+9.12)/3=9.21

La serie rossa (retrocumulata) sembra più stabile della serie blu (cumulata).

Questa tecnica da più peso ai termini recenti che compaiono più spesso nel calcolo delle medie retrocumulate.

Teoria del metodo della media

Si pensa che i dati siano generati dal seguente meccanismo

$$y_t = \beta + e_t \qquad con \quad E(e_t) = 0, \quad E(e_t^2) = \sigma^2, \quad E(e_t e_{t-1}) = 0$$

Dove β è costante e gli e_t formano una sequenza di errori non osservabili, a media nulla, incorrelati e con varianza costante.

Se β fosse noto, il valore che minimizza l'errore quadratico medio della previsione nel periodo (n+r) sarebbe

$$y_{n+r} = \beta + e_{n+r} \Rightarrow \hat{y}(r) = \beta \qquad E\left[y_{n+r} - \hat{y}(r)\right]^2$$

La previsione è non distorta nel senso che ha media nulla. Inoltre ha varianza costante

$$E\left[y_{n+r} - \hat{y}(r)\right] = E\left[\beta + e_{n+r} - \beta\right] = E\left[e_{n+r}\right] = 0$$

$$E\left[y_{n+r} - \hat{y}(r)\right]^2 = E\left[\beta + e_{n+r} - \beta\right]^2 = E\left[e_{n+r}\right]^2 = \sigma^2$$

Teoria del metodo della media/2

Se β è incognito occorre stimarlo con i minimi quadrati. Ciò implica

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \Rightarrow \hat{y}(r) = \hat{\beta}$$

Poiché il livello è costante, ogni dato contribuisce con lo stesso peso (1/n) a formare la previsione

che corrisponde al metodo della media (se la serie è stagionale occorre calcolare una media per ogni sottoperiodo).

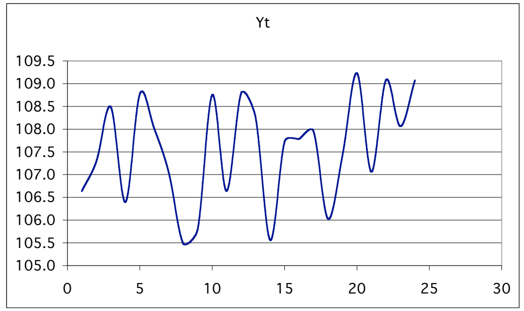
La previsione è la stessa per ogni periodo futuro. L'intervallo di confidenza è

$$\hat{\beta} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\hat{\sigma}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)},\ \hat{\beta} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\hat{\sigma}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)};\quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \hat{\beta}\right)}{n-1}}$$

α è il livello di confidenza e $t_{\alpha/2,n-1}$ è il quantile della t-Student corrispondente al livello (1-α)

Esempio

t	Yt
1	106.64
2	107.29
3	108.49
4	106.39
5	108.77
6	108.01
7	107.04
8	105.49
9	105.80
10	108.75
11	106.64
12	108.79
13	108.26
14	105.56
15	107.72
16	107.78
17	107.95
18	106.03
19	107.43
20	109.23
21	107.06
22	109.08
23	108.06
24	109.07



Il 99% degli intervalli così costruiti contiene il valore previsto

All'aumentare del livello di confidenza, la previsione diventa più attendibile, ma meno precisa.

$$\hat{\beta} = 107.56 \Rightarrow \hat{\sigma}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1.16$$

$$99\% : 107.56 - 3.10 * 1.16,\quad 107.56 + 3.10 * 1.16 \Rightarrow 103.96, 111.15$$

$$95\% : 107.56 - 2.81 * 1.16,\quad 107.56 + 2.81 * 1.16 \Rightarrow 104.31, 110.81$$

Aggiornamento del previsore

Ci troviamo al tempo n+1 ed effettuiamo una previsione di r periodi

La previsione al periodo (n +1) per r periodi in avanti è la media ponderata della previsione per Il periodo (n +1) già effettuata al periodo n ed il dato acquisito al periodo (n+1)

$$\hat{y}_{n+1}(r) = \frac{\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_n + y_{n+1}\right)}{n+1} = \frac{\left[y_{n+1} + n\hat{y}_n(r)\right]}{n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{n+1}\right) y_{n+1} + \left(\frac{n}{n+1}\right)\hat{y}_n(r)$$

Un'angolatura alternativa è la seguente:

$$\hat{y}_{n+1}(r) = \frac{\left[y_{n+1} - \hat{y}_n(r) + \hat{y}_n(r) + n\hat{y}_n(r)\right]}{n+1} = \frac{\left[y_{n+1} - \hat{y}_n(r) + (n+1)\hat{y}_n(r)\right]}{n+1}$$

$$= \hat{y}_n(r) + \frac{\left[y_{n+1} - \hat{y}_n(r)\right]}{n+1}$$

La previsione dal periodo (n+1) per gli r periodi in avanti è pari alla previsione già effettuata al periodo n corretta per una frazione fissa dell'errore che si è verificato al periodo (n+1)

Livellamento esponenziale
(No trend - No seasonality)

I metodi di livellamento esponenziale ES (exponential smoothing) sono nati negli nel 1950 e diventati subito popolari perché danno stime affidabili con pochi dati.

La previsione per il prossimo periodo è data dalla previsione per il periodo corrente più un aggiustamento proporzionale all'errore già fatto

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha\left(y_t - \hat{y}_t\right)$$

dove "α" è il fattore di correzione (si ipotizza che $0 < \alpha < 1$)

All'avvicinarsi di "α" ad "1" aumenta l'incidenza del fattore di correzione. Se α tende a zero l'errore di previsione perde gradualmente la sua importanza.

Se α=1 il metodo ES coincide con il metodo naive per k=1

Livellamento esponenziale/2

Il valore prossimo previsto è una media ponderata tra il valore già previsto ed il valore certo del periodo precedente. Infatti:

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha y_t - \alpha \hat{y}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_t$$

Se "α" tende a zero si riduce l'incidenza del valore passato ed aumenta quella della previsione precedente (processo AUTOADATTIVO).

L'ipotesi di serie storica a media costante comporta che tutti i valori diano lo stesso contributo alla formazione della previsione corrente.

Tale ipotesi è spesso indifendibile e conviene passare ad un modello in cui la media possa variare nel tempo.

Livellamento esponenziale/3

C'è però un'altra interpretazione dell'ES che è molto illuminante

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\left[\alpha y_{t-1} + (1-\alpha)\left[\alpha y_{t-2} + (1-\alpha)[\ldots]\right]\right]$$

In generale

Per n grande tende a zero

$$\hat{y}_{n+1} = \alpha \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha)^i y_{n+1-i} + (1-\alpha)^n \hat{y}_n$$

il principio è quello della media ponderata: tutti i valori passati della serie contribuiscono al valore futuro, ma non con lo stesso peso.

