Lo studio della concentrazione

Riguarda il modo in cui un fenomeno *trasferibile* si ripartisce tra le unità. In particolare la sua attitudine ad accentrarsi in un numero ridotto di unità.

Diminuisce ← Frazione che spetta, nel complesso, a coloro che ne possiedono -singolarmente- più della media → **Aumenta**

Minore concentrazione

Maggiore concentrazione

Si parla di disuguaglianza distributiva e si considera la concentrazione come un eccesso di tale fenomeno.

N.B. La media di riferimento non è necessariamente la media aritmetica

Aree di interesse

- **Concentrazione dei redditi e della ricchezza**
- **Concentrazione industriale (produzione, fatturato, addetti)**
- **Concentrazione del mercato internazionale**
- **Concentrazioni finanziarie**
- **Condizioni di salute della popolazione**

Trasferibilità

E' trasferibile la variabile la cui intensità globale o una sua parte sia attribuibile (anche solo idealmente) ad una sola o a poche unità

Variabili TRASFERIBILI	Variabili NON TRASFERIBILI
Reddito ed altri caratteri numerari	Forma o colori
Diritti di possesso	Ricordi ed esperienze
Popolazioni	
Quote di mercato	

Stato di salute

Le variabili non trasferibili riguardano aspetti intrinseci delle unità e non possono essere trasferiti senza trasferire -in solido- l'unità stessa.

Se i valori della variabile sono livelli raggiungibili da qualsiasi unità ed ha un senso la loro somma o aggregazione allora lo studio di concentrazione è plausibile

Variabilità e Concentrazione

I due concetti presentano forti analogie, ma anche importanti differenze

Variabilità:

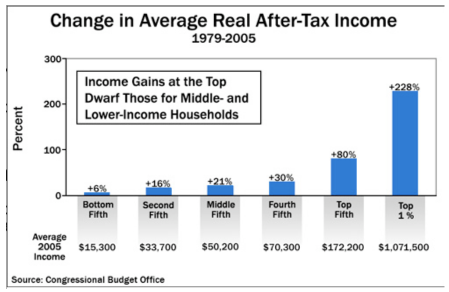
Attitudine delle intensità a presentare valori diversi

Concentrazione:

Attitudine delle intensità ad presentare una distribuzione di valori più o meno diversa rispetto ad una distribuzione di riferimento

Se la distribuzione è quella uniforme c'è forte somiglianza tra i due concetti.

La scelta del modello di riferimento è questione politica e normativi: noi valutiamo le implicazioni possibili delle varie scelte



Simbologia

Ad ogni modalità riscontrata nella rilevazione corrisponde una quota o un ammontare assoluto di variabile:

$$\textit{Ammontare assoluto:}\quad a_i = X_{(i)} n_i;\ \ i = 1,2,\ldots,k \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i = n\mu$$

$$\textit{Ammontare relativo:}\quad g_i = \frac{a_i}{n\mu} = \frac{X_{(i)}}{\mu} f_i;\ \ i = 1,2,\ldots,k \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} g_i = 1$$

RARAMENTE…

Se la rilevazione è in classi si useranno le medie parziali μ_i al posto delle $X_{(i)}$.

$$\textit{Ammontare assoluto cumulato:}\quad A_i = \sum_{j=1}^{i} X_{(j)} n_j;\ \ A_k = n\mu$$

$$\textit{Ammontare relativo cumulato:}\quad q_i = \sum_{j=1}^{i} g_j;\ \ i = 1,2,\ldots,k;\ \ q_0 = 0$$

Esempio_1

Studenti stranieri per regione:

Regione	X_i	n_i	a_i	A_i	g_i	Q_i
Basilicata	0	1	0	0	0.0000	0.0000
Molise	0	1	0	0	0.0000	0.0000
Calabria	39	1	39	39	0.0015	0.0015
Trentino AA	45	1	45	84	0.0017	0.0032
Sardegna	221	1	221	305	0.0084	0.0116
Liguria	406	1	406	711	0.0154	0.0269
Abruzzi	537	1	537	1248	0.0203	0.0473
Friuli VG	714	1	714	1962	0.0271	0.0743
Piemonte	754	1	754	2716	0.0286	0.1029
Puglia	765	1	765	3481	0.0290	0.1319
Sicilia	853	1	853	4334	0.0323	0.1642
Campania	1015	1	1015	5349	0.0385	0.2027
Marche	1029	1	1029	6378	0.0390	0.2417
Toscana	1534	1	1534	7912	0.0581	0.2998
Veneto	1799	1	1799	9711	0.0682	0.3680
Emilia R.	2067	1	2067	11778	0.0783	0.4463
Lombardia	2778	1	2778	14556	0.1053	0.5515
Lazio	4675	1	4675	19231	0.1771	0.7287
Umbria	7161	1	7161	26392	0.2713	1.0000

Gli ammontari relativi danno conto della quota parte di fenomeno (studenti stranieri) pertinente una singola regione.

Gli ammontari relativi cumulati indicano la quota progressiva spettante alle regioni che singolarmente non ne possiedono più di un dato ammontare.

Esempio_2

$$f_i = \frac{n_i}{n};\quad P_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$$

Punti vendita per numero di commessi/e

Commessi/e		Punti	μ_i	f_i	$(\mu i)f_i$	q_i
1	9	4	3.52	0.1026	0.36	0.0193
10	14	6	11.86	0.1538	1.83	0.1170
15	19	13	16.52	0.3333	5.51	0.4116
20	24	9	21.99	0.2308	5.07	0.6831
25	35	5	29.91	0.1282	3.83	0.8882
36	50	2	42.39	0.0513	2.17	1.0000
		39			18.78	

Le medie di classe evitano il calcolo approssimato con i valori centrali.

La classe 15-19 è quella che assorbe il maggior numero di punti vendita.

La classe 36-50, pur impiegando singolarmente un numero elevato di commessi/e, assorbe solo una quota del 12%

Medie progressive

Ipotizziamo di aver ordinato le modalità in ordine crescente di grandezza

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$$

Le medie aritmetiche dei primi valori sono

$$M_1 = x_{(1)};\quad M_2 = \frac{x_{(1)} + x_{(2)}}{2};\quad M_3 = \frac{x_{(1)} + x_{(2)} + x_{(3)}}{3};\ \cdots$$

In generale, si può scrivere

$$M_i = \frac{\sum_{j=1}^{i} x_{(j)}}{i} = \left(\frac{i-1}{i}\right)\frac{\sum_{j=1}^{i-1} x_{(j)}}{(i-1)} + \frac{x_{(i)}}{i} = \left(\frac{i-1}{i}\right)M_{i-1} + \frac{x_{(i)}}{i}$$

A questo punto si può notare che

$$M_i - M_{i-1} = \left(\frac{i-1}{i}\right)M_{i-1} + \frac{x_{(i)}}{i} - M_{i-1} = \frac{x_{(i)}}{i} + M_{i-1}\left(\frac{i-1}{i} - 1\right) = \frac{x_{(i)} - M_{i-1}}{i}$$

Poiché $M_{i-1} < x_{(i)}$ per la proprietà di internalità della media aritmetica, risulta che M_i è maggiore di M_{i-1}, cioè le medie aritmetiche sono progressive.

Relazione tra le p_i e le q_i

Gli ammontari relativi cumulati sono sempre inferiori o uguali alle corrispondenti frequenze relative cumulate di unità.

$$Media\ \ dei\ \ primi\ \ "i"\ \ Valori:\ \ M_i \le \mu$$

questo perché i valori sono ordinati in senso crescente

$$ciò\ \ implica: \ \frac{\sum_{j=1}^{i} X_{(j)} n_j}{\sum_{j=1}^{i} n_j} \le \mu \Rightarrow \sum_{j=1}^{i} X_{(j)} n_j \le \mu \sum_{j=1}^{i} n_j \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{i} \frac{X_{(j)}}{\mu} \frac{n_j}{n} \le \sum_{j=1}^{i} \frac{n_j}{n} \Rightarrow q_i \le p_i$$

al 10% delle unità non può spettare più del 10% di variabile perché, altrimenti, nel restante 90%, si troverebbero valori più piccoli di quelli inseriti nel primo 10% e questo contraddice l'ordinamento crescente.

Concentrazione nulla

La concentrazione è NULLA se tutte le unità possiedono lo stesso ammontare

$$X_{(1)} = X_{(2)} = \ldots = X_{(k-1)} = X_{(k)}$$

Questo significa che il primo 15% di unità possiede il 15% di variabile, il primo 45% possiede il 45% e così via.

Non ha in sé alcuna caratteristica ideale:

L'equa distribuzione imporrebbe che tutti gli stabilimenti di un settore avessero lo stesso numero di addetti laddove la teoria economica suggerisce che la distribuzione degli addetti è guidata dalla tendenza all'uguaglianza della produttività del lavoro.

Esempio

L'assegnazione dei diritti di scavo delle miniere in Australia e Brasile avviene ripartendo in maglie uguali i terreni.

In questo caso le quote relative di variabile e di unità coincidono, sia nella forma semplice che in quella aggregata

$$g_i = \frac{X_{(i)}}{\mu} * f_i = \frac{\mu}{\mu} f_i = f_i;$$

$$per\ \ \ i = 1,2,\ldots,k \Rightarrow q_i = p_i;\ \ i = 1,2,\ldots,k$$

Concentrazione massima

Una sola unità possiede (oppure è ad essa attribuibile) tutta la variabile

$$X_{(1)} = X_{(2)} = \ldots = X_{(k-1)};\quad X_{(k)} = T = totale\ della\ variabile$$

Anche questo è un caso limite a cui non si riconosce nessuna valenza particolare.

Come esempi di questa il latifondo come forma di possesso dei terreni:il caso del faraone egizio

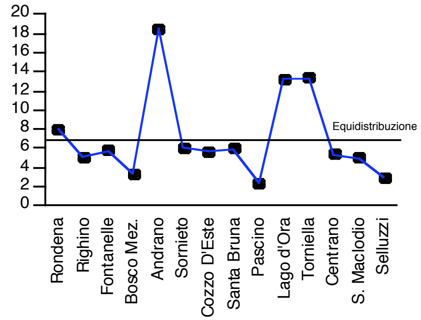
In questo caso le quote relative di variabile sono tutte nulle tranne la k-esima e quelle cumulate sono pure nulle tranne la k-esima che è pari ad uno

$$\begin{cases} g_i = 0;\ i = 1,2,\ldots,k-1 \\ g_k = 1 \end{cases};\ \Rightarrow q_i = \begin{cases} 0 \ \ se \ \ i = 1,2,\ldots,k-1 \\ 1 \ \ se \ \ i = k \end{cases}$$

Esempio

Popolazione residente nei comuni del comprensorio di Thuria.

Comune	Abitanti	Quota
Rondena	6741	7.92%
Righino	4287	5.04%
Fontanelle	4833	5.68%
Bosco Mez.	2774	3.26%
Andrano	15749	18.50%
Sornieto	5111	6.00%
Cozzo D'Este	4793	5.63%
Santa Bruna	5015	5.89%
Pascino	1971	2.32%
Lago d'Ora	11244	13.21%
Torniella	11366	13.35%
Centrano	4532	5.32%
S. Maclodio	4222	4.96%
Selluzzi	2493	2.93%
	85131	100.00%



Se ogni comune avesse lo stesso numero di abitanti in ognuno abiterebbe una quota del 100/14=7.1%.

