

Introduzione alla probabilità

Questo è un ciclo di lezioni che coinvolge la Sorte, Ma ...

- Non sarà fornito alcun trucco per vincere al superenalotto, lotto, gratta-e-vinci, bingo e pesche varie
- Non verranno dati talismani o filtri per scongiurare eventi funesti
- Non saranno indicate formule capaci di attrarre su di noi e sui nostri cari la Buona Ventura



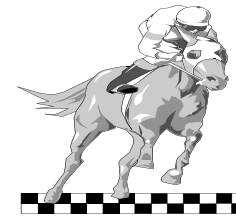
Riflessione

Lo scopo è di illustrare il ruolo della Sorte nella conoscenza scientifica e nel sapere professionale

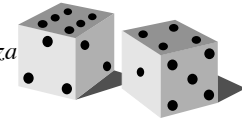
➡ L'umanità è progredita grazie alla conoscenza di leggi naturali sempre più numerose ed alla fiducia in esse riposta

Sappiamo che se si sospende un masso sul piede di qualcuno e poi lo si lascia cadere qualcuno non sarà contento

➡ Malgrado il progresso vi sono moltissimi eventi che non siamo in grado di prevedere.



*Tutto è incerto.
Questa è l'unica certezza*



Esperimento deterministico

Ovunque si attivi un processo di osservazione e/o misurazione di un fenomeno soggetto a variazione c'è un esperimento

L'esito di un esperimento deterministico è prevedibile con certezza

ESEMPIO: area del quadrato:

$$Y = X^2$$



X=Lato

noto il lato, l'area del quadrato è univocamente determinata: $x=5 \rightarrow y=25$

Negli esperimenti di laboratorio relativi a molte leggi fisiche le relazioni sono "quasi-deterministiche" in cui gli errori sono imputabili a problemi di misurazione.



Esperimento casuale



Un esperimento casuale è una prova che può essere riproposta -fisicamente o virtualmente- una, due, infinite volte nelle medesime condizioni senza che si possa stabilire quale sarà l'esito della prossima manifestazione.

Esempio

Ci sono situazioni in cui l'incertezza è non è trascurabile ed altre in cui è dominante



L'ora, il luogo e le modalità con cui si verifica un incidente automobilistico dipendono da innumerevoli fattori ed una modifica in qualcuno potrebbe evitare il sinistro.

Non è possibile stabilire, tra tutti coloro che si metteranno in macchina domani, chi subirà un incidente, ma è praticamente certo che a qualcuno capiterà (si spera con solo lievi danni al mezzo).

Casualità ed incertezza

Decidere significa spesso stabilire un legame di CAUSALITA' tra un insieme "A" ed un insieme "B" in condizioni di incertezza.

ESEMPIO: i popoli primitivi, terrorizzati dagli eventi naturali, cercavano di placare gli dei con riti propiziatori

EVENTO: lampi e tuoni

CAUSA: ira degli dei



La valutazione del rapporto causa/effetto è legato alla CASUALITA'

Significato di “casuale”

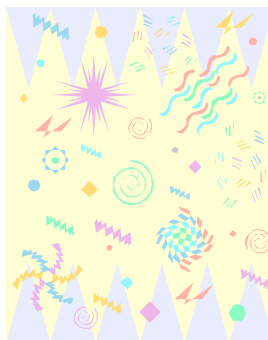
Ciò che è casuale è anche incerto ed in ogni incertezza potrebbe esserci un elemento di casualità

Lessicale: Accadimento involontario, fortuito imprevedibile, accidentale

Statistico: Riflessioni e valutazioni su di un fenomeno soggetto all'azione della pura Sorte.

E' impossibile stabilire a priori quale sarà la sua esatta manifestazione;

Stocastico, aleatorio, erratico,



La Sorte

E' una forza che agisce in tutto l'Universo

ESTRANEA

CAPRICCIOSA

CIECA

CINICA

INACCESSIBILE

INAPPELLABILE

INDIFFERENTE

NEUTRA

IMPREVEDIBILE

DESTRUTTURATA

La Sorte ignora tutto e trascura tutto e garantisce la *par condicio*

E' invocata per la sua trasparenza e per la sua equità.

E' temuta per l'abbandono di ogni discrezione.



Superstizioni e furbizie

Si è lanciata una moneta -fisicamente perfetta- per 50 volte e per 50 volte è uscito “testa”. Prima della 51ª prova vi viene proposto di scommettere 10'000 lire:

 *Esce testa e vinci 10'000
altrimenti perdi la puntata*

 *Esce croce e paghi 10'000
altrimenti incassi la puntata*



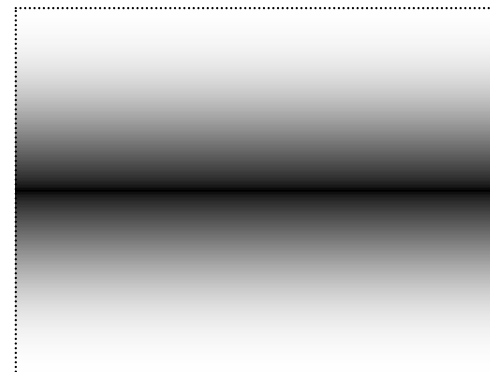
Una moneta perfetta non ha memoria dei lanci precedenti e quindi si deve essere “razionalmente” indifferenti alle due puntate.

Se siete convinti che dopo 50 “teste” sia più favorita la “croce” come vi spiegate che si comprano molti più biglietti nella ricevitoria in cui si è già vinto?

Percezione della casualità

**SCRIVETE, SENZA FARVI VEDERE E SENZA CONSULTARVI,
UN NUMERO TRA 1 E 4**

Riscontro nel corso



Quale di queste successioni è casuale?

A

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

B

$\{1, \dots\}$

C

$\{1, 5, 3, 4, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 6, 1, 4, 3, 6, 1, 5, 5, 6, 2, 3, 2, 5, 1, 5, 3, 4, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 6, 1, 4, 3, 6, 1, 5, \dots\}$

D

$\{3, 1, 4, 5, 2, 3, 1, 6, 4, 3, 5, 6, 4, 1, 5, 6, 3, 1, 5, 4, 3, 6, 1, 4, 1, 6, 4, 3, 5, 6, 4, 1, 5, 6, 3, 1, 5, 4, 3, 6, 1, 4, \dots\}$

E

$\{2, 1, 5, 3, 4, 5, 1, 4, 3, 6, 2, 6, 2, 5, 5, 1, 3, 5, 2, 3, 4, 3, 6, 2, 4, 2, 1, 6, 5, 1, 2, 6, 4, 3, 5, 4, 1, 2, 1, 3, 5, 6, \dots\}$

Non si deve parlare di un evento casuale, ma di una sequenza di eventi casuali.

Definizione algoritmica

Una successione è casuale se non può essere espressa da un algoritmo semplice.

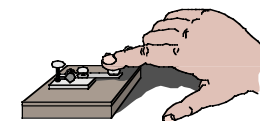
ESEMPIO

Dobbiamo trasmettere -per telegramma- il dominio dei valori possibili nel primo estratto di una ruota del gioco del lotto.

“conta da uno a novanta con incrementi unitari” quindi otto parole invece delle novanta necessarie a descrivere l'intera urna.

La semplificazione (1:90) è abbastanza forte per poter considerare la successione: $\{1, 2, \dots, 90\}$ non casuale.

Questa definizione chiarisce alcuni punti, ma ne confonde altri. Cosa si intende per “semplice”?



La legge empirica del caso

Sia "S" il dominio di una variabile con un NUMERO FINITO di modalità

$$S = \{E_1, E_2, \dots, E_k\} \text{ con } k < \infty$$

Si supponga che l'esperimento sia ripetuto "n" volte

Modalità	Frequenza
E_1	n_1
E_2	n_2
$\vdots$	$\vdots$
E_k	n_k
$n = \sum_{i=1}^k n_i$	

E' un fatto che se si ripete la procedura, la frequenza relativa si stabilizza su un numero $P(E_i)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_i}{n} \right) = P(E_i) \text{ per } i = 1, 2, \dots, k$$

Anche se non si tratta di un limite nel senso matematico

La legge empirica del caso/2

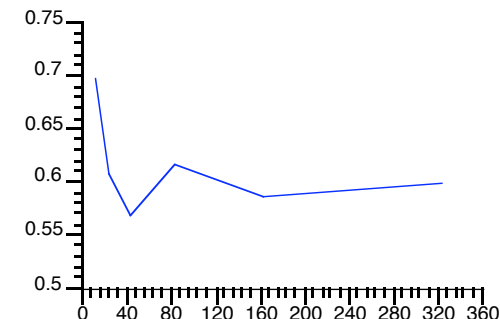
Esperimento del lancio di una puntina da disegno (Variabile binaria)

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la punta non è rivolta verso l'alto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Numerose verifiche sperimentali corroborano l'idea di convergenza delle frequenze relative.