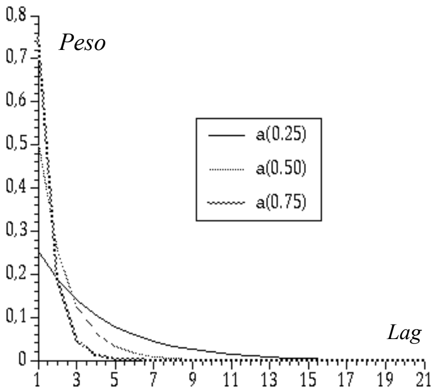
Anzi, i pesi decrescono man mano che il periodo di riferimento si allontana nel passato.

Note sul fattore di correzione

E' da osservare che la somma dei pesi nello schema di ES dipende da "α" e da "n", ma all'aumentare di "n" tende rapidamente ad uno

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(1-\alpha)^i = \alpha \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha)^i = \alpha \left[\frac{1-(1-\alpha)^{n+1}}{1-(1-\alpha)}\right] = 1-(1-\alpha)^{n+1}$$

α	y_t	y_{t-1}	y_{t-2}	y_{t-3}
0.1	0.1	0.09	0.081	0.0729
0.5	0.5	0.25	0.125	0.0625
0.8	0.8	0.16	0.032	0.0064



Più alto è il fattore più rapida è la caduta del contributo dei valori passati e più alto è il peso dei valori più recenti

Scelta ragionata del fattore di correzione

Il fattore "α" influenza l'accuratezza della previsione e deve essere scelto in modo che l'errore di previsione sia il più piccolo possibile.

La scelta di "α" è un processo di prove ed errori: è noto che i valori vicini allo zero livellano la serie di più dei valori prossimi ad uno.

Se la serie è molto oscillatoria si scelgono valori bassi che frenano le reazioni all'aggiornamento dovuto a forze di espansione o di contrazione.

Se invece ha una struttura ben marcata e con poche oscillazioni si opterà per un valore più alto)

In generale si dovrebbe avere:

$$0.01 \leq \alpha \leq 0.30$$

N.B. $\begin{cases} \alpha = 0 & \text{Tutti i valori – remoti o recenti – contano ugualmente} \\ \alpha = 1 & \text{Conta solo l'informazione ultima passata} \end{cases}$

Scelta del fattore di correzione/2

Per ottenere un buon valore di prova di "α" si sfrutta l'analogia con le medie mobili

Un dato inserito in una media mobile di "m" termini ha "età media" pari a

$$\sum_{t=0}^{m-1}\left(\frac{1}{m}\right)t = \frac{m-1}{2}$$

Nel livellamento esponenziale l'età media è

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left[\alpha(1-\alpha)^t\right] = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

Si può scegliere "α" in modo da rendere l'ES simile ad una media mobile di "m" termini. Quindi

$$\frac{m-1}{2} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{m+1}$$

Se m=10 allora sarà α=0.18

Implementazione dell'ES

Il meccanismo ricorsivo $\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_t$

(1) Significa che si prevede un periodo in avanti

Può essere riscritto come $\hat{y}_n(1) = \alpha y_n + (1-\alpha)\hat{y}_{n-1}(1)$

e può attivare la previsione in ogni momento della serie.

Previsione per il 2° periodo basata sul 1°

$$\hat{y}_1(1) = \alpha y_1 + (1-\alpha)\hat{y}_0(1)$$

che viene usato per la previsione successiva

Previsione per il 3° periodo basata sul 2°

$$\hat{y}_2(1) = \alpha y_2 + (1-\alpha)\hat{y}_1(1)$$

e così via fino all'n-esimo dato

Stima del valore iniziale

Per avviare il processo di ES si deve fare una scelta per il valore di partenza:

$$\hat{y}_0(1)$$

Applicando sequenzialmente la formula di ES si vede che

$$\hat{y}_n(1) = \alpha\left[\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha)^{n-i}y_i\right] + (1-\alpha)^n\hat{y}_0(1)$$

L'impatto della prima previsione è trascurabile se n è grande.
Se n=50 e α=0.2 per il secondo addendo si avrebbe

$$0.8^{50}\left[\hat{y}_0(1)\right] = 0.000014\left[\hat{y}_0(1)\right]$$

Tra le varie scelte possibili di $\hat{y}_0(1)$ **ricordiamo le due più semplici**

1) **Media dei primi m valori**

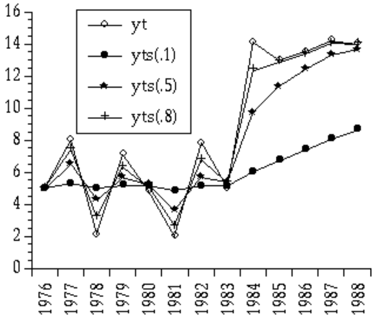
2) **si pone** $\hat{y}_1 = y_1 \Rightarrow \hat{y}_2 = y_1$ **ovvero la stima "naive"**

Esempio

Ecco un esempio su dati annuali. Come valore iniziale si è usata la stima naive.

Quando la serie è analizzata la prima volta, l'ES è applicato a tutti i termini

			diversi valori di α		
Anno	**T**	**yt**	**yts(.1)**	**yts(.5)**	**yts(.8)**
1976	1	5.0	5	5	5
1977	2	8.0	5.30	6.50	7.40
1978	3	2.1	4.98	4.30	3.16
1979	4	7.1	5.19	5.70	6.31
1980	5	4.8	5.15	5.25	5.10
1981	6	2.0	4.84	3.63	2.62
1982	7	7.8	5.13	5.71	6.76
1983	8	5.0	5.12	5.36	5.35
1984	9	14.1	6.02	9.73	12.35
1985	10	13.0	6.72	11.36	12.87
1986	11	13.5	7.39	12.43	13.37
1987	12	14.2	8.08	13.32	14.03
1988	13	14.0	8.67	13.66	14.01



In questo caso il valore adatto per "α" è 0.8 in quanto segue meglio la serie.

Quindi la previsione più accurata per l'88 è 14.01

Si intuisce che la scelta di "α" deve essere preceduta da diverse prove

Scelta automatica di α

Il fattore "α" determina l'intensità con la quale i valori passati influenzano le Previsioni future.

Valori piccoli di "α" daranno risposte lente ai cambiamenti di livello, ma saranno più stabili.

Valori elevati rendono le previsioni più sensibili ai cambiamenti quindi più vicine all'andamento reale, ma anche più legate a fatti episodici e irregolari.