Gran parte delle amministrazioni si avvicina a questa soglia, ma la presenza di Andrano con circa 16 mila abitanti porta la distribuzione ad allontanarsi dalla presenza paritaria.

Fonti dei dati sui redditi

Banca d'Italia
Indagine sui bilanci delle famiglie italiane

http://www.bancaditalia.it/statistiche

sotto: indagini campionarie

ISTAT
Indagine sui consumi delle famiglie 1985-2002 e seguenti

http://www.istat.it/

Also useful

http://www.istat.it/binariodie/Stat_per_esempi/index.htm

Alcune indicazioni

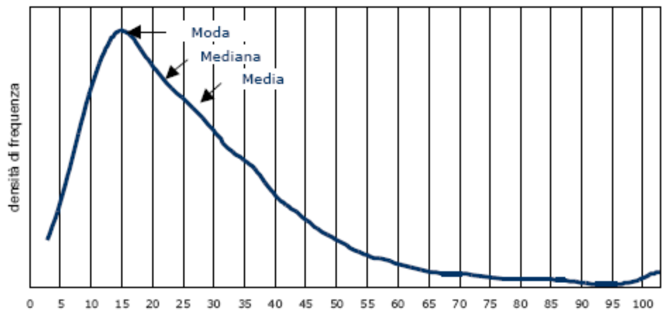
Tav.C4

Redditi medi e quote di reddito per decimi di famiglie

Decimi di famiglie	Valore di ripartizione (euro)	Quota di reddito (valori percentuali)	Reddito medio (euro)
Fino al 1° decile	9.500	2,3	6.536
Dal 1° al 2° decile	13.000	4,1	11.318
Dal 2° al 3° decile	15.902	5,2	14.411
Dal 3° al 4° decile	19.200	6,2	17.438
Dal 4° al 5° decile	22.986	7,6	21.050
Dal 5° al 6° decile	27.253	9,0	25.101
Dal 6° al 7° decile	32.305	10,6	29.616
Dal 7° al 8° decile	38.852	12,7	35.414
Dal 8° al 9° decile	50.287	15,8	43.909
oltre il 9° decile	-	26,5	73.831

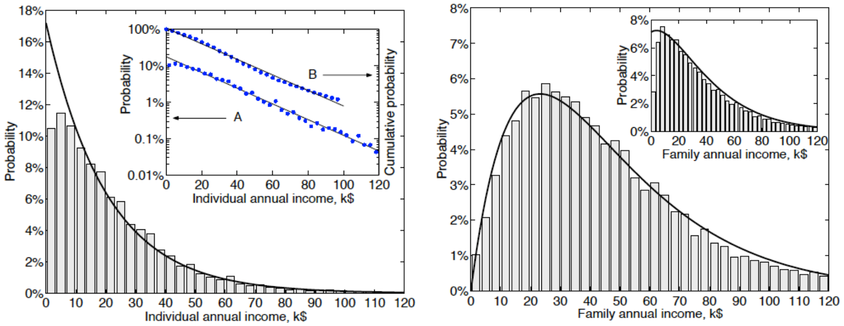
Fig. 7

Distribuzione del reddito familiare[26]
(migliaia di euro)

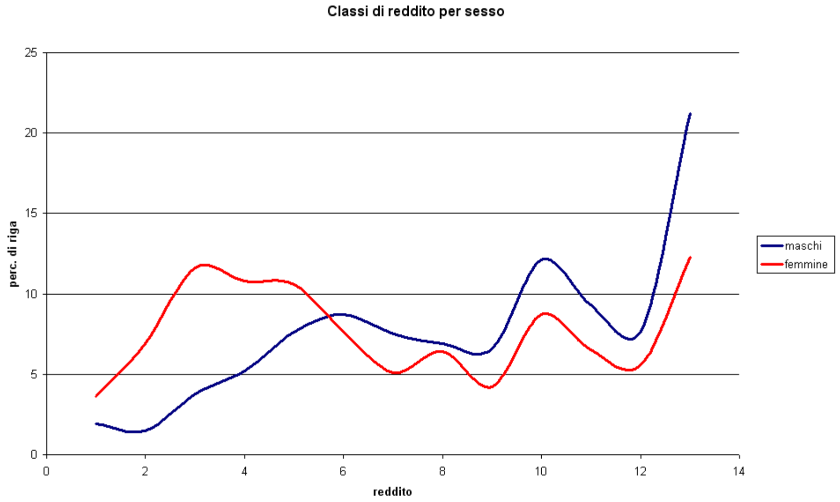


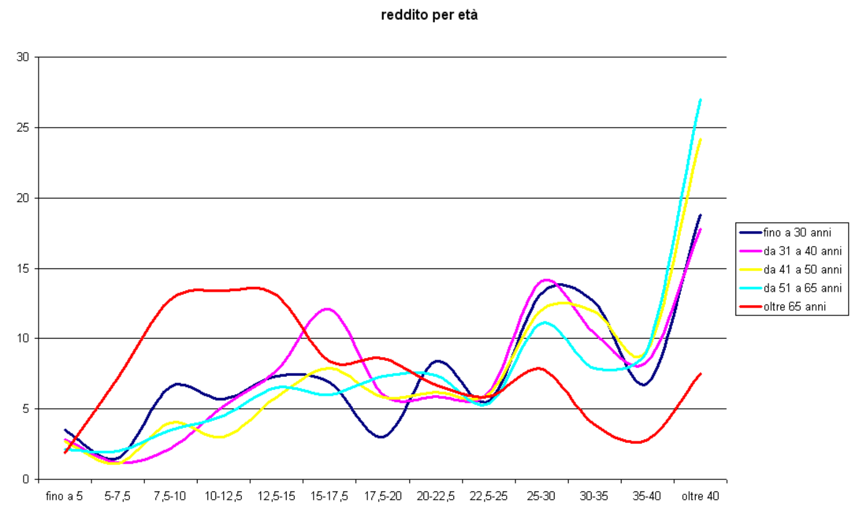
Anno 2002

USA 1997 – redditi individuali e redditi familiari



La presenza di un numero crescente di redditieri modifica la forma della distribuzione





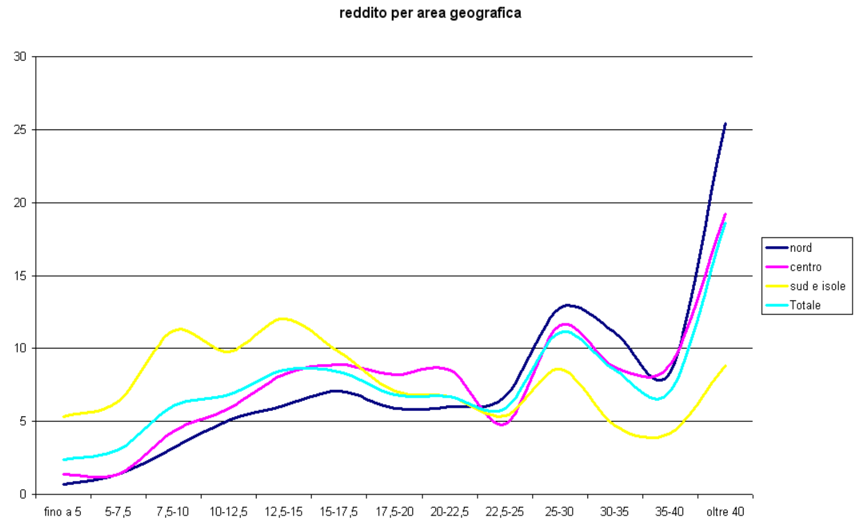
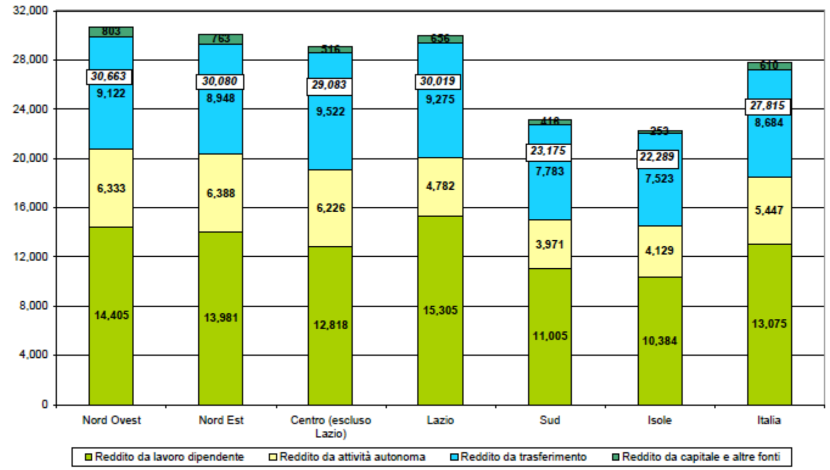
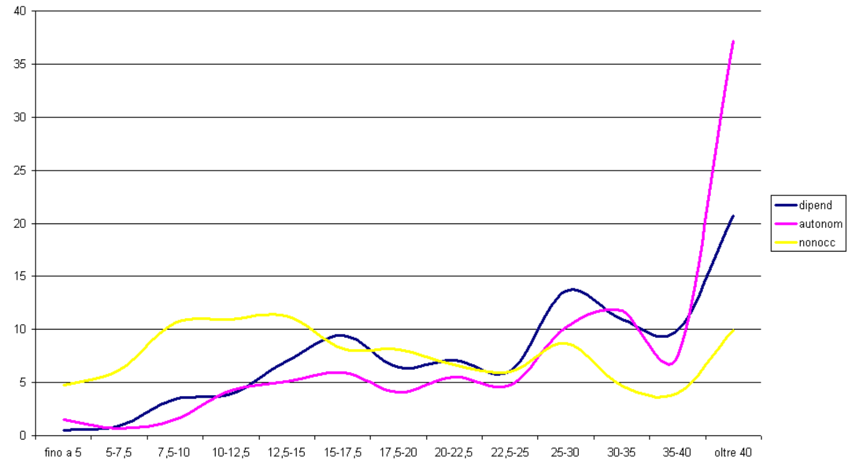


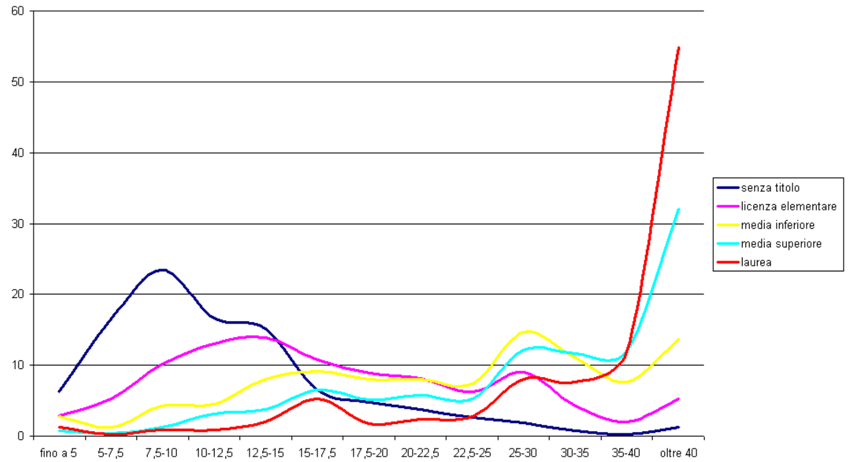
Fig. 2: Reddito familiare netto medio e sue componenti in Italia nel 2004 per macro-area. Fonte: elaborazioni su dati ISTAT (2007)