Un esperimento replicato molte volte in condizioni simili, fa emergere una struttura stabile nelle frequenze relative

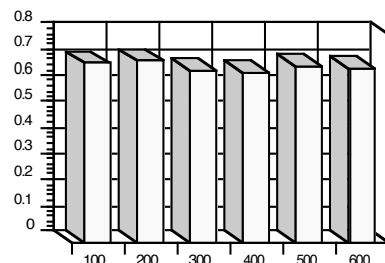


La legge empirica del caso/3

Estrazione con reimmissione di una biglia da un'urna contenente 6 biglie di colore diverso in proporzione 2:4



Dalla	alla	Estr.	Estr. Tot.	Fr.	Fr. tot.
1	100	69	69	0.69	0.690
101	200*	70	139	0.70	0.695
201	300	59	198	0.59	0.660
301	400	63	261	0.63	0.653
401*	500	76	337	0.76	0.674
501	600	64	401	0.64	0.668



L'esito di una singola sperimentazione non può essere previsto.

Siamo però abbastanza sicuri di ciò che succede nel complesso purché si possa disporre di una serie considerevole di repliche in condizioni stabili

Questo fatto è la legge empirica del caso.

E' una definizione? No

Poiché è impossibile condurre un numero infinito di esperimenti, la probabilità dell'evento viene approssimata con il valore della frequenza per n grande.

Tuttavia questo è solo un modo per assegnare le probabilità agli eventi.



Stabilisce però un requisito.

Nel caso di esperimenti casuali ripetibili moltissime volte, le probabilità da dare agli eventi debbono essere coerenti con il limite delle frequenze relative.

Ovvero, ogni scostamento da questa definizione dovrebbe essere adeguatamente motivato.

Un modello per le probabilità

La costruzione di modelli è importante in tutte le scienze per poter lavorare su una realtà più grande, complessa e mutevole.

Siamo alla ricerca di un modello che ci consenta di studiare la casualità dei fenomeni incerti

cioè una rappresentazione semplificata ed astratta delle osservazioni fatte su fenomeni soggetti alla Sorte.

La seguente terna è considerata molto utile per questi fini

$$\text{Modello di probabilità} : (S, W, P) \quad \text{dove} \quad \begin{cases} S = \text{dominio della prova} \\ W = \text{Insieme di insiemi di } S \\ P(.) = \text{funzione che misura la casualità} \end{cases}$$

La prova o esperimento

E' un esperimento -indotto o spontaneo- con esito casuale.

● Il valore di chiusura di un titolo di borsa

● Esito del lancio di un dado

● Livello di inquinamento da elettrosmog

● Esame di laurea



La PROVA o ESPERIMENTO è una situazione che può essere replicata (almeno in teoria) ed il cui esito è reso imprevedibile dall'azione della Sorte.

Le ripetizioni debbono essere tali da potersi dire repliche di uno stesso esperimento e non relative ad esperimenti diversi.

L'evento elementare

E' la descrizione di uno dei possibili risultati della prova. E' "elementare" perché non ulteriormente frazionabile

ESEMPIO: le possibili ragioni di ammanco di inventario sugli scaffali di un supermercato sono:

E_1 = Shoplifting; E_2 = Appropriazione indebita

E_3 = Errore di conteggio; E_4 = Fantasmi



Gli eventi della prova debbono essere ESAUSTIVI ED UNIVOCI:

- 1) Ogni risultato deve corrispondere ad un "evento"
- 2) Ogni risultato deve corrispondere ad un solo "evento"

L'universo degli eventi

Ad ogni esperimento casuale è associato l'universo degli eventi S: una lista che elenca tutti e solo gli eventi elementari in una data prova.

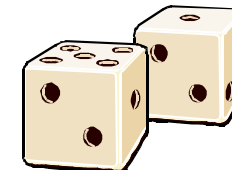
ESEMPIO: lancio di una moneta

Universo degli eventi $S=\{T,C\}$



ESEMPIO: lancio di due dadi

Universo degli eventi $S=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$



I giochi d'azzardo aiutano, come in un laboratorio, a sviluppare nozioni e tecniche utili in situazioni più complesse.

Il formalismo di Kolmogorov

Nel 1933 Kolmogorov sviluppò una TEORIA DELLA PROBABILITA' sfruttando le analogie tra insiemi ed eventi.

L'idea guida del matematico russo è che sia possibile sviluppare la teoria della probabilità senza definire la probabilità.

Si stabiliscono solo le regole a cui deve sottostare la sua assegnazione e le entità a cui deve essere assegnata.

Le entità sono gli eventi e le regole sono i postulati.

L'approccio alla probabilità di Kolmogorov (detto assiomatico) ha il grande merito di considerare l'assegnazione della probabilità il risultato di una scelta che può quindi non essere unica o non essere esatta.

In questo modo restituisce alle applicazioni della probabilità, l'incertezza che sembra sparire con definizioni troppo esatte (in realtà è solo abilmente nascosta)

Eventi ed Insiemi

Per proseguire abbiamo bisogno dei concetti della TEORIA DEGLI INSIEMI applicata agli eventi

L'insieme più importante è l'UNIVERSO DEGLI EVENTI "S" i cui elementi sono gli eventi elementari della PROVA.

$$S = \{E_1, E_2, \dots, E_k\} \quad \text{con} \quad k < \infty$$

Gran parte dei concetti della insiemistica si estendono agli eventi.

Le illustrazioni usano i DIAGRAMMI DI VENN cioè figure geometriche disegnate sul piano.

Eventi ed Insiemi/2

L'insiemistica impone all'universo degli eventi una precisa struttura:

"S" è un modello della prova di cui riporta tutto e solo ciò che è rilevante.

La struttura però è vincolata. Devono essere eventi univoci ed esaustivi



Eventi non separabili

Non sempre questo è possibile:



Eventi sfocati



Eventi frazionari

Gli aspetti negativi di eventuali forzature sono compensati dal vantaggio di una trattazione snella e rigorosa.

Operazioni sugli eventi

Per gestire le operazioni con gli eventi adoperiamo le regole degli insiemi.



INSIEMI E SOTTOINSIEMI



OPERAZIONI BINARIE: coinvolgono due eventi



UNIONE



INTERSEZIONE



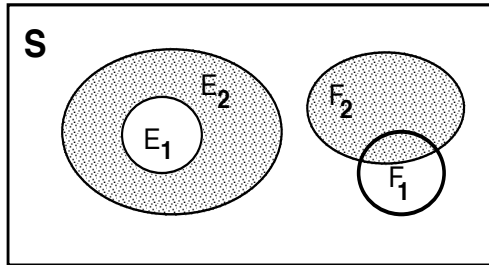
OPERAZIONI UNARIE: coinvolgono un solo evento



NEGAZIONE O COMPLEMENTO

insiemi e sottoinsiemi

Un insieme “E” è un sottoinsieme di “F”, scritto $E \subset F$, se ogni evento elementare in “E” appartiene anche ad “F” e almeno un evento di “F” non è in “E”;



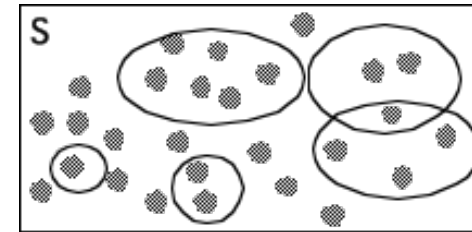
quindi “F” implica “E” perché questo si verifica ogni volta che si verifica “F”, ma l'opposto non è necessariamente vero

Nel diagramma E_1 è un sottoinsieme di E_2 , ma F_1 non lo è di F_2 dato che non vi è tutto incluso

Eventi composti

Si configura come un sottoinsieme di S che si verifica se si verifica almeno uno degli eventi elementari che contiene.

L'universo S è rappresentato con il rettangolo in cui ricadono gli eventi elementari (punti grigi).



Gli eventi composti sono i cerchi e le ellissi, interne al rettangolo, disposte intorno a gruppi di eventi elementari.

Uno stesso evento elementare può essere comune a più di un evento composto.