Un modo per scegliere "α" meno soggettivamente è il seguente:

Per una scansione di valori di "α" 0.05 - 0.30, passo 0.05 si calcola

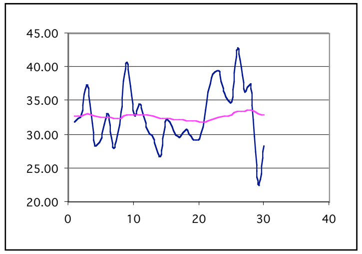
$$SSE(\alpha) = \sum_{t=1}^{n}\left[y_t - \hat{y}_{t-1}(1)\right]^2 \quad oppure \quad MAD(\alpha) = \sum_{t=1}^{n}\left|y_t - \hat{y}_{t-1}(1)\right|$$

Il valore di "α" cui corrisponde il minimo di SSE (o il minimo MAD) sarà quello prescelto per tutte le previsioni

Esempio

t	Yt
1	31.90
2	33.18
3	37.44
4	28.57
5	29.22
6	33.11
7	27.94
8	33.31
9	40.82
10	32.90
11	34.45
12	30.78
13	29.55
14	26.82
15	32.17
16	30.72
17	29.63
18	30.89
19	29.35
20	29.39
21	33.60
22	38.47
23	39.58
24	36.08
25	34.98
26	42.81
27	36.28
28	37.44
29	22.79
30	28.40

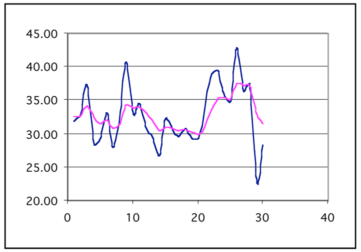
α	SSE(α)
0.05	607.68
0.10	621.67
0.15	629.71
0.20	633.34
0.25	633.69
0.30	631.96
0.35	629.37
0.40	626.96
0.45	625.52
0.50	625.59
0.55	626.32



Il valore di "α" da applicare è α=0.05

Tuttavia lo smussamento appare eccessivo.

Un altro candidato è α=0.30, ma l'efficacia è dubbia



Leaving-one-out

In fase di costruzione del meccanismo di ES si può ben sacrificare un dato per mettere a punto il previsore.

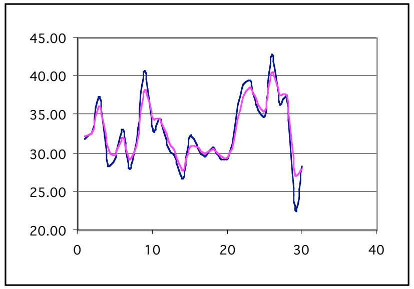
L'idea è di effettuare l'ES non sugli "n" dati, ma su (n-1) e di eaminare una scansione di valori del coefficiente di smorzamento "α".

Il valore di "α" che fornisce ma stima migliore del valore Y_n sarà quello da adottare nel previsore

α	Ysn(α)
0.05	22.97
0.10	27.06
0.15	29.00
0.20	28.12
0.25	24.95
0.30	20.41
0.35	15.41
0.40	10.62
0.45	6.48
0.50	3.27
0.55	1.12
0.60	0.09
0.65	0.20
0.70	1.44

Il valore di "α" da applicare è α=0.60
La prossimità tra serie originale e serie prevista dall'ES è troppo elevata:

ogni singolo episodio viene riportato nel previsore che non attua alcun livellamento



Previsioni con l'ES

Forecasting involves making projections about future performance on the basis of historical and current data.

Lo scopo dell'ES è di eliminare le fluttuazioni casuali e conservare la struttura consolidata della serie storica

Il metodo ES è utile se si debbono aggiornare centinaia o migliaia di previsioni -a breve termine- allorché si acquisisce un nuovo dato.

Infatti, per gestire l'ES occorre registrare il dato osservato in passato e la previsione fatta su di esso. Quindi due sole informazioni.

Quando il nuovo dato si rende disponibile si inserisce questo e la sua previsione fatta nel periodo precedente e così via.

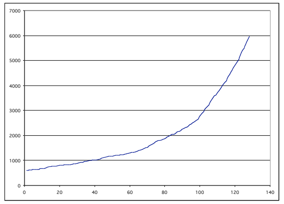
L' ES ha un orizzonte temporale limitato ad un periodo e non potrebbe essere usato per una sequenza di previsioni

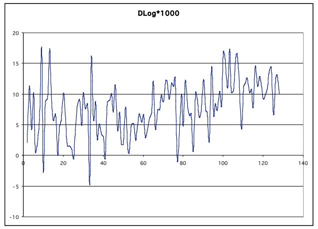
Esempio

La presenza di un trend esponenziale induce ad attivare la scala logaritmica e le differenze prime (cioè i tassi di crescita)

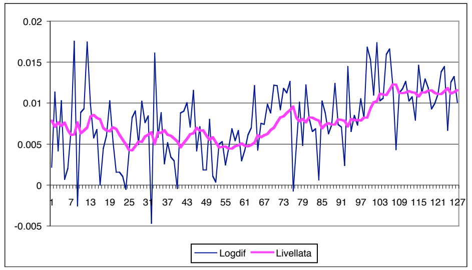
Nel grafico dei tassi di crescita c'è una progressiva, sebbene lenta crescita del livello medio. Quindi il modello a media costante sarebbe inappropriato.

Quarterly Iowa nonfarm income (1948 - 1979). Source: Abraham & Ledolter (1983).





Usiamo y_0=(media globale della serie) α=0.13



Valore previsto nella scala e forma della serie originaria è $y_{t+1}=y_t\exp(0.01139949)=6033.387$

Varianza dell'errore di previsione

L'errore di previsione dell' ES è definito da $e_{n+1} = \hat{y}_{n+1} - y_{n+1}$

Con varianza

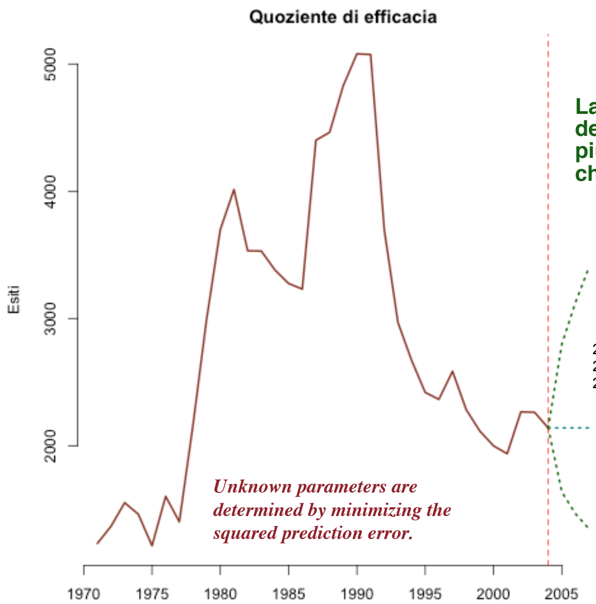
$$\operatorname{var}(e_{n+1}) = \operatorname{var}\left(\hat{y}_{n+1}\right) + \sigma_y^2$$

$$\cong \operatorname{var}\left(\alpha\sum_{i=1}^{\infty}(1-\alpha)^{i-1} y_{n+1-i}\right) + \sigma_y^2 = \alpha^2\sum_{i=1}^{\infty}(1-\alpha)^{2(i-1)}\sigma_y^2 + \sigma_y^2$$

$$\cong \frac{\alpha}{2-\alpha}\sigma_y^2 + \sigma_y^2 = \frac{2\sigma_y^2}{2-\alpha}$$

Maggiore è il valore di α, maggiore è la variabilità dell'errore di previsione.