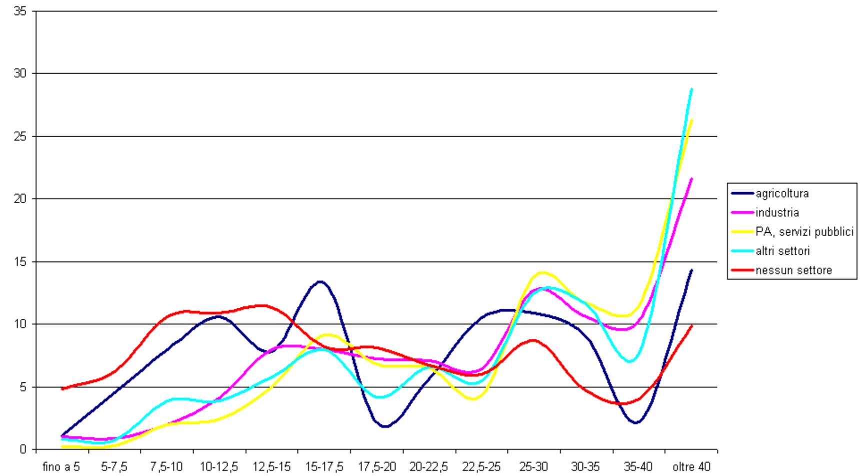
reddito per condizione professionale

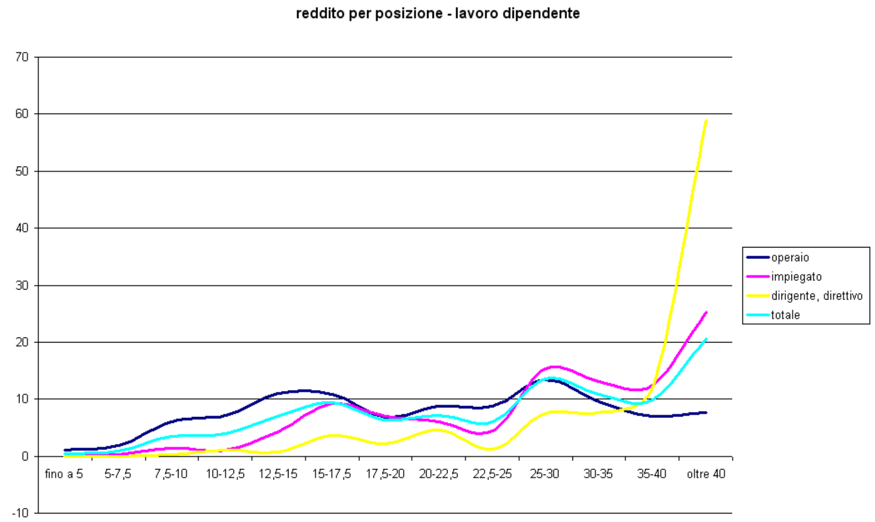


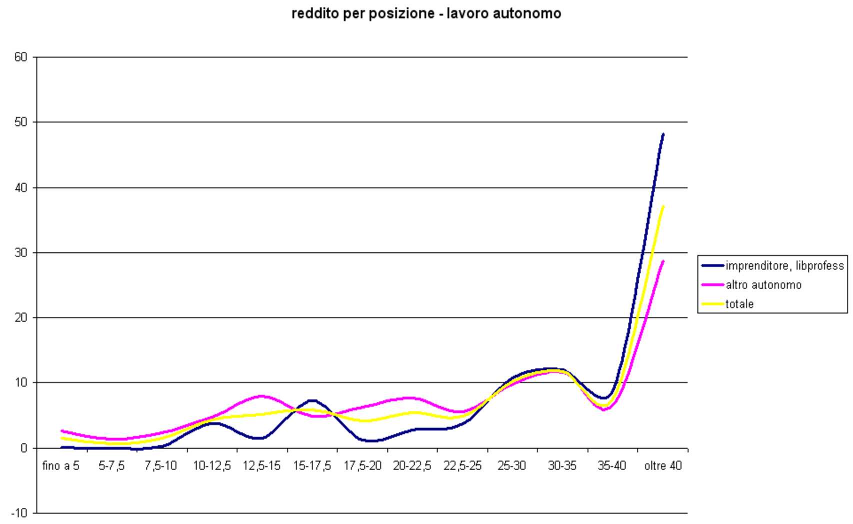
reddito per titolo di studio

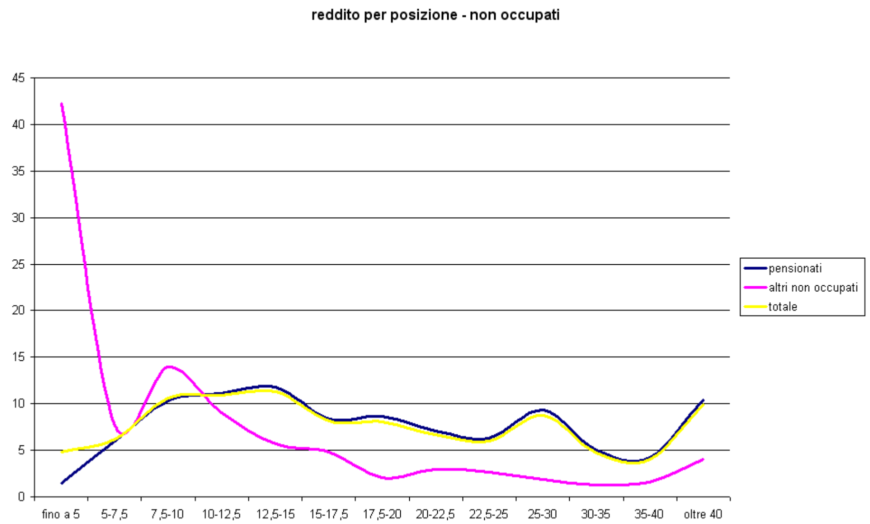


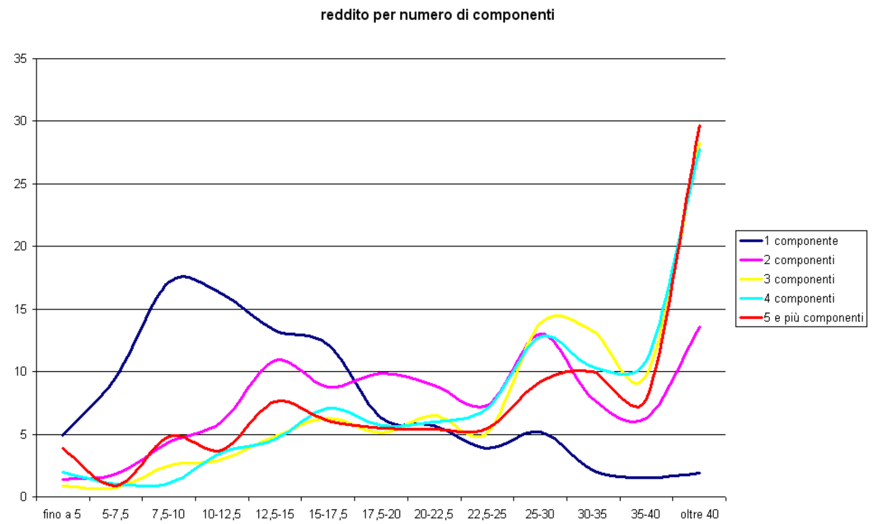
reddito per settore di attività

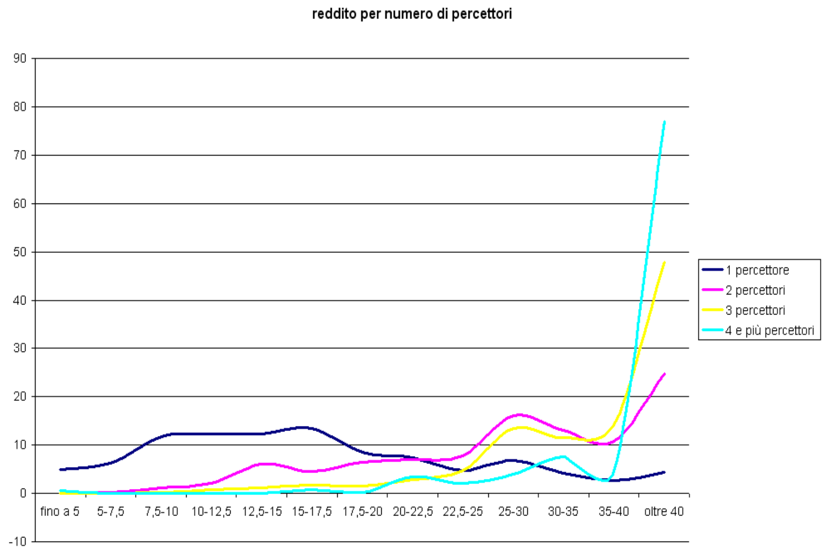


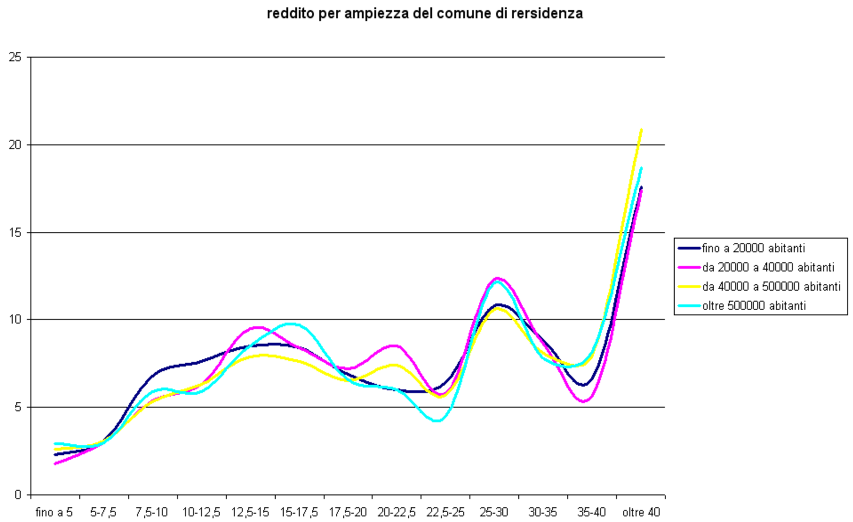

reddito per posizione - lavoro dipendente
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
fino a 5
5-7,5
7,5-10
10-12,5
12,5-15
15-17,5
17,5-20
20-22,5
22,5-25
25-30
30-35
35-40
oltre 40
operaio
impiegato
dirigente, direttivo
totale


reddito per posizione - lavoro autonomo
60
50
40
30
20
10
0
-10
fino a 5
5-7,5
7,5-10
10-12,5
12,5-15
15-17,5
17,5-20
20-22,5
22,5-25
25-30
30-35
35-40
oltre 40
imprenditore, libprofess
altro autonomo
totale


reddito per posizione - non occupati
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
fino a 5
5-7,5
7,5-10
10-12,5
12,5-15
15-17,5
17,5-20
20-22,5
22,5-25
25-30
30-35
35-40
oltre 40
pensionati
altri non occupati
totale

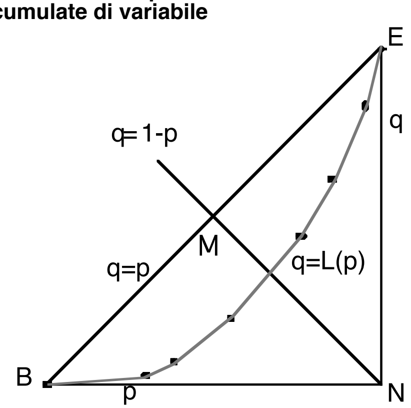

reddito per numero di componenti
35
30
25
20
15
10
5
0
fino a 5
5-7,5
7,5-10
10-12,5
12,5-15
15-17,5
17,5-20
20-22,5
22,5-25
25-30
30-35
35-40
oltre 40
1 componente
2 componenti
3 componenti
4 componenti
5 e più componenti





Il diagramma di Lorenz

Il diagramma è costituito da un triangolo isoscele rettangolo alla cui base sono misurate le frequenze relative cumulate di unità e sull'altezza le quote relative cumulate di variabile



I cateti BN e NE hanno lunghezza uno; l'ipotenusa BE è lunga √2; l'area complessiva del triangolo BNE è 0.5

La diagonale incontra la bisettrice nel punto M di coordinate (1/2,1/2)

I punti (p_i,q_i) formano la relazione tra le frequenze relative cumulate di unità p_i=F_i e la corrispondente quota relativa cumulata di variabile q_i.