Esempi

1) Nella tris di Cesena corrono

$S = \{\text{Golden Tango, Bernadette, Can Can, Mon Amour, King, Mambo, Jolly, D'Artagnan, Piripicchio, Butterfly, Soldatino, Antonello da Messina}\}$.

L'amico Mandrake, su richiesta della fidanzata Gabriella, dovrebbe giocare $M = \{\text{King, Soldatino, D'Artagnan}\}$; M è un evento composto con gli eventi elementari di S.



2) L'insieme - e quindi l'evento- può essere specificato stabilendo la sua regola di composizione interna e cioè una proprietà che tutti e solo i suoi elementi verificano:

$$F = \{x | x \text{ è una regione italiana}\}$$

Se $X = \text{Molise}$ allora la proprietà è soddisfatta;
se $X = \text{Brezia}$ la proprietà non è soddisfatta.

Eventi composti/2

L'evento composto deriva da una asserzione logica relativa agli eventi elementari di una prova.

Se E_1, E_2, E_3, E_4 sono eventi elementari allora

$$F_1 = \{E_1, E_2\} \text{ e } F_2 = \{E_1, E_3, E_4\}$$

sono eventi composti.

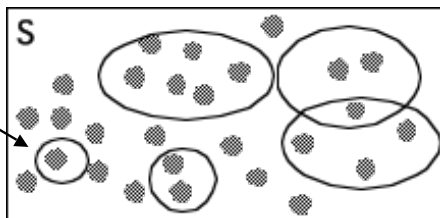
Per indicare lo stato di appartenenza di un evento elementare ad un particolare evento composto si utilizza la simbologia:

$$E_i \in F_j \text{ se } E_i \text{ è un esito incluso in } F_j$$

$$E_i \notin F_j \text{ se } E_i \text{ non è un esito incluso in } F_j$$

Singoletto

E' l'evento composto descritto da un singolo evento elementare.



Il termine “evento” dovrebbe essere attribuito solo a quello composto, anche in forma di singoletto, evitando la locuzione “evento elementare” anche se questa è ormai radicata nell’uso.

La nozione di singoletto consente di applicare le operazioni dell’insiemistica a tutti e solo eventi composti.

Evento certo ed evento impossibile

L’universo degli eventi cambia da prova a prova. Ma due eventi sono sempre presenti.

L'EVENTO CERTO: si verifica sempre è indicato con S)

E' un evento composto formato da TUTTI gli eventi elementari di S

Nel lancio di un dado esce un numero da uno a sei

L'EVENTO IMPOSSIBILE: non si verifica mai (è indicato con $\emptyset$)

E' un evento composto formato da NESSUN evento elementare di S

In una gara con dieci concorrenti arrivare undicesimo

Uguaglianza di insiemi e di eventi

Due eventi si dicono uguali se, contemporaneamente “E” è un sottoinsieme di “F” e questo è un sottoinsieme di “E”.

$$E = F \text{ se } E \subset F \text{ e } F \subset E$$

Esempio:

In uno studio sugli effetti di uno stimolante sul rendimento scolastico si considerano i soggetti a prescindere dal loro sesso per cui gli eventi:

e
sono uguali.
“una pastiglia ha provocato l’effetto su Immacolata”
“una pastiglia ha provocato l’effetto su Calogero”

L'evento negazione

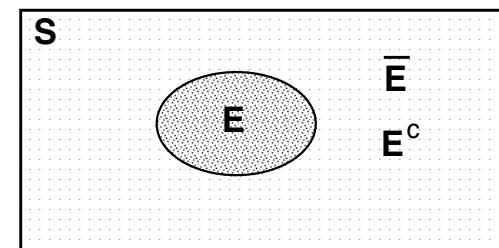
Unione ed intersezione si riferiscono ai singoli eventi, la negazione si riferisce all'intera prova.

L'evento negazione o evento complementare di un evento "A", indicato con A^c cioè "non A" si verifica quando non si verifica "A".

ESEMPIO: previsioni economiche

A= inflazione al di sopra del 2%;

Perché si verifichi A^c è sufficiente che l'inflazione sia minore o uguale al 2%.



L'Evento negazione si indica anche con A^c o con $\bar{A}$

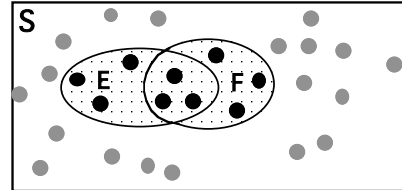
L'evento unione

Dati due eventi "A" e "B". L'evento unione, "C", si verifica se si verifica o l'uno o l'altro o entrambi gli eventi considerati

$$A = (E \cup F) = \{x | x \in E \text{ oppure } x \in F\}$$

ESEMPIO: la mano di poker in 4
I giocatori sono: NORD, SUD, OVEST, EST

Poniamo A: Nord ha un tris;
B: Est ha un full (tris+coppia)



L'evento unione "C" si verifica se Nord ha il tris oppure se Est ha un full, ma si verifica pure se, contemporaneamente, Nord ha il tris ed Est il full (con buona pace di Nord)

Quiz: quando si verifica l'evento: "A oppure B, ma non entrambi" ?

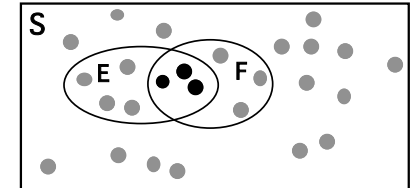
L'evento intersezione

Dati due eventi "A" e "B". L'evento intersezione, "D", si verifica se accadono entrambi gli eventi considerati

$$A = (E \cap F) = \{x | x \in E \text{ e } x \in F\}$$

ESEMPIO: Età della donna in anni compiuti
all'atto del matrimonio

Poniamo A: $28 \leq X \leq 45$; B: $20 \leq Y \leq 40$



L'evento intersezione si verificherà se, contemporaneamente, la donna ha più di 28 anni, ma meno di 40

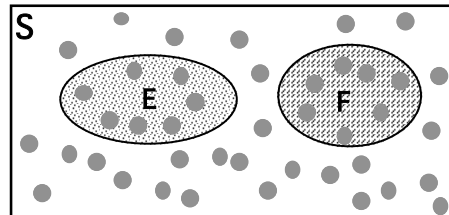
Eventi mutualmente incompatibili

Due eventi che non possono presentarsi insieme sono **MUTUALMENTE INCOMPATIBILI** (a due a due).

In ogni prova se ne può verificare uno solo e quindi essi non hanno elementi in comune

ESEMPIO: nomina del Presidente in un comitato di cinque membri: M1, M2, M3, M4, M5.

A: Presidente è M1
B: Presidente è M2



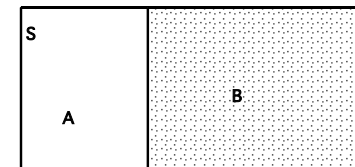
L'intersezione di due eventi incompatibili è un evento impossibile

$$E \cap F = \phi$$

Eventi necessari

Se, in una prova, due eventi sono tali che almeno uno dei due si verifica, si dicono **NECESSARI**.

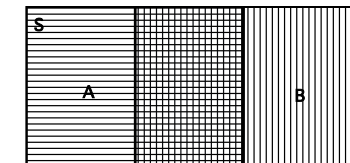
L'essere necessari vuol dire che, insieme, i due eventi costituiscono l'evento certo



Esempio: *eventi necessari e incompatibili*. Esempio: *eventi necessari, ma compatibili*

Una classe di 24 studenti consiste di 14 matricole e 10 del 2° anno.