In base alla varianza dell'errore di previsione si possono calcolare degli intervalli di previsione, approssimati come la varianza da cui derivano



Esempio

La "forchetta" (qui al 95%) deve essere considerata più in termini qualitativi che quantitativi

$$\hat{y}_1 = \min\{y\}$$

Year	Forecast	True value	%Err.
2005	2140.007	2172	1.47
2006	2140.007	2398	10.76
2007	2140.007	2398	10.76

Livellamento esponenziale e Trend

L'ES è appropriato se la serie è stazionaria (assenza di trend).

Se invece il trend c'è ed in particolare se il trend è lineare l'ES produce valori poco utili

Supponiamo che la serie storica sia esprimibile con il modello

$$y_t = b_0 + b_1 t$$

Oltre alla media costante b_0 c'è un incremento regolare del livello medio della serie.

Se si applica l'ES si ottiene

$$\hat{y}_{n+1} = \alpha\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha)^i y_{n+1-i} = \alpha\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha)^i\left[b_0 + b_1(n+1-i) + e_{n+1-i}\right]$$

$$= b_0\alpha\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha)^i + b_1\alpha\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha)^i - b_1\alpha\sum_{i=1}^{n}i(1-\alpha)^i + \alpha\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha)^i e_{n+1-i}$$

Livellamento esponenziale e Trend/2

Al tendere di "n" all'infinito si ha

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha(1-\alpha)^{i}=1;\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}i(1-\alpha)^{i}=\frac{1-\alpha}{\alpha^{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha)^{i}u_{n+1-i}=0$$ ***Media degli errori***

In definitiva succede che

$$\hat{y}_{n+1}=\left[b_0+b_1(n+1)\right]-\frac{b_1(1-\alpha)}{\alpha}=T_{n+1}-\frac{b_1(1-\alpha)}{\alpha}$$

Quindi il metodo ES semplice (SES: *single exponential smoothing*) sottostima il trend se è crescente o lo sovrastima se è decrescente.

Metodo di Holt

Per superare questo limite è stato proposto il metodo LES (*linear exponential smoothing)* noto anche come METODO DI HOLT.

Tale metodo prevede prima il livellamento della serie storica

$$L_t=\alpha y_t+(1-\alpha)(L_{t-1}+T_{t-1})$$

L'espressione è simile a quella del metodo ES. Cambia solo per la presenza del termine di trend che si somma all'ultimo valore livellato della serie.

Il simbolo "L" per il valore livellato in questo caso è più comodo.

Il significato del coefficiente di smorzamento "α" rimane invariato, ma si stabilisce che il valore previsto ora si articola su due componenti distinte : livello e trend

Metodo Holt/2

La seconda equazione del metodo prevede il livellamento del trend

Questo è già stato ottenuto dalla 1ª equazione

Questa è una stima del trend

$$T_t=\beta(L_t-L_{t-1})+(1-\beta)T_{t-1};\qquad 0<\beta<1$$

Il trend è espresso come media ponderata tra la stima più recente del trend stesso e l'incremento del valore livellato.

Compaiono due fattori di livellamento (α e β) da cui il nome di DES *(Double Exponential smoothing)* con cui è anche noto questo metodo

La scelta di "β" troppo vicina ad uno porta ad un trend applicato solo alle ultime osservazioni.

Se "β" tende a zero il trend si stima su tutte le osservazioni dando a tutte lo stesso peso.

Metodo di Holt/3

Il metodo LES opera separatamente sulle due componenti per poi combinarle in fase di previsione

$$\hat{y}_{t+1}=L_t+T_t$$

La previsione è la somma del valore livellato della serie e del trend

Per avviare il processo di previsione è necessario determinare i valori iniziali del trend e della serie

$$\begin{cases}L_1=\alpha y_1+(1-\alpha)(L_0+T_0)\\ T_1=\beta(L_1-L_0)+(1-\beta)T_0\end{cases}$$

Ad esempio si può scegliere

$$a)\ \ L_1=y_1,\ L_0=y_1-T_0,\ T_1=T_0$$

$$b)\ \ L_1=y_2-y_1;\quad c)\ \ L_1=(y_n-y_1)/(n-1)$$

Implementazione del metodo di Holt

Rimane da scegliere il valore iniziale del trend. Due possibili scelte sono

1) $T_0 = 0$;
2) stimare $T_t = b_0 + b_1 t$ usando le prime osservazioni **(a scelta)**

Il meccanismo del LES è ora definito:

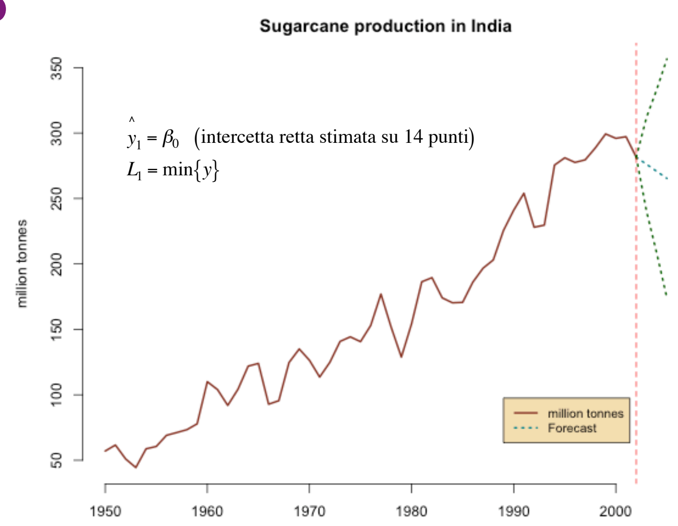
Fissati α, β, y_0, T_0

1) si calcola $L_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$

2) si calcola $T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)T_{t-1}$

A fini previsivi si pone poi $\hat{y}_{n+1} = L_n + T_n$

Esempio



La serie mostra un chiaro trend lineare per cui il LES può essere applicato con speranza di succeso

Metodo Holt-Winters

I metodi di livellamento esponenziale sono detti ADATTIVI in quanto operano la valutazione graduale dell'impatto dei dati passati sui valori futuri.