Spezzata di Lorenz

E' il grafico più noto (ma non unico) per lo studio della concentrazione

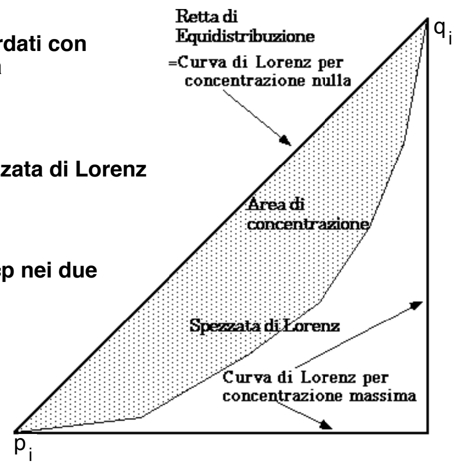
$$L(p) = p_{i-1} + \frac{X_{(i)}}{\mu}(p - p_{i-1}); \quad p \in (p_{i-1}, p_i]; \; i = 1,2,\ldots,n$$

I due vertici (0,0) e (1,1) sono raccordati con segmenti di retta attraversando la successione dei puti (p_i, q_i)

il grafico che ne risulta è detto spezzata di Lorenz

La spezzata coincide con la retta q=p nei due vertici

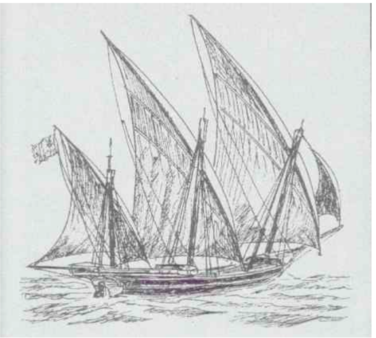
Il grafico della spezzata è crescente e rimane sempre al di sotto della retta di equidistribuzione (q ≤ p)



Caratteristiche della spezzata di Lorenz

La spezzata di Lorenz è il grafico di una funzione non decrescente e convessa

$$L(p) = p_{i-1} + \frac{X_{(i)}}{\mu}(p - p_{i-1}); \quad p \in (p_{i-1}, p_i]; \; i = 1,2,\ldots,n$$

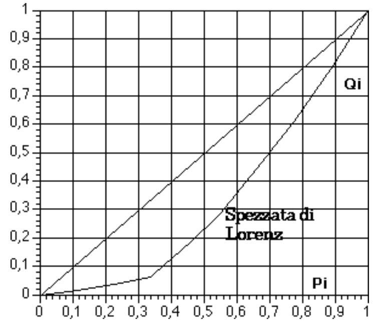


L'inclinazione dei segmenti è positiva (potrebbe essere negativa se qualche modalità avesse valore negativo ad esempio debiti o perdite come reddito negativo).

L'inclinazione dei segmenti è crescente. Infatti le modalità $X_{(i)}$ sono ordinate in senso crescente.

Esempio di spezzata di Lorenz

Gruppi	Matricole	Serie ord.	N_i	f_i	P_i	g_i	Q_i
Scientifico	35475	5115	1	0.1111	0.1111	0.0175	0.0175
Medico	8034	5280	1	0.1111	0.2222	0.0181	0.0356
Ingegneria	48489	8034	1	0.1111	0.3333	0.0275	0.0631
Agrario	5115	32115	1	0.1111	0.4444	0.1099	0.1729
Economico	53610	35475	1	0.1111	0.5556	0.1214	0.2943
Politico-Soc.	32115	45450	1	0.1111	0.6667	0.1555	0.4498
Giuridico	45450	48489	1	0.1111	0.7778	0.1659	0.6157
Letterario	58721	53610	1	0.1111	0.8889	0.1834	0.7991
Diplomi Un.	5280	58721	1	0.1111	1.0000	0.2009	1.0000
	292289		9				



Modalità in classi

Si usa lo stesso schema sostituendo alle modalità ordinate $X_{(i)}$ le medie di classe μ_i qualora siano note oppure una loro stima.

$$L(p) = p_{i-1} + \frac{\mu_i}{\mu}(p - p_{i-1}); \quad p \in (p_{i-1}, p_i]; \; i = 1,2,\ldots,k$$

Le medie sono ordinate in senso crescente. La media globale è μ.

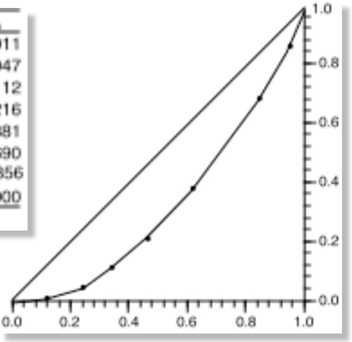
Poiché si ignora il comportamento della variabile nelle classi è necessario fare delle ipotesi per definire la spezzata di Lorenz.

Se la distribuzione all'interno delle classi è simmetrica non si introducono distorsioni nella rappresentazione dei dati altrimenti la spezzata può sia risultare più alta che più bassa in relazione alla retta di equidistribuzione

Esempio

Utenze industriali di energia elettrica per ammontare dei consumi

Consumi		Utenti	c_i	f_i	$(Xi)f_i$	p_i	g_i	Q_i
0	5	34	2.50	0.113	0.283	0.113	0.011	0.011
5	10	38	7.50	0.127	0.950	0.240	0.036	0.047
15	20	29	17.50	0.097	1.692	0.337	0.065	0.112
20	25	36	22.50	0.120	2.700	0.457	0.104	0.216
25	30	47	27.50	0.157	4.308	0.613	0.165	0.381
30	40	69	35.00	0.230	8.050	0.843	0.309	0.690
40	50	29	45.00	0.097	4.350	0.940	0.167	0.856
50	75	18	62.50	0.060	3.750	1.000	0.144	1.000
		300		1.000	26.083			



Le quote evidenziano la classe "30-40" come livello di maggiore concentrazione locale (31% dei consumi).

Solo l'1% spetta ai 34 utenti della classe "0-5".

La situazione perciò sembra piuttosto ineguale.

Spezzate alternative

Dalle ipotesi fatte sulle classi discende il comportamento presunto della spezzata nelle stesse classi.

Supponiamo che la distribuzione all'interno di ogni classe si presenti nei due estremi con le frequenze:

Modalità	*Frequenza*
α_i	$\lambda_i f_i$
β_i	$(1-\lambda_i) f_i$

$$soggette\ \ ai\ \ vincoli: \begin{array}{l} L_i \le \alpha_i < \beta_i \le U_i \\ \alpha_i \lambda_i f_i + \beta_i (1-\lambda_i) f_i = \mu_i \end{array}$$

Solitamente la curva di Lorenz è costruita ipotizzando l'assenza di variabilità all'interno della classe cioè $\alpha_i=\beta_i=c_i$ (cioè il valore centrale)

Poiché la spezzata è convessa racchiuderà un'area inferiore a quella reale

Spezzate alternative/2

Se aumenta (β_i-α_i) e variano le frequenze relative, la spezzata descriverà tutte le posizioni nel triangolo RST.

Minima:

$\beta_i=\alpha_i=c_i$ con frequenza f_i

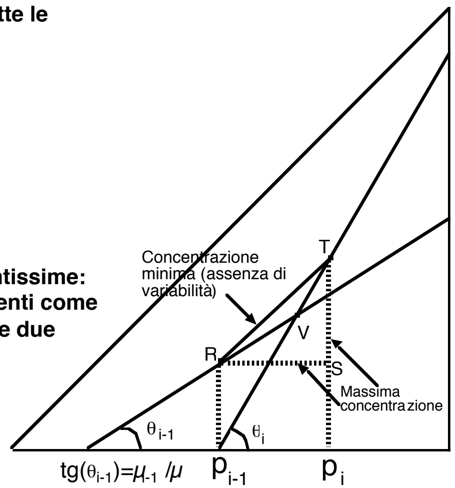
Massima:

$\alpha_i=L_i$ con frequenza f_i-1/n

$\beta_i=U_i$ con frequenza 1/n

Soluzioni intermedie ne esistono tantissime: ad esempio i due tratti RV e VT aventi come snodo il punto di intersezione delle due tangenti.

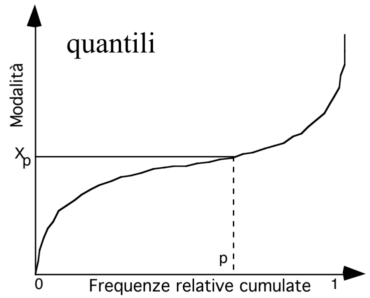
Tutte le spezzate sono convesse.



Funzione di graduazione

Sia X una variabile con dominio (0,∞) con media finita μ e funzione di ripartizione F(x)

***(il dominio infinito non deve preoccupare dato che è l'astrazione di un fenomeno in continua espansione*).**



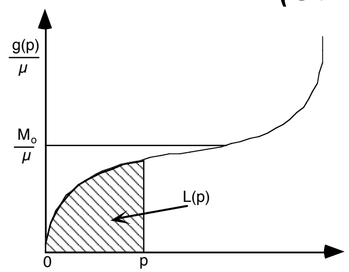
La funzione di graduazione è:

$$F^{-1}(p) = X_p = g(p) = \begin{cases} Min\{x | F(x) \ge p\} & se\ \ 0 < p \le 1 \\ 0 & se\ \ p = 0 \end{cases}$$

La g(.) è, per costruzione, non decrescente e continua a sinistra per 0<p≤1.

La g(p) è anche nota come funzione quantile.

Funzione di concentrazione
(Curva di Lorenz)



La funzione di concentrazione può essere espressa con l'integrale di Riemann-Stieltjes:

Di solito a=0

$$L(p) = \frac{1}{\mu}\int_0^p [g(t) - a]dt; \quad \mu = \int_0^1 [g(t) - a]dt$$

cioè la L(p) è una funzione di area: ad ogni "p" la funzione associa l'area sottesa alla curva di graduazione (divisa per μ) nell'intervallo (0,p).