A: Si sceglie una matricola
B: Si sceglie un 2° anno



Il censimento delle persone distingue tra presenti e residenti (uno status non esclude del tutto l'altro)

A: La persona è presente
B: La persona è residente

Le coperture

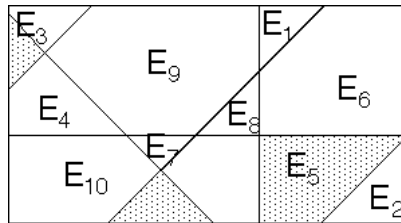
Un insieme di eventi

$$E_1, E_2, \dots, E_k$$

costituisce una copertura dell'universo degli eventi se

$$\bigcup_{i=1}^k E_i = S \quad \text{"unione per } i \text{ che va da uno a } k \text{ di } e \text{ con } i"$$

Insieme formano l'evento certo



La partizione

Un insieme di eventi

$$E_1, E_2, \dots, E_k$$

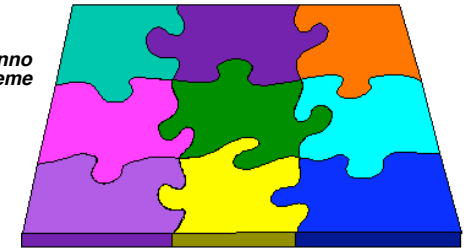
costituisce una PARTIZIONE dell'universo degli eventi se

$$1) E_i \cap E_j = \emptyset \quad \text{Per ogni "i \neq j" (sono incompatibili a coppie)}$$

$$2) \bigcup_{i=1}^k E_i = I \quad \text{Insieme formano l'evento certo}$$

"unione per i che va da uno a k di e con i"

I pezzi del puzzle non hanno parti in comune, ma insieme formano il disegno



Proprietà delle operazioni

Molte peculiarità dell'insiemistica si applicano all'algebra degli eventi

Legge commutativa: $E \cup F = F \cup E$

$E \cap F = F \cap E$

Legge associativa: $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap G$

$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup G$

Legge distributiva: $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$

$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$

Idempotenza: $E \cup E = E$

$E \cap E = E$

Monotonia: $E \subset F \implies E \cup F = F$

$E \cap F = E$

Convoluzione: $(E^c)^c = E$

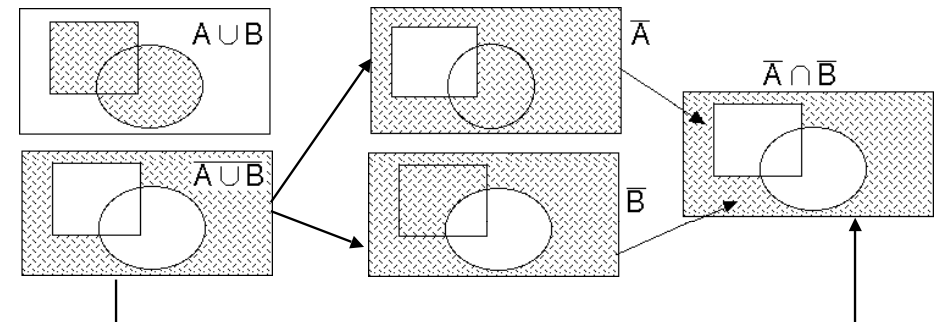
Fra i due eventi estremi valgono le relazioni: $S^c = \emptyset; \quad \emptyset^c = S$

Leggi di De Morgan

L'algebra degli eventi non richiede in realtà che due operazioni: la terza può essere ricavata dalle altre due in base alle leggi di De Morgan sugli insiemi

1) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ Complemento ed unione definiscono l'intersezione

2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ Complemento ed intersezione definiscono l'unione



Applicazione: evento sottrazione

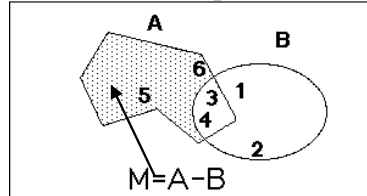
Dati due eventi "A" e "B". L'evento sottrazione, " $M = A - B$ ", si verifica se si verificano gli eventi di "A" che non siano anche in "B".

ESEMPIO: lancio di due dadi di colore diverso

L'universo degli eventi è formato dagli interi $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A: Dado rosso > 2
B: Dado blu < 5

Universo degli eventi



L'evento sottrazione "M" si verificherà se esce un numero più grande di "2", ma che NON sia più piccolo di "5".

E' facile controllare che: $A - B = A \cap \bar{B}$

Le algebre

Con "S" e con l'insiemistica si possono formare tanti altri insiemi;

Tutti questi insiemi formano a loro volta un insieme i cui elementi sono degli insiemi.

Ci interessa un particolare tipo di questi insiemi di insiemi: l'algebra, indicata con W che ha le seguenti caratteristiche:

1. Se $E \in W$ e $F \in W \Rightarrow (E \cup F) \in W$;
- 1bis. Se $E \in W$ e $F \in W \Rightarrow (E \cap F) \in W$;
2. Se $E \in W \Rightarrow E^c \in W$;

Un'algebra non contiene eventi elementari, ma solo eventi composti, anche da un solo evento elementare (SINGOLETTO)

Le condizioni 1 e 1bis sono alternative visto che usarle entrambe porterebbe ad una ridondanza di cui non si ha bisogno.

Le algebre/2

Dato il dominio "S" possiamo costruire una algebra attivando un numero finito di operazioni di unione e negazione o di intersezione e negazione.

Se "S" contiene "k" eventi elementari possiamo costruire sottoinsiemi che contengono un solo elemento, che ne contengono due, tre e così via

Il totale degli eventi composti è: 2^k se k è il numero di eventi elementari

In realtà se ne trattano molti di meno, ma lo schema di Kolmogorov si estende a tutto ciò che è coerente con i postulati e non solo a ciò che interessa.

La funzione di insieme

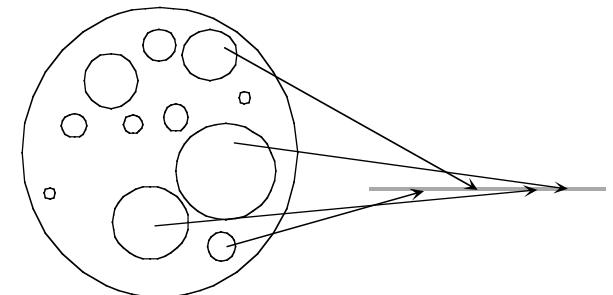
La funzione $f(x)$ è una legge che associa ad ogni punto di un insieme (DOMINIO) uno ed un sol punto di un altro insieme (CODOMINIO o IMMAGINE)

La nozione si estende al caso in cui il dominio è costituito da INSIEMI.

$$y = f(x)$$

FUNZIONE DI INSIEME: l'argomento "X" è un insieme.

Esempio: dominio dei cerchi nel piano con associata la circonferenza



Teoria elementare della probabilità

Esistono diverse presentazioni della probabilità. Noi seguiamo la teoria assiomatica di KOLMOGOROV



Introduzione dei CONCETTI PRIMITIVI: (*PROVA, EVENTO, PROBABILITA'*)



Si stabiliscono i POSTULATI cioè le regole per ragionare di probabilità



Da questi e solo da questi segue il CALCOLO DELLE PROBABILITA'

La teoria delle probabilità forma un modello matematico astratto usato per amministrare razionalmente sensazioni di fiducia, speranza, timore.

L'approccio di Kolmogorov

Perché la teoria non sia una mera raccolta di concatenazioni logiche, ma sia "scienza" i postulati sono attinti dalla realtà osservabile.

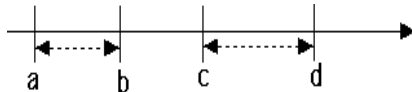
In particolare debbono essere:

- **COERENTI:** non devono generare contraddizioni interne
- **UTILI:** devono essere subito operativi
- **NON RIDONDANTI:** non devono poter essere dedotti da altri postulati

L'approccio di Kolmogorov/2

Un vantaggio dei postulati di Kolmogorov è che essi derivano in modo diretto dall'esperienza.

In fondo, quello che ha fatto Kolmogorov altro non è che allargare agli eventi la misura di una grandezza fisica.



Le lunghezze $(b-a)$ e $(d-c)$ sono sempre non negative.

La lunghezza congiunta dei due intervalli è $(b-a)+(c-d)$ perché non ci siano punti in comune,

LA NON NEGATIVITA' E L' ADDITIVITA' ricorrono nei postulati sulla probabilità.

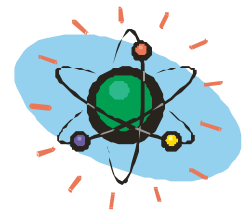
Postulato_0: gli eventi formano un' algebra

Dall'universo degli eventi "S" si possono ricavare tanti sottoinsiemi, incluso l'evento certo ed impossibile.