Nessuno dei due metodi (SES e DES) riesce a "seguire" serie con forti effetti stagionali. Il metodo di Winters cerca di colmare tale lacuna

$$y_{t+1} = (L_t + T_t)S_{t-k+1}$$

in cui si ipotizza che l'interazione che lega trend e stagionalità sia moltiplicativa dove k esprime il numero di frazioni stagionali presenti nell'anno. E' ovvio che

$$\sum_{i=1}^{k} S_i = k$$

Nel metodo di Winters il trend è lineare $T_t = b_0 + b_1 t$ **per questo il metodo è anche detto di Holt-Winters**

Il metodo Holt-Winters/2

Il metodo Holt-Winters si articola su tre equazioni (e quindi in tre passi)

- **Livellamento delle osservazioni** $L_t = \alpha\left(\frac{y_t}{S_{t-k}}\right) + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$
- **Livellamento della stagionalità** $S_t = \delta\left(\frac{y_t}{L_t}\right) + (1-\delta)S_{t-k}$
- **Livellamento del trend** $T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)T_{t-1}$

Sono presenti ben tre fattori di livellamento (compresi tra 0 e 1) e questo dà al metodo grande flessibilità, ma anche più arbitrarietà nella scelta.

Il metodo Holt-Winters/3

Le previsioni a partire dal periodo t si effettuano con la formula

$$\hat{y}_{t+m} = \left(L_t + mT_t\right)S_{t-k+m} \quad m = 1,2,\ldots$$

Per avviare i calcoli occorre fissare il livello del trend, la prima previsione ed i fattori di stagionalità. Esistono varie scelte.

Con l'esperienza ed un processo di prove-ed-errori si può definire un set ottimale.

Soluzioni semplici sono le seguenti

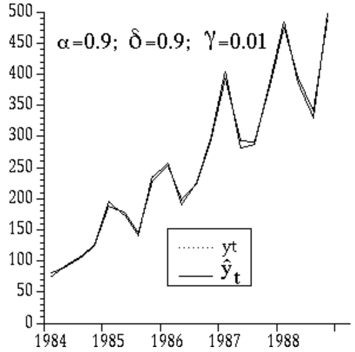
$$L_1 = y_k \quad \textit{valore ultima stagione primo anno}$$
$$T_0 = 0$$
$$S_j = 1 \quad per \quad j = 1,2,\ldots,k$$

$$L_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j}{n} \quad \textit{media totale}$$
$$T_0 = 0$$
$$S_j = \frac{y_j}{\sum_{j=1}^{k} y_j} \quad per \quad j = 1,2,\ldots,k$$

Esempio

Importi IVA versati trimestralmente in una provincia italiana

Anno	Trim	IVA
1984	1	76
	2	93
	3	108
	4	128
1985	1	196
	2	175
	3	141
	4	236
1986	1	256
	2	190
	3	227
	4	299
1987	1	403
	2	282
	3	288
	4	387
1988	1	484
	2	384
	3	330
	4	497



Schema di calcolo

Anno	Tr.	y_t	L_t	S_t	T_t	$\hat{y}_{t+1}$
1983	**1**			1		
	2			1		
	3			1		
	4		128	1	0	
1984	**1**	76	81.20	0.94	-0.47	80.73
	2	93	91.77	1.01	-0.36	91.42
	3	108	106.34	1.01	-0.21	106.13
	4	128	125.81	1.02	-0.01	125.80
1985	**1**	196	199.77	0.98	0.73	188.94
	2	175	175.68	1.00	0.48	178.28
	3	141	142.76	0.99	0.15	144.91
	4	236	223.42	1.05	0.95	227.88
1986	**1**	256	258.20	0.99	1.29	253.59
	2	190	197.34	0.97	0.67	197.56
	3	227	226.10	1.00	0.95	224.85
	4	299	278.44	1.07	1.46	294.53
1987	**1**	403	394.33	1.02	2.61	392.99
	2	282	302.34	0.94	1.66	293.76
	3	288	288.92	1.00	1.51	291.19
	4	387	354.05	1.09	2.15	381.73
1988	**1**	484	463.19	1.04	3.22	475.17
	2	384	415.84	0.92	2.71	391.80
	3	330	339.63	0.97	1.92	340.66
	4	497	444.18	1.12	2.95	487.78

$$\hat{y}_{n+1} = \left(L_n + T_n\right)S_{n-4+1} = \left(L_{20} + T_{20}\right)S_{17} = \left(444.18 + 2.95\right)1.04 = 465.02$$
$$\hat{y}_{n+2} = \left(L_n + 2T_n\right)S_{n-4+2} = \left(L_{20} + 2T_{20}\right)S_{18} = \left(444.18 + 5.9\right)0.92 = 414.074$$

Esempio/continua

Ord	Anno	Trim	IVA	Lt	St	Tt	Yt+1
		1			0.75		
		2			0.92		
		3			1.07		
		4		251.15	1.26	0.00	
1	1984	1	**76**	116.24	0.66	-1.35	105.53
2		2	**93**	102.61	0.91	-1.47	107.89
3		3	**108**	101.24	1.07	-1.47	126.13
4		4	**128**	101.10	1.27	-1.46	66.11
5	1985	1	**196**	275.83	0.71	0.30	250.60
6		2	**175**	201.16	0.87	-0.45	214.12
7		3	**141**	139.03	1.02	-1.06	174.65
8		4	**236**	181.59	1.30	-0.63	127.74
9	1986	1	**256**	344.50	0.74	1.01	301.87
10		2	**190**	230.27	0.83	-0.14	234.60
11		3	**227**	223.42	1.02	-0.21	289.34
12		4	**227**	179.93	1.27	-0.64	132.56
13	1987	1	**299**	381.88	0.78	1.38	318.10
14		2	**403**	475.32	0.85	2.30	485.45
15		3	**282**	297.47	0.95	0.50	376.97
16		4	**288**	234.68	1.23	-0.13	182.63
17	1988	1	**387**	470.79	0.82	2.23	400.20
18		2	**484**	562.16	0.86	3.12	539.75
19		3	**330**	367.58	0.90	1.15	453.89
20		4	**497**	400.24	1.24	1.46	328.47

$$\hat{y}_{21} = \left(L_{20} + T_{20}\right)S_{17} = \left(400.24 + 1.46\right)0.82 = 329.39$$
$$\hat{y}_{22} = \left(L_{20} + 2T_{20}\right)S_{18} = \left(400.24 + 2.92\right)0.86 = 346.72$$

La combinazione dei fattori che era buona per i primi valori iniziali non è necessariamente buona per gli altri

Altro esempio (Trend=F,Seas=T)