La definizione -solo apparentemente complessa- è valida sia per variabili continue che discrete

Esempio

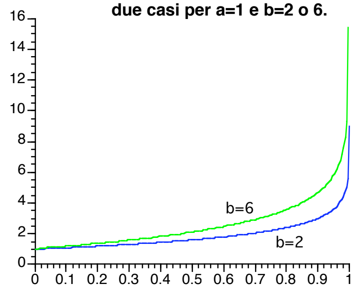
Supponiamo che i dati di un fenomeno siano descritti con un modello avente funzione quantile logaritmica

$$g(p) = a - bLn(1-p);$$

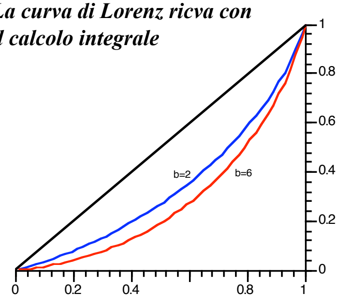
$$L(p) = \frac{1}{a+b}\int_0^p \left[a - bLn(1-t)\right]dt$$

$$= p + \left(\frac{b}{a+b}\right)(1-p)Ln(1-p)$$

In figura sono rappresentati due casi per a=1 e b=2 o 6.



La curva di Lorenz ricva con il calcolo integrale



Da notare la corrispondenza biunivoca tra funzione quantile e curva di Lorenz.

Modelli per la curva di Lorenz

Il legame fra la curva di Lorenz e la quantile è molto stretto per cui il suo studio non è alternativo allo studio dei modelli di distribuzione.

Talvolta l'esame delle curve di Lorenz può essere più fruttuoso e la loro descrizione più facile che non le altre curve

Non mancano però riserve a causa dei troncamenti -non sempre plausibili- del campo di variazione per i per i quantili ottenuti a partire dalle curve di Lorenz.

Altri autori giudicano questo approccio privo di una adeguata base teorica ed empirica.

Nello studio degli ordinamenti di Lorenz questa tecnica sta assumendo sempre più importanza.

Un modello per la curva di Lorenz

Cerchiamo una funzione matematica con i seguenti requisiti:

Positività $0 \le L(p;d) \le 1; \quad \lim_{F\to 0} L(p;d) = 0; \quad \lim_{F\to 1} L(p;d) = 1;$

Nondecrescente $p_1 < p_2 \Rightarrow L(p_1;d) \le L(p_2;d)$

Convessità

$$\mathrm{L}\left[\mathrm{a}\mathrm{p}_1 + (1-\mathrm{a})\mathrm{p}_2;\mathrm{b}\right] \le \mathrm{a}\mathrm{L}(\mathrm{p}_1;\mathrm{d}) + (1-\mathrm{a})\mathrm{L}(\mathrm{p}_2;\mathrm{d}); \quad 0 \le a \le 1$$

Unicità per l'equidistribuzione:

$$L(p;d) = F \quad per \quad p \in [0,1] \quad solo \quad per \quad un \quad d = d^*$$

Un modello per la curva di Lorenz/2

Nel caso che la funzione di concentrazione sia espressa da una curva dotata di derivate prime e seconde allora

$$L'(p;d) = \frac{g(p)}{\mu} > 0; \qquad L''(p;d) \ge 0;$$

Che recepiscono l'inclinazione positiva e la convessità

Il fatto che l'ammontare medio della variabile da ripartire sia finito cioè E(x)<∞ comporta:

$$\lim_{p\to 1-} x_p[1-p] = \lim_{p\to 1-} \frac{x_p}{\mu}[1-p] =$$

$$= \lim_{p\to 1-} g(p)[1-p] = \lim_{p\to 1-} L'(p;d)[1-p] = 0$$

Code pesanti, ma non troppo

Esempi

1. $L(p)=p^b(2-p)^a;\ b\ge a, b+a=1;$ Pietra (1941)
2. $L(p)=p^a e^{-b(1-p)};\ a\ge 1, a+b>\sqrt{a}$ Kakwani e Podder (1973)
3. $L(p)=-abp+(1-a+ab)p^c+a\left[1-(1-p)^b\right];\ a,b,c>0;$ *Maddala e Singh* (1977)
4. $L(p)=\left[1-(1-p)^a\right]^b;$ *Raasche, Gaffney, Koo, Obst* (1980)
5. $L(p)=\dfrac{(1-a)^2 p}{\left[(1+a)^2-4ap\right]};\quad 0<a<1;$ *Aggarwal, Singh* (1984)
6. $L(p)=pA^{p-1};\ A>1$ Gupta (1984)
7. $L(p)=\dfrac{p[1+(a-1)p]}{1+(a-1)p+b(1-p)};\ a,b>0;\ b-a+1>0;$ *Arnold* (1986).
8. $L(p)=[ap]^{b(1-p)};\ a,b\ge 0$

Analisi

Controlliamo che la espressione seguente sia una curva di Lorenz

$$L(p)=\frac{Ln(1-\beta p)}{Ln(1-\beta)};\quad 0<\beta<1$$

Si vede subito che L(0)=0 e L(1)=1. Per la convessità si ha:

$$L'(p)=\left[\frac{-\beta}{Ln(1-\beta)}\right]\frac{1}{(1-\beta p)}>0;\ L''(p)=\left[\frac{-\beta^2}{Ln(1-\beta)}\right]\frac{\beta}{(1-\beta p)^2}>0$$

La media della distribuzione è finita

$$\lim_{p\to 1-} L'(p;d)[1-p]=\lim_{p\to 1-}\left[\frac{-\beta}{Ln(1-\beta)}\right]\frac{(1-p)}{(1-\beta p)}=0$$

Contraddizioni

La derivata prima della funzione di concentrazione è:

$$L'(p)=\frac{F^{-1}(p)}{\mu}$$

Tenuto conto che la curva di Lorenz nei punti estremi tende ad assumere l'inclinazione dei cateti si ha:

$$\lim_{p\to 0+} L'(p)=0,\qquad \lim_{p\to 1-} L'(p)=\frac{x_{max}}{\mu}$$

Ne consegue che ad esempio

$$L(p)=p^b(2-p)^a\Rightarrow L'(p)=L(p)\left[\frac{b}{p}-\frac{a}{2-p}\right]\Rightarrow 0\le x\le(b-a)$$

per cui tale funzione non è adatta per rappresentare un fenomeno che si espande sistematicamente.

Contraddizioni/2

Nota la curva di Lorenz si può determinare la funzione di ripartizione o di densità

$$L(p)=p^b\Rightarrow L'(p)=bp^{b-1}\Rightarrow bp^{b-1}=\frac{x}{\mu}$$

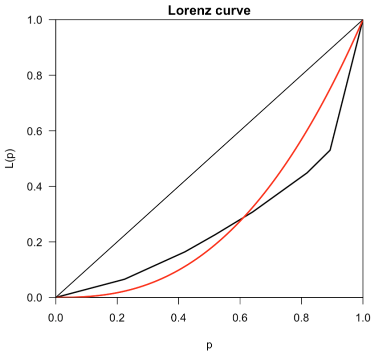
$$\Rightarrow\left[F(x)\right]^{b-1}=\frac{x}{b\mu}\Rightarrow F(x)=\left[\frac{x}{b\mu}\right]^{\frac{1}{b-1}},\ x>0,\ f(x)=\frac{1}{\mu b(b-1)}\left[\frac{x}{b\mu}\right]^{\frac{2-b}{b-1}}$$

Per b>1 si ottiene una corretta funzione di Lorenz, ma tutte le funzioni di densità sono a forma di L

Tale descrizione è corretta solo per i redditi aldilà di una certa soglia (in genere elevata), quale il modello di Pareto

Stima dei parametri

p	q	y=Ln(q)	x=Ln(p)	Regr.LIN(C2:C7;D2:D7;0;1)
0.224	0.035	-3.3524072	-1.4961092	**2.530317**
0.421	0.095	-2.3538784	-0.8651224	0.25295906
0.598	0.190	-1.6607312	-0.5141645	**0.7634915**
0.720	0.270	-1.3093333	-0.3285041	16.1408909
0.818	0.345	-1.0642109	-0.2008929	3.52424115
0.893	0.475	-0.7444405	-0.1131687	
1.000	1.000			



$$q = p^d, \ d > 1$$

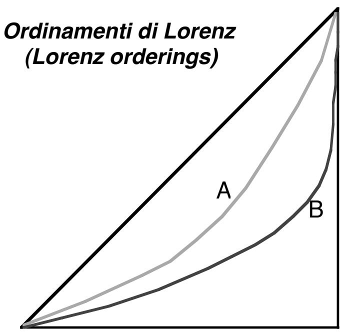
$$Ln(q) = dLn(p) \Rightarrow y = mx$$

La validità di questa procedura è dubbia.

L'adattamento è discutibile

Analisi della concentrazione

Ordinamenti di Lorenz (Lorenz orderings)



Solo se la curva di una distribuzione è interamente contenuta in un'altra si può dire che la contenente è più concentrata.

Se le due curve si intersecano il giudizio sulla maggiore o minore concentrazione deve essere sospeso

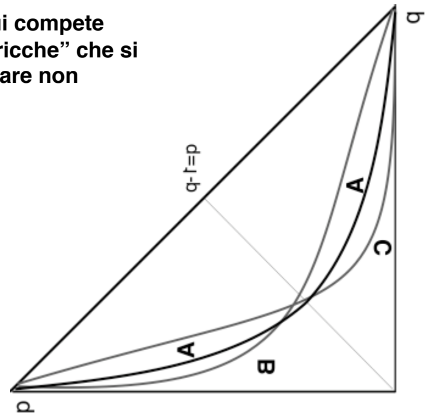
Confronto di curve Lorenz

Nella B vi è un ristretto numero di unità più "abbienti" e numerose unità "povere" che quasi si equidistribuiscono il resto dell'ammontare.

Nella C c'è un folto gruppo di "poveri" cui compete gran parte della variabile e poche unità "ricche" che si ripartiscono in modo uniforme l'ammontare non assegnato alle altre.

B per paesi "arretrati"

C per paesi "avanzati"

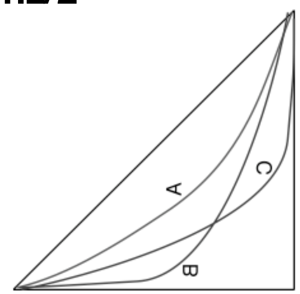


Confronto di curve Lorenz/2

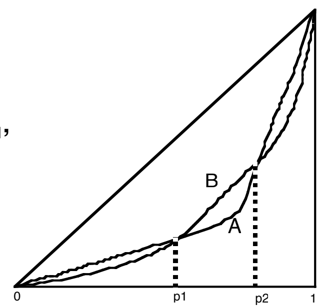
Se una curva è tutta inclusa in un'altra allora una situazione è meno ineguale dell'altra.

Se le curve si intersecano non sarà possibile stabilirlo univocamente:

Se si dà più importanza ai livelli minori allora è la C che è più ineguale, se invece pesano di più i livelli maggiori lo sarà la B.



Nella 2ª figura il confronto dà esito univoco solo ragionando per zone separate: (0, p_1), (p_1, p_2) e (p_2, 1). Nel primo e nel terzo è meno concentrata la "A"; in quella centrale è meno concentrata la "B".