Indichiamo con "W" l'insieme di tutti gli insiemi comunque derivati da "S"

Tale insieme è detto algebra se:

1. $S \subseteq W$;
2. Se $A \in W \Rightarrow \bar{A} \in W$
3. Se $A_1 \in W$ e $A_2 \in W \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in W$
4. Se $A_1 \in W$ e $A_2 \in W \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in W$

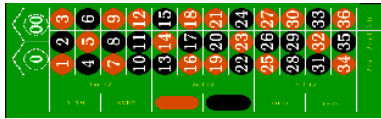


ciò che l'unione FINITA e la negazione di eventi in W (e quindi anche le altre operazioni) generano altri eventi che ricadono pure nell'algebra W

Esempi

Roulette

(36 numeri + "0" e/o "00")



Combinazione	Possibilità	vincita
Numero pieno	1 su 37	35
Cavallo (due numeri contigui)	2 su 37	17
Pieno e cavalli (numero e contigui)	dipende	dipende
Terzina (tre numeri in orizzontale)	1 su 12	11
Carré (4 numeri in quadrato)	1 su 9	8
Sestina (due terzine)	1 su 6	5
Colonna (12 numeri in verticale)	1 su 3	2
Dozzina (12 numeri progressivi)	1 su 2	2
Rosso e nero	1 su 2	1
Pari e dispari	1 su 2	1
Manque e passe (1-18, 19-36)	1 su 2	1

Mano	36 carte	32 carte
Coppia vestita	8	4
Doppia coppia	21	10
Tris	47	23
Scala	254	62
Full	694	218
Colore	508	785
Poker	4165	1310
Scala reale	65000	16000
Progetto scala bilaterale	28	12
Progetto colore	23	27



Poker

Mazzo francese tranne le carte più piccole

Postulati_1,2: limiti della probabilità

Secondo Kolmogorov ad ogni evento $A \in \mathcal{W}$ si può associare un numero reale $P(A)$ variabile in un intervallo limitato



La probabilità di un evento "A" è maggiore o uguale a zero

$$P(A) \geq 0$$



La probabilità dell'evento certo "S" è pari ad uno

$$P(S) = 1$$

Postulato_3: additività

La probabilità dell'evento unione di due o più eventi incompatibili è data dalla somma delle probabilità degli eventi.

$$\text{Se } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ per } i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k P(E_i)$$

per ogni serie, FINITA di eventi.

La probabilità $P()$ è una funzione di insieme NON NEGATIVA, ADDITIVA E LIMITATA

La probabilità può essere espressa come decimale: 0.25, percentuale 25%, frazione: 1/4: casi contro e a favore 1:3 (1 a 3)

Probabilità di eventi elementari e composti

Consideriamo solo universi formati da un numero finito di eventi elementari.

In questo caso basta assegnare la probabilità ai singoli eventi elementari e poi sfruttare il 3° postulato per assegnare la probabilità agli eventi composti

Sia F un evento composto $F = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$

La sua probabilità è pari alla somma delle probabilità degli eventi elementari che in esso ricadono.

$$P(F) = \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

Se F si verifica ogni volta che si verifica E_1 , ogni volta che si verifica E_2 e così via e se eventi elementari non hanno niente in comune è intuitivo pensare che la probabilità di F sia la somma delle probabilità dei componenti



Esempi

Impostare il calcolo della probabilità di avere una carta rossa (cuori o quadri) in una mano di poker

$$\begin{aligned} \text{Probabilità}\{ \text{carta rossa} \} &= \text{Probabilità}\{ \text{cuori o quadri} \} \\ &= \text{Probabilità}\{ \text{cuori} \} + \text{Probabilità}\{ \text{quadri} \} \end{aligned}$$

Impostare il calcolo della probabilità di avere una figura ("J", "Q", "K") in una mano di poker

$$\begin{aligned} \text{Probabilità}\{ \text{figura} \} &= \text{Probabilità}\{ "J", "Q", "K" \} \\ &= \text{Probabilità}\{ "J" \} + \text{Probabilità}\{ "Q" \} + \text{Probabilità}\{ "K" \} \end{aligned}$$



L'evento impossibile ha probabilità zero

Dal fatto che $S \cup \emptyset = S$ e $S \cap \emptyset = \emptyset$

Consegue che $P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset) = 1 + P(\emptyset)$

Tuttavia $P(S \cup \emptyset) = P(S) = 1$

E quindi $P(\emptyset) = 0$

Una parte su un milione di miliardi del bicchiere di un ottimo vino è mortale. Berreste?

Probabilità zero implica l'evento impossibile?

Non sempre: lo zero può essere l'approssimazione di un numero talmente non distinguibile dallo zero, ma positivo.



La probabilità dell'evento negazione

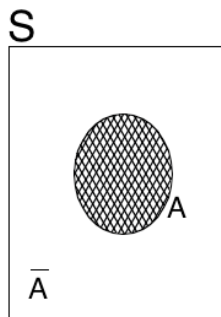
è il complemento ad uno della probabilità dell'evento che si nega

Dal fatto che: $A \cup \bar{A} = S$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$

consegue che: $P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1$

ma anche che: $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$

Quindi $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$



Le due scommesse
10,000 che esce il 27 sulla ruota di Napoli al 10%
10,000 Non esce il 27 su Napoli al 90%

Devono risultare indifferenti

Campo di variazione delle probabilità

La probabilità è un numero compreso tra zero ed uno.

Sappiamo già che la probabilità è non negativa per costruzione.

Poiché

$$P(E) + P(E^c) = 1$$

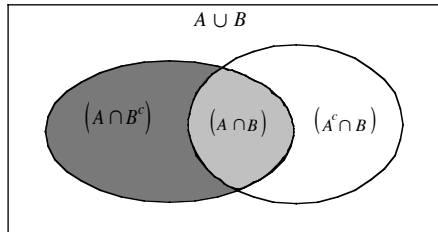
Per avere $P(E) > 1$ si dovrebbe avere $P(E^c) < 0$ che è un assurdo nel quadro dei nostri postulati

Legge additiva

L'evento certo può essere espresso come l'unione di due eventi necessari
 $S=(A \cup A^c)$ e $S=(B \cup B^c)$.

$$A = A \cap S = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

$$B = B \cap S = B \cap (A \cup A^c) = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$



$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A) \cup (B \cap A^c) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \end{aligned}$$

L'unione è espressa come insieme composto da tre eventi mutualmente incompatibili

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P[(A \cap B^c)] + P[(A \cap B)] + P[(B \cap A^c)] + P[(B \cap A)] - P[(B \cap A)] \\ &= P(A) + P(B) - P[(B \cap A)] \end{aligned}$$

Esempio

In un processo produttivo si sceglie a caso un item. Indichiamo con

➡ A: L'item è difettoso sul peso $P(A)=0.38$

➡ B: L'item è difettoso nella forma $P(B)=0.33$

➡ A « B L'item è difettoso sia nella forma che nel peso $P(A \cap B)=0.26$

La probabilità che l'item sia difettoso per uno o entrambi i motivi è

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.38 + 0.33 - 0.26 = 0.45 \end{aligned}$$

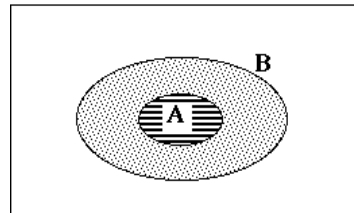
Probabilità di un sottoinsieme

Se A è un sottoinsieme di B allora

$$P(B) \geq P(A)$$

Scriviamo l'evento "B" come

$$B = A \cup (B \cap \bar{A}) \text{ con } A \cap (B \cap \bar{A}) = \emptyset$$



Richiamando il postulato degli eventi incompatibili avremo

$$P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \geq P(A)$$

poiché la probabilità è non negativa.

Incompletezza

Il sistema di Kolmogorov non dice che come scegliere le probabilità.

La teoria matematica interviene dopo l'assegnazione delle probabilità.

L'impegno maggiore nella trattazione matematica della probabilità si concentra su due questioni fondamentali:

1) *Come determinare la probabilità di un evento qualsiasi a partire dalle probabilità già assegnate ai risultati elementari di una prova;*

2) *Come aggiornare tali probabilità allorché si rendano disponibili nuove informazioni rilevanti sulla prova*

Misura della probabilità

Esiste una classe di eventi per la quale possiamo assegnare le probabilità in base ai soli postulati

Assumiamo che gli eventi $E_1, E_2, \dots, E_k$ siano una partizione

$$1) E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$2) \bigcup_{i=1}^k E_i = I$$

Teorema:

se gli eventi sono equiprobabili, la loro probabilità è data dal reciproco del numero di eventi.

$$1 = P\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k P(E_i)$$

Eventi equiprobabili significa che $P(E_i) = \alpha \quad \forall i$ e quindi $1 = \sum_{i=1}^k \alpha = k\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{k}$

In questo la probabilità, ma questa è la conseguenza automatica della SIMMETRIA degli eventi e dei postulati

Interpretazione classica

La probabilità è un modello numerico delle relazioni che intercorrono tra le possibili occorrenze degli eventi e le proprietà fisiche dell'esperimento

Principio della ragione insufficiente (gli eventi sono equiprobabili a meno che non si dimostri il contrario)

Sia $n(A)$ il numero di eventi elementari in A e sia $n(S)$ il numero totale di eventi elementari.