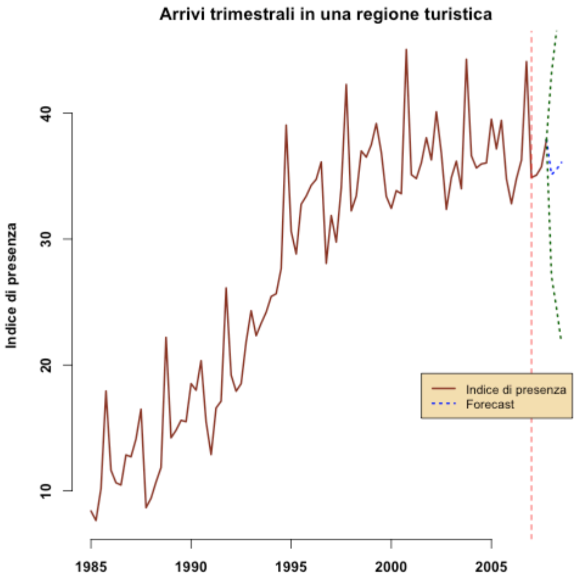
Smoothing parameters:
alpha: 0.7288883
beta : FALSE
gamma: 0.8063892

Coefficients:

	[,1]
a	4664.7242
s1	302.6565
s2	-652.7460
s3	126.2118
s4	630.0123

	Forecast	True value	%Err.
[1,]	4967.381	4732	4.97
[2,]	4011.978	4837	17.06
[3,]	4790.936	6135	21.91

Altro esempio (Trend=T,Seas=T)



Coefficients:

	[,1]
a	35.71695792
b	-0.10388719
s1	-0.50352078
s2	0.01778731
s3	0.67997967
s4	1.82458331

	Forecast	True value	%Err.
[1,]	35.10955	39.75	11.67
[2,]	35.52697	39.90	10.96
[3,]	36.08528	37.44	3.62

Holt-Winters additivo

La versione additiva prevede la separazione tra stagionalità e trend

$$y_{t+1} = L_t + T_t + S_{t-k+1}$$

Lo schema di calcolo è

$$L_t = \alpha\left(y_t - S_{t-k}\right) + (1-\alpha)\left(L_{t-1} + T_{t-1}\right)$$

$$S_t = \delta\left(y_t - L_t\right) + (1-\delta)S_{t-k}$$

$$T_t = \gamma\left(L_t - L_{t-1}\right) + (1-\gamma)T_{t-1}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} S_i = 0}$$

Le previsioni saranno quindi

$$\hat{y}_{t+m} = L_t + mT_t + S_{t-k+m}$$

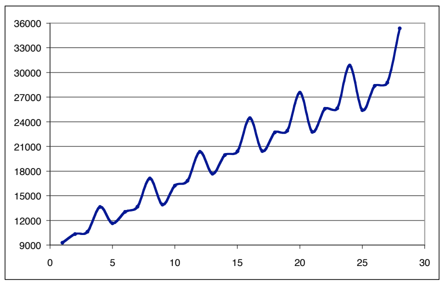
Esempio

Quarter	Code	Yt	Lt	St	Tt	Yt+1
1				-0.15		
2				-0.06		
3				-0.03		
4			13640.00	0.24	10972.50	
1992-1	1	9280	23079.27	-11867.39	10527.86	33607.07
1992-2	2	10340	31280.42	-18008.77	9853.12	41133.51
1992-3	3	10630	38083.19	-23609.74	8968.52	47051.95
1992-4	4	13640	43710.51	-25860.60	7999.57	39842.69
1993-1	5	11650	48890.81	-33688.53	7181.98	38064.02
1993-2	6	13030	53569.39	-37385.10	6455.99	36415.64
1993-3	7	13680	57751.82	-41207.13	5796.66	37687.88
1993-4	8	17122	61491.89	-41778.59	5200.25	33003.61
1994-1	9	13920	64783.78	-48459.25	4646.83	32045.51
1994-2	10	16237	67849.76	-49620.88	4188.38	30831.01
1994-3	11	16827	70637.73	-52046.23	3782.26	32641.41
1994-4	12	20361	73191.96	-51283.62	3426.13	28158.84
1995-1	13	17690	75571.20	-56562.13	3122.53	29072.85
1995-2	14	19942	77780.65	-56688.16	2857.74	28592.16
1995-3	15	20418	79820.98	-58373.03	2620.69	31158.04
1995-4	16	24448	81770.66	-56477.20	2426.10	27634.63
1996-1	17	20440	83477.30	-62130.77	2217.45	29006.59
1996-2	18	22723	85066.39	-61551.66	2035.23	28728.59
1996-3	19	22913	86520.06	-62874.30	1866.58	31909.44
1996-4	20	27550	87950.70	-59851.41	1740.15	27560.08
1997-1	21	22772	89212.04	-65836.74	1601.30	29261.68
1997-2	22	25587	90445.87	-64395.86	1494.73	29066.31
1997-3	23	25644	91598.38	-65523.17	1395.49	33142.46
1997-4	24	30856	92765.22	-61621.12	1329.18	28257.65
1998-1	25	25409	93809.53	-68041.60	1246.57	30660.24
1998-2	26	28366	94826.68	-66171.60	1180.04	30483.55
1998-3	27	28777	95836.06	-66844.03	1130.55	**35345.48**
1998-4	28	35386	96970.66	-61589.76	1131.72	*30060.78*