Classificazione di Fellman

Questo autore dimostra che se due variabili (reddito prima e reddito dopo la tassazione) sono legate dalla relazione funzionale y=t(x) allora:

$$L_y(p) = L_x(p) \quad per \quad 0 \le p \le 1 \quad se \quad \frac{t(x)}{x} = costante;$$

$$L_y(p) \le L_x(p) \quad per \quad 0 \le p \le 1 \quad se \quad \frac{t(x)}{x} = monotona\ crescente$$

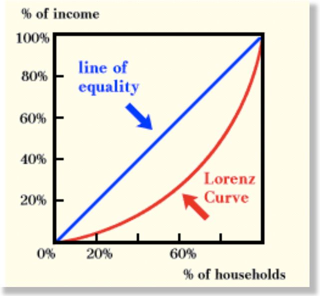
$$L_y(p) \ge L_x(p) \quad per \quad 0 \le p \le 1 \quad se \quad \frac{t(x)}{x} = monotona\ decrescente;$$

Una politica di tassazione progressiva cioè con un rapporto t(x)/x monotono crescente, ottiene maggiore ineguaglianza a tutti i livelli.

N.B. Le ordinate della Lorenz sono più vicine alla curva di massima concentrazione.

Misura della concentrazione

Sin dal suo primo apparire (1905) la curva di Lorenz si è dimostrata uno strumento utile e docile per lo studio della disuguaglianza



"Ci può essere molta diversità di opinioni su cosa si intenda per distribuzione della ricchezza ineguale, ma tutti concordano sull'importanza di sapere se l'attuale distribuzione stia diventando più o meno ineguale".

Nonostante i buoni propositi del suo inventore la curva di Lorenz non può sempre essere utilizzata per valutare la minore o maggiore concentrazione.

Requisiti degli indici di concentrazione

L'ideale sarebbe un indice C(X) che aumenti per situazioni di ineguaglianza crescente

Inoltre, dovrebbe assumere un valore diverso per ogni diversa distribuzione della variabile.

Questo è impossibile perché gli indici hanno natura sintetica e le inevitabili compensazioni impediscono la corretta diversificazione.

Alcuni requisiti possono però aiutare a scegliere gli indici da usare

- **NORMALIZZAZIONE**
- **INVARIANZA PER TRASFORMAZIONI MOLTIPLICATIVE**
- **DIMINUZIONE PER TRASFORMAZIONI ADDITIVE**
- **SENSIBILITA' AI TRASFERIMENTI**

Normalizzazione e univocità agli estremi

Per comodità di riferimento è almeno necessario che:

a) C(x)=0 se e solo se la distribuzione ha concentrazione nulla
b) C(x)=1 se e solo se la distribuzione ha concentrazione massima

Nulla cambierebbe se il massimo fosse 100 o 1000.

c) Un C(x) crescente indica un aumento di concentrazione

Questo però non implica che ogni aumento di concentrazione debba dare un aumento di C(x)

La normalizzazione non è un requisito essenziale, ma è utile se si confronta la concentrazione di *data set* di diversa numerosità.

Non tutti gli autori sono concordi su tale requisito: alcuni sostengono che è ben diversa la situazione in cui due imprese si bipartiscono il mercato dal caso in cui 1000 imprese controllano ciascuna un millesimo

Esempi

L'indice seguente: somma degli scarti al quadrato tra quote semplici di popolazione e variabile

$$C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} (f_i - g_i)^2$$

Assume valori nell'intervallo 0 (assenza di concentrazione) e 1-1/n (concentrazione massima). All'aumentare di n, il limite superiore tende all'unità.

Indice di Emlen

$$C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} g_i e^{-g_i}}$$

Varia nell'intervallo $\left[\sqrt[n]{e}, e\right]$ e pertanto non raggiunge mai i due estremi. Possiamo però normalizzarlo sottraendo uno e dividendo per il numero di Eulero "e".

Invarianza per trasformazioni moltiplicative

Se si alterano proporzionalmente tutte le modalità, l'indice deve rimanere invariato

$$C(ax_1, ax_2, \ldots, ax_n) = C(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad per \quad a > 0$$

Tale requisito consente il confronto della concentrazione di variabili espresse in unità di misura diverse

Ad esempio la concentrazione dei redditi deve risultare la stessa sia che i redditi siano in lire sia che in euro

C'è da obiettare che chi nulla aveva nella ripartizione X con nulla rimane nella ripartizione aX, ma è chiaro che la sua posizione relativa è peggiorata se a>1 ed è migliorata se a<1.

Esempi

La statistica di Eberhardt è richiamata per verificare l'accentramento spaziale di attività su di un territorio

$$S = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} g_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{k} g_i\right)^2}$$

Varia tra 1/n (assenza di concentrazione) ed uno (massima concentrazione).

E' standardizzata dato che lo sono le quote relative di variabile g_i

$$g_i = \frac{x_i}{\mu} f_i = \frac{a x_i}{a\mu} f_i$$

Diminuzione rispetto a traslazioni

Se tutte le modalità aumentano di una quantità positiva l'indice deve diminuire

C(y)=C(x+a) < C(x) se a>0

$$g_i = \frac{Y_i}{n\mu_y} = \frac{X_i + a}{n(\mu_x + a)}$$

all'aumentare di "a" le differenze tra modalità tenderanno a sparire (le g_i si avvicinano alle f_i) e la distribuzione tenderà sempre di più alla concentrazione nulla

Tale requisito è utile per le variabili misurate con scale prive di uno zero naturale perché altrimenti si potrebbe ridurre la concentrazione facendo partire la scala dalla costante più conveniente.

Forse utile nelle applicazioni sulla salute

Sensibilità ai trasferimenti

E' la proprietà più importante e qualificante nello studio della concentrazione

$x_1, x_2, \dots, x_n$ → $y_1, y_2, \dots, y_n$

$$\begin{cases} y_i = x_i & \text{per } i=1,2,\dots,n;\ i \neq r \text{ e } i \neq s; \\ y_r = x_r - h; & \text{per } i=r \\ y_s = x_s + h & \text{per } i=s \end{cases}$$

$C(y) < C(x)$ *La media rimane invariata*

Principio di Pigou-Dalton

Un trasferimento neutrale (order preserving) rispetto alla graduatoria dei redditieri da una unità più "ricca" ad una unità più "povera" deve ridurre l'indice di concentrazione

Tipo di trasferimento

Alla Robin Hood

Una unità ricca cede una quota parte del suo reddito ad una unità più povera.

I ricchi sono meno ricchi ed i poveri sono meno poveri

Alla Superciuk

Una unità povera cede una quota parte del suo reddito ad una unità più ricca.

I ricchi diventano più ricchi ed i poveri più poveri

Supponiamo che A abbia debiti per 10'000 euro e B debiti per 5'000. Che effetto avrebbe un trasferimento alla Superciuk di 2'000 euro?

Sensibilità ai trasferimenti/2

Supponiamo che alla variabile possa applicarsi il principio della utilità marginale decrescente ben noto dal corso di microeconomia.

Un trasferimento da una unità "ricca" ad una "povera" dovrebbe diminuire la concentrazione più di quanto non faccia un trasferimento tra due unità "ricche" di cui una leggermente meno ricca (principio di Kolm)

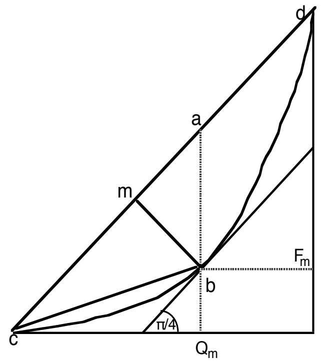
L'effetto dovrebbe essere massimo per un trasferimento tra la prima e l'ultima in graduatoria.

A parità di quantità di reddito trasferito, due trasferimenti simultanei di segno opposto: 1) Robin Hood e 2) Superciuk potrebbero ridurre la concentrazione globale.

Indice di Pietra-Ricci

E' la distanza massima, parallela alla diagonale q=1-p, tra la curva di Lorenz e la retta di equidistribuzione, cioè MB.

Per la stessa funzione si può usare il segmento AB che è proporzionale a MB e che ha il vantaggio di variare tra zero ed uno:



Il segmento "ab" è inoltre pari alla metà dell'area del triangolo "cbd" ovvero del triangolo di area massima iscrivibile all'interno della curva di Lorenz.

$$area\ "cbd" = \frac{cd * mb}{2} = \frac{\sqrt{2}\,\frac{ab}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{ab}{2}$$

Il segmento AB è pari alla differenza $D_2 = p_\mu - q_\mu$ di quote cumulate di unità e di variabile associate alla media aritmetica.

Significato analitico

L'indice ha un parallelo con una misura di variabilità relativa

$$P_m = \sum_{x_i \le \mu} f_i; \quad Q_m = \sum_{x_i \le \mu} g_i; \quad x_m = \max\{x_i | x \le \mu\}$$

$$D_2 = \left(P_\mu - Q_\mu\right) = \left(P_m - Q_m\right) = \frac{1}{2}\left[\left(P_m - Q_m\right) + \left(P_m - Q_m\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(P_m - Q_m\right) + \left(P_m - Q_m\right) + 1 - 1\right]$$

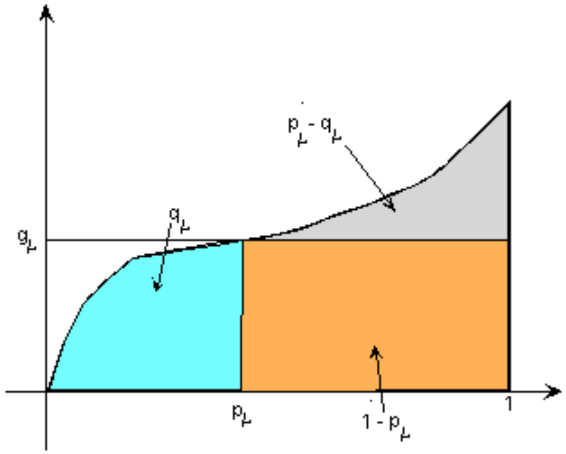
$$= \frac{1}{2}\left[1 - Q_m - \left(1 - P_m\right) - Q_m + P_m\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=m+1}^{k} \frac{X_i}{\mu} f_i - \sum_{i=m+1}^{k} f_i - \sum_{i=1}^{m} \frac{X_i}{\mu} f_i + \sum_{i=1}^{m} f_i\right]$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left[\sum_{i=m+1}^{k} X_i f_i - \mu \sum_{i=m+1}^{k} f_i - \sum_{i=1}^{m} X_i f_i + \mu \sum_{i=1}^{m} f_i\right] = \frac{1}{2\mu}\left[\sum_{i=m+1}^{k} X_i f_i - \mu \sum_{i=m+1}^{k} f_i - \sum_{i=1}^{m} X_i f_i + \mu \sum_{i=1}^{m} f_i\right]$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left[\sum_{i=m+1}^{k} \left(X_i - \mu\right) f_i - \sum_{i=1}^{m} \left(X_i - \mu\right) f_i\right] = \frac{\sum_{i=1}^{k} |X_i - \mu| f_i}{2\mu}$$

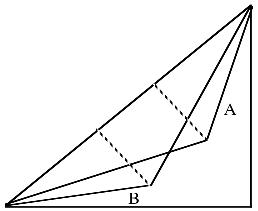
Una distribuzione è meno concentrata di un'altra se gli scarti relativi da "*μ*" sono, in media, più piccoli.