La probabilità dell'evento composto è data da

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$$



La presenza di "simmetrie" negli esperimenti consente una assegnazione oggettiva delle probabilità (almeno tra coloro che condividono le simmetrie)

Interpretazione classica/2

Una lotteria ha venduto 4750 biglietti. Ciccillo ne ha comprati 4.

Se tutti i numeri hanno la stessa probabilità di vincere allora:

$$P(\text{Ciccillo vince}) = \frac{4}{4750} = 0,000842 = 8.42 \text{ per mille}$$

PREGI

E' "naturale". Nel valutare il verificarsi di un evento eseguiamo a mente il rapporto tra le circostanze a favore e quelle contro

DIFETTI

1) Include una tautologia: "ugualmente possibili" è già una definizione di probabilità.

2) Non può essere richiamata se si ignora la struttura fisica della prova e come questa influenza gli eventi.

Interpretazione classica/3

Presenta delle contraddizioni:

Da due mazzi di carte francesi si sceglie una carta per ogni mazzo. Una di esse è di colore nero.

Qual'è la probabilità che l'altra sia di colore nero?



POISSON: i casi possibili sono: (N_1, N_2) , (N_1, R_2) , (R_1, N_2) e (R_1, R_2) . Se una delle due è nera allora restano solo 3 casi di cui due a favore. Perciò:

$$P(N_2 | N_1) = \frac{2}{3}$$

Il segno "I" va letto come: "dato che"

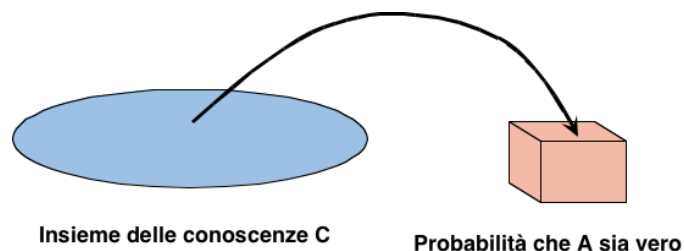


von Kries: le due scelte sono indipendenti per cui la scelta della 2^a carta può ignorare la scelta della 1^a. Quindi:

$$P(N_2 | N_1) = P(N_2) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

Interpretazione logica (o keynesiana)

La probabilità esprime la relazione logica che sussiste tra la validità di una asserzione sul verificarsi di un evento e l'insieme delle conoscenze che si hanno sulla prova



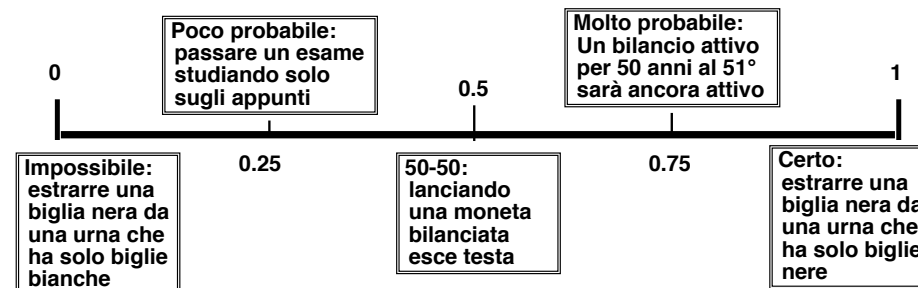
Dato un certo stato di informazione "C" esiste una ed una sola probabilità che esprime il grado di fiducia sulla validità dell'affermazione "A".

Due diverse persone, se danno due valori diversi a $P(A)$, hanno due diversi stati di conoscenza "C"

Probabilità soggettiva (Bayesiana)

La probabilità è l'espressione numerica del grado di convinzione sulla verità di una certa asserzione.

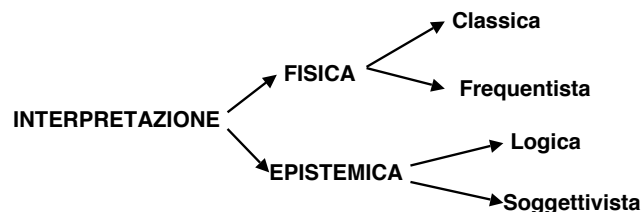
Per un dato insieme di conoscenze può esserci più di una probabilità



L'unico problema sono le regole di COERENZA cioè le opinioni di probabilità dovrebbero rispettare i postulato di additività e questo non è garantito

Significato della probabilità

L'interpretazione della probabilità, in sostanza, prescinde dalla sua rappresentazione matematica. I vari approcci alla probabilità si distinguono:



L'interpretazione "fisica o oggettivista" della probabilità si riferisce alle condizioni materiali di un esperimento.

L'interpretazione "epistemica o soggettivista" si riferisce alle idee di chi effettua l'esperimento.

Esempio



La probabilità che l'arciere centri il bersaglio è del 40%

Visione oggettivista

0.40 è una proprietà fisica dell'evento legata a: materiali, distanza da cui tira, tipo di bersaglio, etc.

Può anche derivare da una lunga serie di esperienze analoghe.

Visione soggettivista

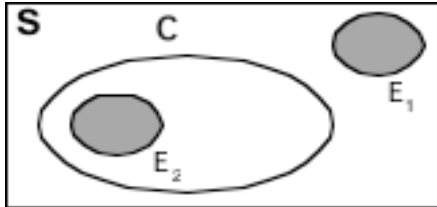
0.40 esprime il grado di fiducia, sul verificarsi dell'evento da parte di chi osserva l'esperimento.

Può essere unica o cambiare da persona a persona

Probabilità condizionata

Sia C un evento di interesse per il nostro esperimento (pertanto: $P(C) > 0$)

Come modificare lo spazio di probabilità nell'ipotesi che C si verifichi?



Se si è interessati ad E_1 si ha: $C \cap E_1 = \emptyset \rightarrow P(C \cap E_1) = 0$; se invece l'evento di interesse è E_2 allora il fatto che $E_2 \subset C \rightarrow P(E_2) = 1$.

Per comodità manteniamo lo stesso universo S anche se dal rettangolo S si è passati all'ellisse C e l'evento E_1 non può più verificarsi.

Esempio

Supponiamo che le facce di un dado siano equiprobabili. Abbiamo perciò le probabilità:

E	1	2	3	4	5	6	
$P(E)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	1

E	1	2	3	4	5	6	
$P(E)$	$1/6$	0	$1/6$	0	$1/6$	0	$1/2$

Se sappiamo che "è uscito un dispari" questo modifica la prova: alcuni eventi sono ancora possibili, altri no.

Le probabilità ridefinite alla luce di ciò che ciascuno aveva in comune con "A" e scalate in modo da sommare ad uno (probabilità dell'evento certo)

E	1	2	3	4	5	6	
$P(E)$	$1/6$	0	$1/6$	0	$1/6$	0	$1/2$
$P(E A)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1			

Riscaldamento delle probabilità

Le probabilità vanno riscritte con la formula:

$$P(E|C) = \frac{P(E \cap C)}{P(C)}; \text{ con } P(C) > 0$$

La probabilità di E sotto C è data dalla probabilità che i due eventi si presentino insieme (nello spazio di probabilità originario) rapportato alla probabilità assegnata (sempre nello spazio originario) all'evento condizionante.

Per comodità abbiamo mantenuto lo stesso simbolo "P" per indicare la funzione di probabilità condizionata, ma è chiaro che, una volta riscalata, la funzione di non è più la stessa di quella originaria anche se a questa strettamente connessa.

Esempio

Si lanciano tre monete. Qual'è la probabilità che presentino la stessa faccia?

Prima soluzione

I casi possibili sono 8: (CCC, CCT, CTC, TCC, TTC, CTT, TCT, TTT); i casi favorevoli sono 2 e quindi la probabilità cercata è $2/8 = 1/4$.

2ª soluzione

Due monete sono sicuramente uguali; quindi il risultato è determinato dalla 3ª; questa può essere testa o croce quindi la probabilità richiesta è $1/2$.

La conoscenza dell'evento "almeno due monete uguali" non è rilevante dato che non modifica l'universo degli eventi originario.

Se $E = \{\text{tre facce uguali}\}$ e $F = \{\text{almeno due facce uguali}\}$ allora

$$P(E|F) = P(E \cap F) / P(F) = P(E \cap F) / 1 = P(E)$$

dato che E è già incluso in F .