Meida anno1

Alfa=	0.10
Delta=	0.86
Gamma=	0.29

Incassi trimestrali WallMart



Previsione per il 28°. Usata per fissare i parametri

Previsione prossima

Tipologie

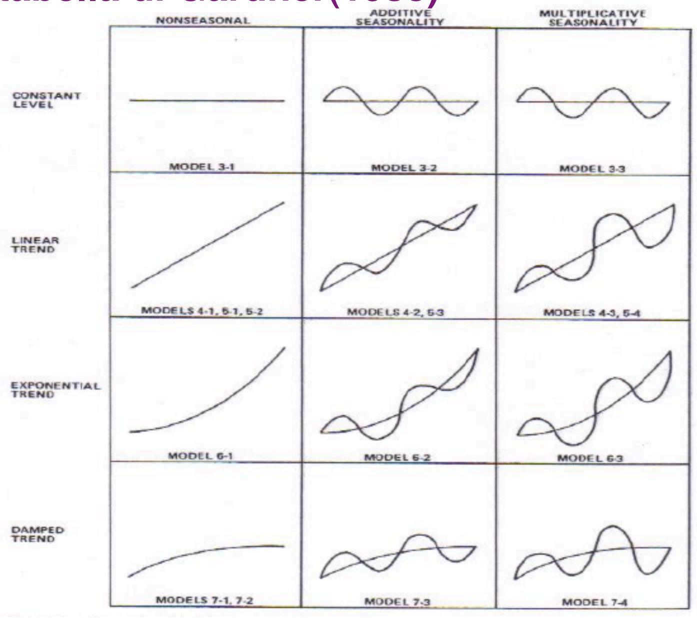
Standard exponential smoothing methods

Trend	Seasonality: N None	Seasonality: A Additive	Seasonality: M Multiplicative
N None	$S_t = \alpha X_t + (1-\alpha)S_{t-1}$ $\hat{X}_t(m) = S_t$	$S_t = \alpha(X_t - I_{t-p}) + (1-\alpha)S_{t-1}$ $I_t = \delta(X_t - S_t) + (1-\delta)I_{t-p}$ $\hat{X}_t(m) = S_t + I_{t-p+m}$	$S_t = \alpha(X_t / I_{t-p}) + (1-\alpha)S_{t-1}$ $I_t = \delta(X_t / S_t) + (1-\delta)I_{t-p}$ $\hat{X}_t(m) = S_t I_{t-p+m}$
	$S_t = S_{t-1} + \alpha e_t$ $\hat{X}_t(m) = S_t$	$S_t = S_{t-1} + \alpha e_t$ $I_t = I_{t-p} + \delta(1-\alpha)e_t$ $\hat{X}_t(m) = S_t + I_{t-p+m}$	$S_t = S_{t-1} + \alpha e_t / I_{t-p}$ $I_t = I_{t-p} + \delta(1-\alpha)e_t / S_t$ $\hat{X}_t(m) = S_t I_{t-p+m}$
A Additive	$S_t = \alpha X_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + T_{t-1})$ $T_t = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1-\gamma)T_{t-1}$ $\hat{X}_t(m) = S_t + mT_t$	$S_t = \alpha(X_t - I_{t-p}) + (1-\alpha)(S_{t-1} + T_{t-1})$ $T_t = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1-\gamma)T_{t-1}$ $I_t = \delta(X_t - S_t) + (1-\delta)I_{t-p}$ $\hat{X}_t(m) = S_t + mT_t + I_{t-p+m}$	$S_t = \alpha(X_t / I_{t-p}) + (1-\alpha)(S_{t-1} + T_{t-1})$ $T_t = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1-\gamma)T_{t-1}$ $I_t = \delta(X_t / S_t) + (1-\delta)I_{t-p}$ $\hat{X}_t(m) = (S_t + mT_t)I_{t-p+m}$
	$S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + \alpha e_t$ $T_t = T_{t-1} + \alpha\gamma e_t$ $\hat{X}_t(m) = S_t + mT_t$	$S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + \alpha e_t$ $T_t = T_{t-1} + \alpha\gamma e_t$ $I_t = I_{t-p} + \delta(1-\alpha)e_t$ $\hat{X}_t(m) = S_t + mT_t + I_{t-p+m}$	$S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + \alpha e_t / I_{t-p}$ $T_t = T_{t-1} + \alpha\gamma e_t / I_{t-p}$ $I_t = I_{t-p} + \delta(1-\alpha)e_t / S_t$ $\hat{X}_t(m) = (S_t + mT_t)I_{t-p+m}$
DA Damped Additive	$S_t = \alpha X_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + \phi T_{t-1})$ $T_t = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1-\gamma)\phi T_{t-1}$ $\hat{X}_t(m) = S_t + \sum_{i=1}^{m}\phi^i T_t$	$S_t = \alpha(X_t - I_{t-p}) + (1-\alpha)(S_{t-1} + \phi T_{t-1})$ $T_t = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1-\gamma)\phi T_{t-1}$ $I_t = \delta(X_t - S_t) + (1-\delta)I_{t-p}$ $\hat{X}_t(m) = S_t + \sum_{i=1}^{m}\phi^i T_t + I_{t-p+m}$	$S_t = \alpha(X_t / I_{t-p}) + (1-\alpha)(S_{t-1} + \phi T_{t-1})$ $T_t = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1-\gamma)\phi T_{t-1}$ $I_t = \delta(X_t / S_t) + (1-\delta)I_{t-p}$ $\hat{X}_t(m) = (S_t + \sum_{i=1}^{m}\phi^i T_t)I_{t-p+m}$
	$S_t = S_{t-1} + \phi T_{t-1} + \alpha e_t$ $T_t = \phi T_{t-1} + \alpha\gamma e_t$ $\hat{X}_t(m) = S_t + \sum_{i=1}^{m}\phi^i T_t$	$S_t = S_{t-1} + \phi T_{t-1} + \alpha e_t$ $T_t = \phi T_{t-1} + \alpha\gamma e_t$ $I_t = I_{t-p} + \delta(1-\alpha)e_t$ $\hat{X}_t(m) = S_t + \sum_{i=1}^{m}\phi^i T_t + I_{t-p+m}$	$S_t = S_{t-1} + \phi T_{t-1} + \alpha e_t / I_{t-p}$ $T_t = \phi T_{t-1} + \alpha\gamma e_t / I_{t-p}$ $I_t = I_{t-p} + \delta(1-\alpha)e_t / S_t$ $\hat{X}_t(m) = (S_t + \sum_{i=1}^{m}\phi^i T_t)I_{t-p+m}$
M Multiplicative	$S_t = \alpha X_t + (1-\alpha)(S_{t-1}R_{t-1})$ $R_t = \gamma(S_t / S_{t-1}) + (1-\gamma)R_{t-1}$ $\hat{X}_t(m) = S_t R_t^m$	$S_t = \alpha(X_t - I_{t-p}) + (1-\alpha)S_{t-1}R_{t-1}$ $R_t = \gamma(S_t / S_{t-1}) + (1-\gamma)R_{t-1}$ $I_t = \delta(X_t - S_t) + (1-\delta)I_{t-p}$ $\hat{X}_t(m) = S_t R_t^m + I_{t-p+m}$	$S_t = \alpha(X_t / I_{t-p}) + (1-\alpha)S_{t-1}R_{t-1}$ $R_t = \gamma(S_t / S_{t-1}) + (1-\gamma)R_{t-1}$ $I_t = \delta(X_t / S_t) + (1-\delta)I_{t-p}$ $\hat{X}_t(m) = (S_t R_t^m)I_{t-p+m}$
	$S_t = S_{t-1}R_{t-1} + \alpha e_t$ $R_t = R_{t-1} + \alpha\gamma e_t / S_{t-1}$ $\hat{X}_t(m) = S_t R_t^m$	$S_t = S_{t-1}R_{t-1} + \alpha e_t$ $R_t = R_{t+1} + \alpha\gamma e_t / S_{t-1}$ $I_t = I_{t-p} + \delta(1-\alpha)e_t$ $\hat{X}_t(m) = S_t R_t^m + I_{t-p+m}$	$S_t = S_{t-1}R_{t-1} + \alpha e_t / I_{t-p}$ $R_t = R_{t-1} + (\alpha\gamma e_t / S_{t-1}) / I_{t-p}$ $I_t = I_{t-p} + \delta(1-\alpha)e_t / S_t$ $\hat{X}_t(m) = (S_t R_t^m)I_{t-p+m}$
DM Damped Multiplicative	$S_t = \alpha X_t + (1-\alpha)(S_{t-1}R_{t-1}^{\phi})$ $R_t = \gamma(S_t / S_{t-1}) + (1-\gamma)R_{t-1}^{\phi}$ $\hat{X}_t(m) = S_t R_t^{\sum_{i=1}^{m}\phi^i}$	$S_t = \alpha(X_t - I_{t-p}) + (1-\alpha)S_{t-1}R_{t-1}^{\phi}$ $R_t = \gamma(S_t / S_{t-1}) + (1-\gamma)R_{t-1}^{\phi}$ $I_t = \delta(X_t - S_t) + (1-\delta)I_{t-p}$ $\hat{X}_t(m) = S_t R_t^{\sum_{i=1}^{m}\phi^i} + I_{t-p+m}$	$S_t = \alpha(X_t / I_{t-p}) + (1-\alpha)(S_{t-1}R_{t-1}^{\phi})$ $R_t = \gamma(S_t / S_{t-1}) + (1-\gamma)R_{t-1}^{\phi}$ $I_t = \delta(X_t / S_t) + (1-\delta)I_{t-1}$ $\hat{X}_t(m) = (S_t R_t^{\sum_{i=1}^{m}\phi^i})I_{t-p+m}$
	$S_t = S_{t-1}R_{t-1}^{\phi} + \alpha e_t$ $R_t = R_{t-1}^{\phi} + \alpha\gamma e_t / S_{t-1}$ $\hat{X}_t(m) = S_t R_t^{\sum_{i=1}^{m}\phi^i}$	$S_t = S_{t-1}R_{t-1}^{\phi} + \alpha e_t$ $R_t = R_{t-1}^{\phi} + \alpha\gamma e_t / S_{t-1}$ $I_t = I_{t-p} + \delta(1-\alpha)e_t$ $\hat{X}_t(m) = S_t R_t^{\sum_{i=1}^{m}\phi^i} + I_{t-p+m}$	$S_t = S_{t-1}R_{t-1}^{\phi} + \alpha e_t / I_{t-p}$ $R_t = R_{t-1}^{\phi} + (\alpha\gamma e_t / S_{t-1}) / I_{t-p}$ $I_t = I_{t-p} + \delta(1-\alpha)e_t / S_t$ $\hat{X}_t(m) = (S_t R_t^{\sum_{i=1}^{m}\phi^i})I_{t-p+m}$