Interpretazione alternativa



Il Pietra-Ricci è la frazione di reddito che deve essere trasferita dal gruppo più "ricco" (> μ) al più "povero" (< μ) per azzerare la concentrazione

Caratteristiche



Manca di univocità

L'indice è normalizzato (varia tra zero ed uno)

L'indice è invariante rispetto a trasformazioni di scala

Diminuisce se aumentano tutti aumenta se diminuiscono tutti

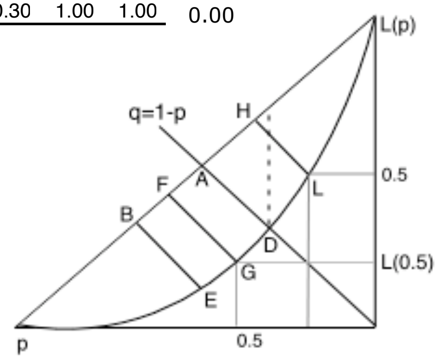
$$Q(X+a) = Q(X) + \frac{a}{a+\mu}\left[F(X) - Q(X)\right] \Rightarrow D_2(X+a) = \frac{\mu}{\mu+a} D_2(X)$$

Si avvede del trasferimento se avviene tra unità su lati diversi di *μ* altrimenti si realizza una compensazione che lo lascia invariato.

$$X_r < \mu \;\; e \;\; X_s > \mu \Rightarrow |X_r + d - \mu| + |X_s - d - \mu| = \mu - d - X_r + X_s - d - \mu = |X_r - \mu| + |X_s - \mu| - 2d$$

Esempio

Addetti		Imprese	μ	f	g	p	q	
0	10	18	6.66	0.10	0.00	0.10	0.00	0.10
1	50	23	33.89	0.13	0.02	0.24	0.02	0.22
5	99	71	76.13	0.42	0.14	0.67	0.16	0.51 ←
10	499	36	286.15	0.21	0.26	0.88	0.43	0.45
50	999	14	731.59	0.08	0.26	0.97	0.69	0.28
1000	5000	5	2333.33	0.03	0.30	1.00	1.00	0.00
		167	225.66	1.00				



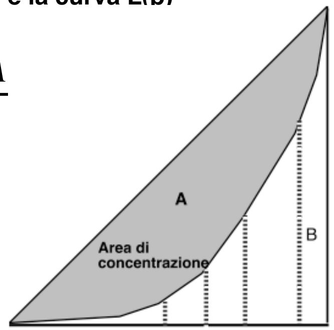
BE=PIETRA-RICCI

Rapporto di concentrazione

E' l'indice più noto e più discusso di concentrazione

Si basa sull'area compresa tra la retta q=p e la curva L(p)

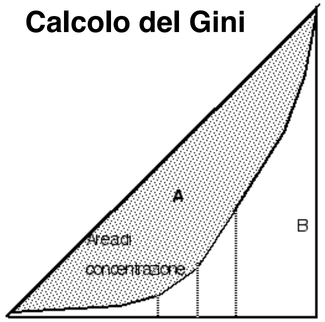
$$R = \frac{Area\ \ A}{Area\ \ A\ + Area\ \ B} = \frac{Area\ \ A}{1/2}$$



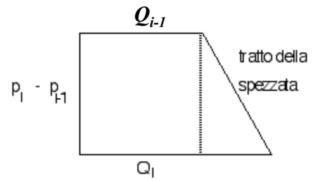
L'area è nulla se la curva di Lorenz si sovrappone alla retta q=p ed è pari a 0.5 quando c'è massima concentrazione.

Ne consegue che R è un indice normalizzato (tra zero ed uno)

Calcolo del Gini



Per il calcolo della area sono disponibili diversi metodi. In particolare si può utilizzare la regola dei trapezi applicata però all'area B e sfruttando la relazione: area "A" = 0.5 - area "B".

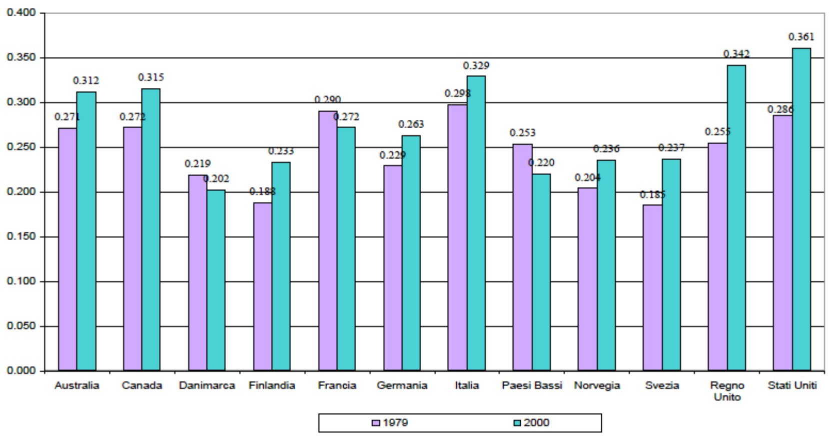


$$Area = Altezza * \left(\frac{Base\ \text{minore} + Base\ \ \text{maggiore}}{2}\right) \Rightarrow Area_i = \frac{(p_i - p_{i-1})(q_i + q_{i-1})}{2};$$

$$R = 1 - \left[\sum_{i=1}^{n}(p_i - p_{i-1})(q_i + q_{i-1})\right] = 1 - \left[\sum_{i=1}^{n} f_i(q_i + q_{i-1})\right]$$

Poiché la curva di Lorenz è convessa, l'uso della formula dei trapezi porta ad approssimare per eccesso l'area B (e quindi per difetto l'area A) cioè R è sottostimato

Indice di Gini per i redditi disponibili



La disuguaglianza misurata dal Gini aumenta nei Paesi con forti immigrazioni e scarsa integrazione

Formula alternativa

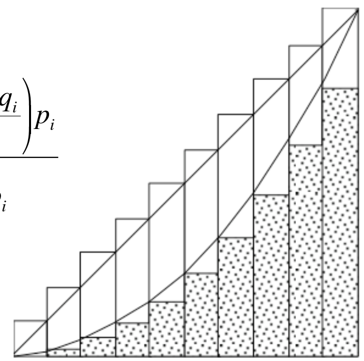
$$A = \sum_{i=1}^{n} p_i; \qquad B = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

"A" è una approssimazione dell'area di massima concentrazione (rettangoli bianchi)

"B" approssima l'area complementare (rettangoli punteggiati).

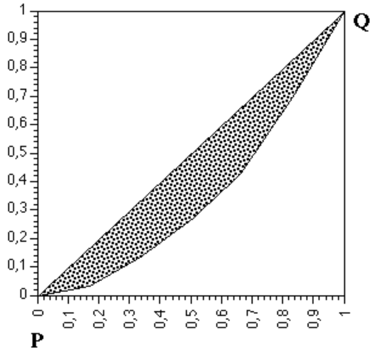
La loro differenza relativa dà una misura approssimata dell'area di concentrazione

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} q_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i - q_i}{p_i}\right)p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$



Calcolo del rapporto di concentrazione

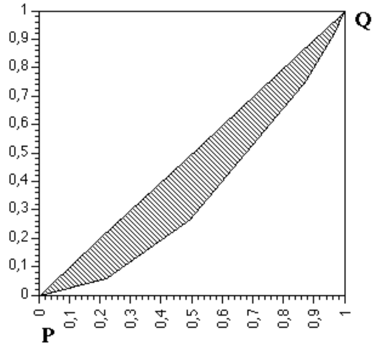
Ministeri	Progetti Legge	Serie 64 ord.	n_i	f_i	P_i	g_i	Q_i	$Q_{i-1}+Q_i$	$f_i*(Q_{i-1}+Q_i)$
Agricoltura	3	1	1	0.1667	0.1667	0.0333	0.0333	0.0333	0.0056
Beni cult.	8	3	1	0.1667	0.3333	0.1000	0.1333	0.1667	0.0278
Bilancio	5	4	1	0.1667	0.5000	0.1333	0.2667	0.4000	0.0667
Difesa	1	5	1	0.1667	0.6667	0.1667	0.4333	0.7000	0.1167
Mezzogi.	4	8	1	0.1667	0.8333	0.2667	0.7000	1.1333	0.1889
Parte. Stat.	9	9	1	0.1667	1.0000	0.3000	1.0000	1.7000	0.2833
	30		6	1.0000		1.0000			0.6889



R = 1- 0.6889 = 0.3111

Dati raggruppati

Classi di reddito		n_i	C_i	f_i	P_i	$C_i n_i$	g_i	Q_i	$Q_{i-1}+Q_i$	$f_i*(Q_{i-1}+Q_i)$
0	10	22	5	0.2200	0.2200	110	0.0564	0.0564	0.0564	0.0124
10	20	28	15	0.2800	0.5000	420	0.2154	0.2718	0.3282	0.0919
20	30	37	25	0.3700	0.8700	925	0.4744	0.7462	1.0179	0.3766
30	40	9	35	0.0900	0.9600	315	0.1615	0.9077	1.6538	0.1488
40	50	4	45	0.0400	1.0000	180	0.0923	1.0000	1.9077	0.0763
		100		1.0000		1950	1.0000			0.7061



R = 1- 0.7061 = 0.2939

Qual è l'effetto di approssimare le medie di classe con i loro valori centrali?

Proprietà di R

- **L'indice passa da zero (assenza di concentrazione) ad uno (massima concentrazione) aumentando con l'aumentare della disuguaglianza nella distribuzione.**
- **Esprime la percentuale di variabile che deve essere trasferita da ciascuna unità all'altra che la precede nella graduatoria per ottenere la distribuzione uniforme**
- **Il rapporto di concentrazione varia tra zero ed uno.**

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(p_i - q_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

Il numeratore è sempre non negativo (perché le $p_i \geq q_i$) ed è sempre inferiore o uguale al denominatore (perché le q_i sono non negative)

Reazioni ai trasferimenti

Analizziamo la dazione di un ammontare "d" dalla X_i alla X_j con $X_i > X_j$ nell'ipotesi che il trasferimento sia neutrale.

L'effetto sull'indice è

$$\Delta R = -\frac{2d}{\mu}\left(\frac{i-j}{n}\right)$$

Fissata la quota da trasferire ($d/n\mu$) e fissato pure "n", l'effetto del trasferimento dipende solo dal numero di posizioni tra la X_j ed X_i.

I trasferimenti tra modalità intorno ad una moda avranno più effetto che non quelli tra unità lontane dalle mode perché qui sarà minore (j-i).

Se in una classe di reddito 10'000-11'000 euro ci sono 20 unità e nella classe 50'000-51'000 ce ne sono 10, l'effetto di spostare 100 euro dall'estremo superiore all'estremo inferiore avrà maggiore impatto sul Gini nel primo caso.