Probabilità nelle partizioni

Consideriamo una partizione (eventi necessari e incompatibili) dell'universo degli eventi

$$H_1, H_2, \dots, H_k$$

Partizione significa che di questi eventi, in ogni prova, se ne verifica uno e solo uno.

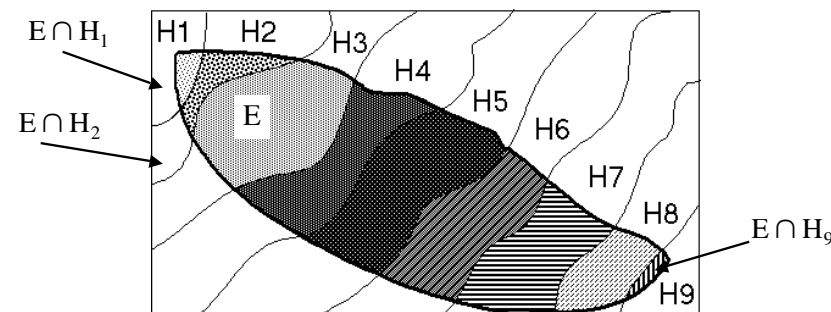
$$\begin{aligned} \text{Poiché } E &= E \cap I = E \cap \{H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k\} \\ &= (E \cap H_1) \cup (E \cap H_2) \cup \dots \cup (E \cap H_k) \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap H_1) + P(E \cap H_2) + \dots + P(E \cap H_k) \\ &= P(H_1) * P(E|H_1) + P(H_2) * P(E|H_2) + \dots + P(H_k) * P(E|H_k) \end{aligned}$$

La probabilità di "E" è pari alla somma PONDERATA delle probabilità condizionate di "E". I pesi sono le probabilità incondizionate degli eventi elementari

Probabilità nelle partizioni/2

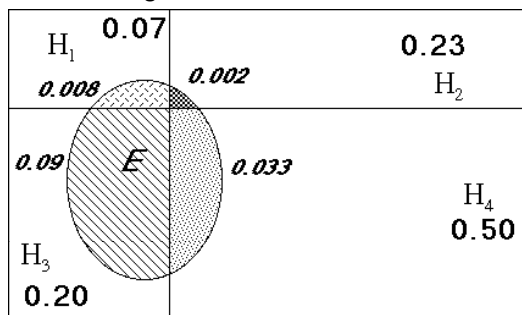


Ogni parte tratteggiata rappresenta l'intersezione dell'evento "E" con uno degli eventi della partizione

Poiché gli eventi della partizione sono incompatibili così saranno le loro parti toccate da "E"

Esempio con i diagrammi di Venn

Universo degli eventi



Scegliamo le seguenti probabilità

$$\begin{aligned} P(H_1) &= 0.07 & P(E \cap H_1) &= 0.008 \\ P(H_2) &= 0.23 & P(E \cap H_2) &= 0.002 \\ P(H_3) &= 0.20 & P(E \cap H_3) &= 0.090 \\ P(H_4) &= 0.50 & P(E \cap H_4) &= 0.033 \end{aligned}$$

$$P(E) = 0.133$$

$$E = (H_1 \cap E) \cup (H_2 \cap E) \cup (H_3 \cap E) \cup (H_4 \cap E)$$

Ne consegue:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap H_1) + P(E \cap H_2) + P(E \cap H_3) + P(E \cap H_4) \\ &= P(H_1) * P(E|H_1) + P(H_2) * P(E|H_2) + P(H_3) * P(E|H_3) + P(H_4) * P(E|H_4) \\ &= 0.07 * \frac{0.008}{0.07} + 0.23 * \frac{0.002}{0.23} + 0.20 * \frac{0.09}{0.20} + 0.50 * \frac{0.033}{0.50} = 0.133 \end{aligned}$$

Teorema di Bayes

Le condizioni sperimentali non sempre consentono soluzione intuitive. Possiamo però dimostrare il seguente teorema

Data una partizione $H_1, H_2, \dots, H_k$ dell'universo degli eventi la probabilità a posteriori rispetto all'evento "E" di H_i è data dalla formula

Formula

$$P(H_i|E) = \frac{P(H_i) * P(E|H_i)}{\sum_{j=1}^k P(H_j) * P(E|H_j)}$$

Logica

Si sa già il risultato della prova e si cerca quale ne sia la causa fra quelle possibili (PRINCIPIO DELLA PROBABILITA' INVERSA)

Da quanto detto sulle partizioni

$$P(E) = \sum_{j=1}^k P(H_j) * P(E|H_j); \quad P(H_i \cap E) = P(H_i) * P(E|H_i)$$

Per cui

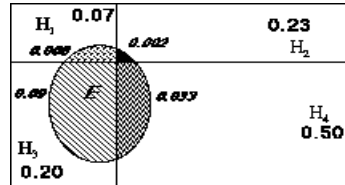
$$P(H_i|E) = \frac{P(H_i) * P(E|H_i)}{\sum_{j=1}^k P(H_j) * P(E|H_j)} = \frac{P(H_i \cap E)}{P(E)}$$

Esempio

Ritorniamo al caso illustrato con i diagrammi di Venn e determiniamo la causa più probabile di "E"

$$P(H_1|E) = \frac{0.008}{0.133} = 0.0602 \quad P(H_3|E) = \frac{0.090}{0.133} = 0.6767$$

$$P(H_2|E) = \frac{0.002}{0.133} = 0.0150 \quad P(H_4|E) = \frac{0.033}{0.133} = 0.2481$$



La causa più probabile è allora "H3" come il diagramma mostra con chiarezza: se, in una scommessa, tutti gli eventi dessero luogo alla stessa vincita, la logica ci impone di scegliere H3.

Nella formula di Bayes il denominatore costante per cui spesso si scrive

$$P(H_i|E) = \frac{P(H_i)P(E|H_i)}{P(E)} \propto P(H_i)P(E|H_i)$$

Che esprime la probabilità posteriori come proporzionale a quella a priori con un fattore di proporzionalità noto come VEROSIMIGLIANZA cioè la probabilità, sotto H_i , che si verifichi E.

Esempio

Può un ciuccio superare un esame?

Dati:

- 1) il 75% di chi si presenta all'esame, supera l'esame.
- 2) il 70% di chi supera l'esame è bravo.
- 3) il 90% dei bocciati è ciuccio.



S="Superato", R="Respinto", B="Bravo", C="Ciuccio"

$$1) P(S) = 0.75, \quad 2) P(B|S) = 0.70, \quad 3) P(C|R) = 0.9$$

E' richiesto il calcolo di P(SIC).

$$P(S|C) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)} = \frac{P(S)P(C|S)}{P(S)P(C|S) + P(R)P(C|R)} = \frac{P(S)[1 - P(B|S)]}{P(S)P(C|S) + P(R)P(C|R)}$$

$$= \frac{0.75 * 0.30}{0.75 * 0.30 + 0.25 * 0.90} = 0.5$$

Uso del teorema di Bayes

il 5% degli abitanti di un paese è affetto da una malattia.

Poniamo:

$$E_1 = \{ha \ la \ malattia\}, \quad E_2 = \{Non \ ha \ la \ malattia\}$$



Si usa un test clinico la cui SENSITIVITA' (la probabilità che sia positivo (+) dato che la persona è ammalata, è:

$$P(+|E_1) = 0.90$$

e con probabilità di FALSO POSITIVO (la persona è sana, ma il test indica il contrario)

$$P(+|E_2) = 0.15$$

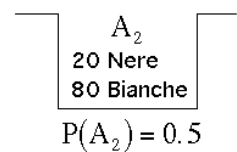
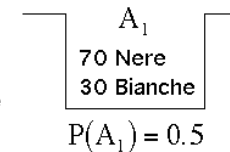
Scelta a caso una persona si effettua il test e questo risulta positivo, qual'è la probabilità che la persona sia ammalata?

$$P(E_1|+) = \frac{P(E_1)P(+|E_1)}{P(E_1)P(+|E_1) + P(E_2)P(+|E_2)} = \frac{(0.05)0.90}{(0.05)0.90 + (0.95)0.15} = 0.24$$

Probabilità a priori e a posteriori

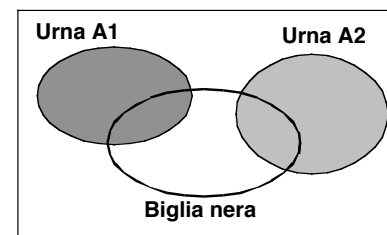
- 1) si sceglie a caso l'urna;
- 2) Si sceglie a caso la biglia.