Sono in uno regolare 15 diverse formulazioni della tecnica.

Si distinguono per i tipo di trend, se c'è; il tipo di stagionalità, se c'è e per lo schema di formazione del dato

La tabella di Gardner(1985)



Parametri

Table 2. Notation for exponential smoothing

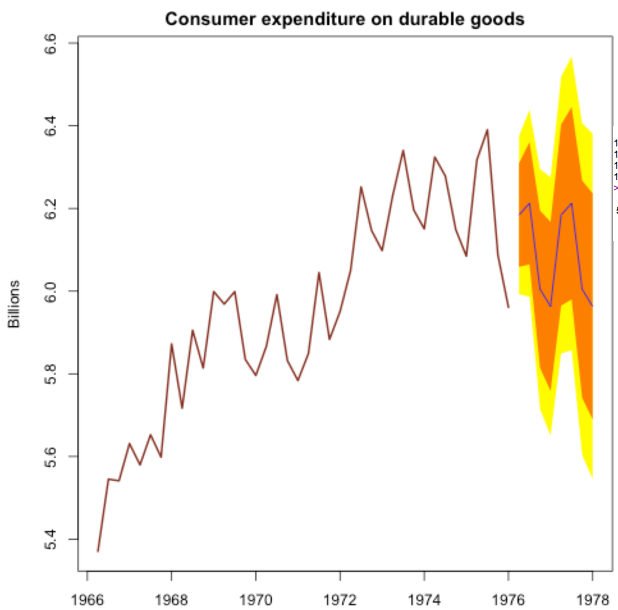
Symbol	Definition
α	Smoothing parameter for the level of the series
γ	Smoothing parameter for the trend
δ	Smoothing parameter for seasonal indices
ϕ	Autoregressive or damping parameter
β	Discount factor, $0 \le \beta \le 1$
S_t	Smoothed level of the series, computed after X_t is observed. Also the expected value of the data at the end of period t in some models
T_t	Smoothed additive trend at the end of period t
R_t	Smoothed multiplicative trend at the end of period t
I_t	Smoothed seasonal index at the end of period t. Can be additive or multiplicative
X_t	Observed value of the time series in period t
m	Number of periods in the forecast lead-time
p	Number of periods in the seasonal cycle
$\hat{X}_t(m)$	Forecast for m periods ahead from origin t
e_t	One-step-ahead forecast error, $e_t = X_t - \hat{X}_{t-1}(1)$. Note that $e_t(m)$ should be used for other forecast origins
C_t	Cumulative renormalization factor for seasonal indices. Can be additive or multiplicative
V_t	Transition variable in smooth transition exponential smoothing
D_t	Observed value of nonzero demand in the Croston method
Q_t	Observed inter-arrival time of transactions in the Croston method
Z_t	Smoothed nonzero demand in the Croston method
P_t	Smoothed inter-arrival time in the Croston method
Y_t	Estimated demand per unit time in the Croston method (Z_t/P_t)

Ets in package forecast

```
ets(y, model="ZZZ", damped=NULL, alpha=NULL, beta=NULL, gamma=NULL,
    phi=NULL, additive.only=FALSE, lambda=NULL,
    lower=c(rep(0.0001,3), 0.8), upper=c(rep(0.9999,3),0.98),
    opt.crit=c("lik","amse","mse","sigma","mae"), nmse=3,
    bounds=c("both","usual","admissible"), ic=c("aic","aicc","bic"),
    restrict=TRUE)
```

Note that the forecast equations for the seasonal methods are valid only for a forecast horizon () less than or equal to the length of the seasonal cycle (*mp*).

Esempio




```
        Point Forecast    Lo 90    Hi 90
1976 Q2       6.183893 6.023251 6.344535
1976 Q3       6.212610 6.022613 6.402607
1976 Q4       6.004730 5.760693 6.248767
1977 Q1       5.962947 5.700573 6.225321
> print(Ab)
        RMSE          MAE         MAPE         MASE
 513.9199499  513.4089549   98.8248106 4515.3802790
        ACF1    Theil's U
   0.1521848   13.9562351
```