Gini e differenza media

Il rapporto di concentrazione si collega in modo diretto alla differenza semplice media.

$$\Delta = \frac{2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left|x_i - x_j\right|}{n^2} = \frac{2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\left[x_{(i)} - x_{(j)}\right]}{n^2} \qquad P_i = \frac{i}{n} \quad se \;\; n_i = 1 \;\; \forall \;\; i$$

$$= \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[ix_{(i)} - \sum_{j=1}^{i}x_{(j)}\right] = 2\mu\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{i}{n}\frac{x_{(i)}}{n\mu} - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{x_{(j)}}{n\mu}\right)\right]$$

$$= 2\mu\sum_{i=1}^{n}\left[p_i\left(q_i - q_{i-1}\right) - \left(p_i - p_{i-1}\right)q_i\right] = 2\mu\left[q_i p_{i-1} - p_i q_{i-1}\right]$$

$$dove \;\; p_i = \frac{i}{n}; \quad p_i - p_{i-1} = \frac{1}{n}; \;\; q_i - q_{i-1} = \frac{x_{(i)}}{n\mu}$$

e pertanto: R=D/2μ

Il valore di R scaturisce dal confronto a coppie tra tutti i valori riscontrati nella rilevazione.

Indice di Bonferroni

$$\textit{Modalità raggruppate} \qquad\qquad \textit{Modalità singole}$$

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{p_i - q_i}{p_i}\right) \qquad\qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{(i)}}{\mu}\left(1 - \sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}\right)$$

Soddisfa il principio dei trasferimenti di Pigou-Dalton

E' di "sinistra" perché la sensibilità aumenta man mano che il trasferimento va verso unità più povere (principio di Kolm).

$$\Delta B = \frac{-d}{(n-1)\mu} * \sum_{r=j}^{i-1}\frac{1}{r}$$

Esempio

ICIAP. Numero di contribuenti per superficie del negozio

Superficie		Negozi	μ	f	g	p	q	(p-q)/p	(p-q)/(1-p)	p/(1-p)
0	25	481	16.67	0.497	0.138	0.497	0.138	0.723	0.714	0.988
26	50	244	37.52	0.252	0.157	0.749	0.295	0.606	1.808	2.984
51	100	127	74.04	0.131	0.162	0.880	0.457	0.481	3.533	7.345
101	150	36	124.76	0.037	0.077	0.917	0.534	0.418	4.639	11.100
151	200	23	175.06	0.024	0.069	0.941	0.603	0.359	5.739	15.982
201	300	18	251.19	0.019	0.078	0.960	0.681	0.291	6.921	23.821
301	400	21	348.14	0.022	0.126	0.981	0.807	0.178	9.404	52.778
400	600	9	497.22	0.009	0.077	0.991	0.883	0.108	11.534	106.556
601	800	6	696.35	0.006	0.072	0.997	0.955	0.042	13.431	321.667
801	1000	3	867.33	0.003	0.045	1.000	1.000	0.000		
		968	60.10	1.000	1.000			3.205	57.723	543.219

$$B = \frac{3.205}{10} = 0.321$$

Concentrazione industriale

La concentrazione industriale è collegata alle varie forme di mercato: monopolio, oligopolio, concorrenza perfetta, etc.

Lo studio della concentrazione industriale si esplica nell'esame della ripartizione del carattere "ampiezza" fra le unità di un rilevazione di imprese.

L' ampiezza può essere espressa in termini di dipendenti, di profitti, di vendite, di fatturato, quotazioni azionarie.

Una misura utile di concentrazione industriale dovrebbe:

1) Dipendere dalle dimensioni delle imprese;

2) Dal numero di imprese ("n" compare esplicitamente)

3) Dalla situazione di mercato (sensibilità)

Indice entropico di Theil

E' la media ponderata (con pesi g_i) delle differenze logaritmiche tra quote relative di carattere e frequenze relative di unità

$$T = \sum_{i=1}^{k} g_i Ln\left(\frac{g_i}{f_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} g_i\left[Ln(g_i) - Ln(f_i)\right] = \sum_{i=1}^{k} g_i Ln(g_i) - \sum_{i=1}^{k} g_i Ln(f_i)$$

La scala logaritmica ha un effetto telescopico: avvicina i valori grandi ed allontana i valori piccoli

Per calcolare l'indice è necessario che nessuna unità abbia modalità zero o negativa.

Tuttavia si può dimostrare che il termine: $g_i Ln(g_i)$ tende a zero man mano che g_i diventa piccola

Proprietà dell'indice di Theil

Secondo tale indice una distribuzione è più concentrata di un'altra se rispetto a questa ha una minore entropia cioè ha meno disordine

- L'indice T assume valore minimo zero (massima entropia) quando tutte le unità hanno la stessa modalità.
- assume valore massimo Ln(n) (entropia nulla) quando tutte una sola unità è diversa da zero.
- E' standardizzato perché coinvolge solo delle frazioni
- Diminuisce per variazioni additive

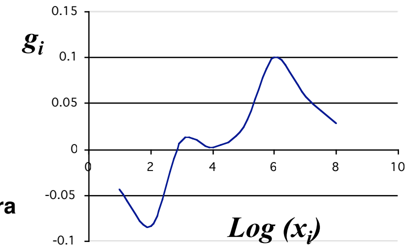
Calcolo del Theil

Superficie di vendita dei supermercati in Liguria

Superficie		Supermercati	μ_i	f_i	g_i	g_i*Ln(μ_i/μ)
0	200	41	133.33	0.118	0.051	-0.043
200	300	159	246.28	0.458	0.363	-0.084
300	350	74	323.17	0.213	0.222	0.009
350	400	38	373.30	0.110	0.132	0.024
400	500	17	446.32	0.049	0.070	0.025
500	750	9	1016.20	0.026	0.085	0.100
750	1000	7	864.58	0.020	0.056	0.057
1000	1500	2	1166.67	0.006	0.022	0.029
		347	310.79	1.000	1.000	0.117

L'indice di Theil, T=0.117 deve essere comparato con il suo massimo in rilevazioni di questa ampiezza: Ln(347)=5.85.

Ne consegue che in Liguria sussiste una situazione di sostanziale equità di ripartizione della superficie di vendita tra i supermercati.



L'indice di Herfindahl

E' dato dalla media aritmetica dei quadrati delle singole ampiezze rapportate alla media aritmetica:

$$H_1 = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\mu_i}{\mu}\right)^2 f_i = \sum_{i=1}^{k}\frac{g_i^2}{f_i}$$

l'indice vale uno nel caso di un mercato formato da imprese di eguale ampiezza; vale invece "n" se il mercato è un monopolio

E' legato al coefficiente di variazione:

$$CV^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\mu_i - \mu}{\mu}\right)^2 f_i = H_1 - 1$$

e quindi rimane invariato per trasformazioni moltiplicative e diminuisce per trasformazioni additive

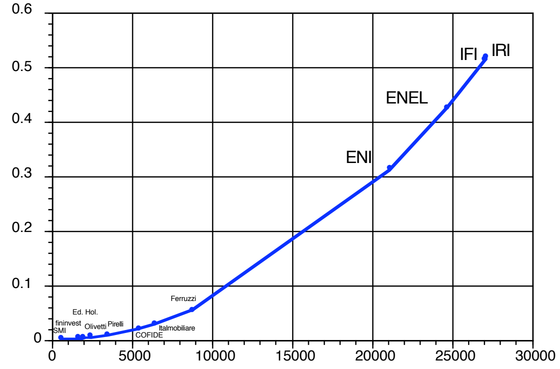
Secondo H una distribuzione è più concentrata di un'altra quando gli scarti relativi al quadrato dalla media aritmetica sono, in media, più GRANDI.

Esempio

Le ”top 12” italiane.

Capitale netto (in miliardi di lire) dei principali gruppi italiani.

Gruppo	Capitale netto	$(1/n)(\mu_i/\mu)^2$
IFI	27182	0.5158
IRI	27078	0.5119
ENEL	24697	0.4258
ENI	21115	0.3112
Ferruzzi	8812	0.0542
Italmobiliare	6423	0.0288
COFIDE	5297	0.0196
Pirelli	3483	0.0085
Edizione Holding	2437	0.0041
Olivetti	2052	0.0029
fininvest	1861	0.0024
SMI	672	0.0003
Media	10925.75	1.8856



Minimo: 1

Massimo: 12

H=1.9

Lunghezza della curva

La concentrazione nulla e la massima si riflettono in posizioni estreme della spezzata di Lorenz. La lunghezza della spezzata può fornire perciò una base per misurare la concentrazione

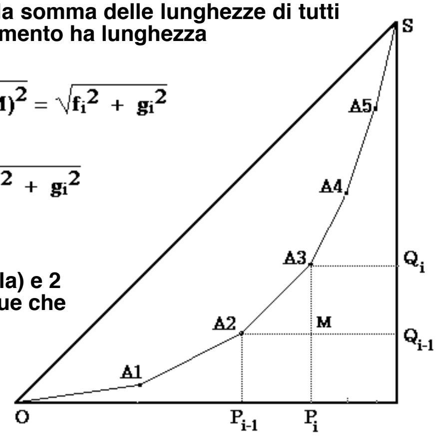
La lunghezza "L" della spezzata è pari alla somma delle lunghezze di tutti i segmenti componenti. Il generico segmento ha lunghezza

$$A_2A_3 = \sqrt{(A_2M)^2 + (A_3M)^2} = \sqrt{f_i^2 + g_i^2}$$

La lunghezza "L" sarà quindi $L = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{f_i^2 + g_i^2}$

l'indice L varia tra √2 (concentrazione nulla) e 2 (concen trazione massima). Ne consegue che L'indice

$$\lambda = \frac{L - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

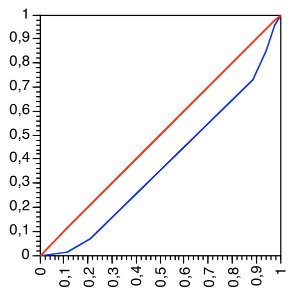


E' un indice normalizzato

Calcolo di "λ"

La società CEMENTIR SpA presentava la seguente ripartizione del capitale sociale. Valutare la concentrazione

Classi di azioni		azionisti n_i	azioni $\mu_i n_i$	f_i	g_i	$\sqrt{f_i^2 + g_i^2}$
fino a	100	21	935	0.1135	0.0147	0.1145
101	200	18	3380	0.0973	0.0533	0.1109
201	400	125	41880	0.6757	0.6600	0.9446
401	800	10	7963	0.0541	0.1255	0.1366
801	1000	7	6522	0.0378	0.1028	0.1095
1001	e più	4	2770	0.0216	0.0437	0.0487
		185	63450	1.0000	1.0000	1.4649



La concentrazione non è elevata perché gran parte degli azionisti si colloca nella classe 201-400. infatti l'indice normalizzato vale

$$\lambda = \frac{1.4649 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = 0.0865$$

Proprietà di λ

L’indice rientra nella classe di Gastwirth-Kakwani

$$r(x) = \sqrt{1 + (x/\mu)^2} - \sqrt{2};$$

$$r'(x) = x\Big/\sqrt{x^2 + \mu^2} \geq 0 \quad se \quad x \geq 0; \quad r''(x) = \mu^2\Big/\sqrt{\left(x^2 + \mu^2\right)^3} \geq 0$$

$$t'(x) = \left(\frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)\left\{1\Big/\sqrt{\left(x^2 + \mu^2\right)^3} - 1\Big/\sqrt{\left[(x-d)^2 + \mu^2\right]^3}\right\} \leq 0$$

che è negativa per ogni “x” e quindi l’indice di concentrazione λ reagisce a tutti i trasferimenti, ma con sensibilità crescente al diminuire della “x” ovvero l’effetto è più rilevante quando la “x” è piccola (indice “leftist”).