La prova è stata effettuata ed è risultata "biglia nera". Da dove proviene?



La probabilità assegnata ad A_1 e A_2 prima dell'esperimento è detta A PRIORI.

Come si modifica alla luce del fatto è stata scelta una biglia nera (Evento N)?



il verificarsi di N limita l'attenzione alla sola intersezione di A_1 con N

$$P(A_1|N) = \frac{P(A_1 \cap N)}{P(N)} = \frac{0.35}{0.45} = 0.78$$

La probabilità dell'evento dopo il verificarsi di un altro è detta A POSTERIORI

Esempi

1.a) il lancio di due dadi non truccati ha prodotto almeno un "3". Qual'è la probabilità che la somma sia "7"?

S = La somma è "7";

E = è uscito almeno un "3"

$$S = \{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\}$$

$$E = \{(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(1,3);(2,3);(4,3);(5,3);(6,3)\}$$

$$P(S|E) = \frac{P(S \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{2}{11}$$

2) Un mazzo di carte francesi ha 52 carte di cui 4 sono assi. Se si estraggono due carte senza che la prima estratta venga reimmessa prima della seconda estrazione. Qual'è la probabilità che siano entrambi degli assi?

A₁ = asso alla prima

A₂ = asso alla seconda

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) * P(A_2|A_1)$$

$$= \frac{4}{52} * \frac{3}{51} = 0.0045$$

Indipendenza

DUE EVENTI A E B SONO INDIPENDENTI SE IL VERIFICARSI DELL'UNO NON ALTERA LA PROBABILITA' DELL'ALTRO

$$P(E|F) = P(E)$$

Tale interpretazione è coerente con la definizione di probabilità condizionata

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \Rightarrow \frac{P(E) * P(F)}{P(F)} = P(E)$$

L'indipendenza è una relazione BILATERALE: se "E" è indipendente da "F" allora è vero anche il viceversa purché "E" non sia impossibile

$$P(E|F) = P(E) \Rightarrow P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{P(E) * P(F)}{P(E)} = P(F)$$

Esempi

Si supponga che gli eventi "A" e "B" siano indipendenti e che si abbia

$$P(E) = 0.45, \quad P(F) = 0.80$$

a) Calcolare P(E U F)

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = P(E) + P(F) - P(E) * P(F) = 0.89$$

b) Calcolare P(E^c|F^c)

$$P(E^c|F^c) = \frac{P(E^c \cap F^c)}{P(F^c)} = \frac{P[(E \cup F)^c]}{P(F^c)} = \frac{1 - P(E \cup F)}{1 - P(F)} = \frac{0.11}{0.20} = 0.55$$

Verifica dell'indipendenza

Età	Maschi	Femmine	Totale
< 25 anni	147	323	470
25 - 35	203	187	390
>35	350	110	460
Totale	700	620	1320

$$P(M \cap "25 - 35") = \frac{203}{1320} = 15.4\% \neq \left(\frac{700}{1320} \right) * \left(\frac{390}{1320} \right) = 15.7\%$$

Soluzione di problemi con le probabilità

- 1) Individuare i dati del problema e tradurli in simboli.
- 2) Delimitare le richieste del problema ed esprimerle in simboli
- 3) applicare le regole del calcolo delle probabilità

In molti casi può essere utile la seguente formula

$$P(E|F) = \frac{P(E)}{P(F)} P(F|E)$$

Che consente di scambiare il ruolo degli eventi tra condizionato e condizionante

Esempi

Un controllo di qualità rivela:

- 1) il 20% delle componenti è difettoso.
- 2) il 90% delle componenti passa il controllo.
- 3) Il prodotti privi di difetti passano il test nel 95% dei casi.

Qual è la probabilità che una componente non risulti difettosa una volta superato il controllo?

Poniamo E="La componente è difettosa"; F="La componente passa il test"

Il problema ci suggerisce

$$1) P(E) = 0.20 \quad 2) P(F) = 0.90, \quad 3) P(F|E^c) = 0.95$$

E' richiesto il calcolo di $P(E^c|F)$.

$$P(E^c|F) = \frac{P(E^c)}{P(F)} P(F|E^c) = \frac{[1 - P(E)]}{P(F)} P(F|E^c) = \frac{0.8 * 0.9}{0.95} = 0.7579$$

Indipendenza di "n" eventi

Per evitare le difficoltà del concetto di indipendenza e per esaltarne la mera natura concettuale, diremo che una m-tupla è costituita da eventi indipendenti se:

$$P(E_{k_1} \cap E_{k_2} \cap \dots \cap E_{k_m}) = \prod_{i=1}^m P(E_{k_i})$$

per ogni permutazione degli indici: $2 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq m$.

Questo significa che tutte le possibili coppie di eventi sono indipendenti:

$$P(E_i \cap E_j) = P(E_i) P(E_j) \text{ per } i \neq j$$

e sono indipendenti anche tutte le combinazioni di tre eventi:

$$P(E_i \cap E_j \cap E_r) = P(E_i) P(E_j) P(E_r) \text{ per } i \neq j \neq r$$

e così via fino ad arrivare alla indipendenza della m-tupla.

Esempio di Bernstein

Supponiamo che S consista di 4 eventi: $S = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$

Assumiamo anche gli eventi siano equiprobabili: $P(E_i) = 1/4$

Definiamo ora gli eventi composti:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{E_1, E_2\} \Rightarrow P(A_1) = 1/2 \\ A_2 &= \{E_1, E_3\} \Rightarrow P(A_2) = 1/2 \\ A_3 &= \{E_1, E_4\} \Rightarrow P(A_3) = 1/2 \end{aligned}$$

Si verifica subito che

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= 1/4 = P(A_1) * P(A_2); \\ P(A_2 \cap A_3) &= 1/4 = P(A_2) * P(A_3); \\ P(A_1 \cap A_3) &= 1/4 = P(A_1) * P(A_3); \end{aligned}$$

Indipendenti
due a due

ma anche che: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4 \neq P(A_1) * P(A_2) * P(A_3) = 1/8$

l'indipendenza a due a due non implica che gli eventi siano indipendenti se considerati in terne. Tale risultato è generalizzabile a un numero di eventi qualsiasi

il compleanno

Siete in una sala con “n” persone in un dato giorno. Qual’è la probabilità che almeno una delle persone presenti festeggi il compleanno quel giorno?

Ipotizziamo che l’anno sia di 365 giorni e che le nascite siano uniformi nel corso dell’anno.

Sia “A” l’evento “Una persona festeggia il compleanno”.

$$\begin{aligned}P(\overline{A}) &= P(\text{Nessuno festeggia il compleanno}) = P(\text{non festeggia la } 1^a) * P(\text{non festeggia la } 2^a) * \dots \\&= \left(1 - \frac{1}{365}\right) * \left(1 - \frac{1}{365}\right) * \dots * \left(1 - \frac{1}{365}\right) = \left(1 - \frac{1}{365}\right)^n\end{aligned}$$

$$\text{Se } n=200 \text{ si ha} \quad P(\overline{A}) = 58\% \Rightarrow P(A) = 42\%$$

$$\text{Se } n=500 \text{ si ha} \quad P(\overline{A}) = 25\% \Rightarrow P(A) = 75\%$$

Sorte e indipendenza

L’indipendenza è una condizione forte che talvolta sembra porsi contro il senso comune.

Ciccillo è un affezionato del 12 sulla ruota di Napoli. Indichiamo con E_i l’evento “Esce il 12 nella estrazione i-esima”. Non si ha motivo di dubitare della onestà delle estrazioni. Negli ultimi tempi il 12 non è uscito per 150 estrazioni.

Che probabilità ha di uscire alla 151^a?

$$P(E_{151} | E_1^c \cap E_2^c \cap \dots \cap E_{150}^c) = \frac{P(E_1^c \cap E_2^c \cap \dots \cap E_{150}^c \cap E_{151}^c)}{P(E_1^c \cap E_2^c \cap \dots \cap E_{150}^c)} = P(E_{151})$$

E’ evidente che la probabilità è la stessa non solo dopo 10, 100, 1000 estrazioni, ma che non c’è sequenza di ritardiche potrà mai provocare l’uscita del “12”.

Attenzione! Questo non significa che il “12” non uscirà, ma solo l’assenza di raziocinio nell’idea che la propensione ad uscire aumenti con il ritardo.