Perché il calcolo combinatorio

Basato sulle idee primitive di distinzione e di classificazione, stabilisce in quanti modi diversi si possono combinare degli oggetti

E' molto utile nell'enumerazione dei casi possibili di una prova

ESEMPIO:
Indagine sul consumo di caffè

Miscela $\{A,C,M\}$
Confezione $\{B,S\}$
Formato $\{S,D,F,B\}$

ABS	ABD	ABF	ABB
ASS	ASD	ASF	ASB
CBS	CBD	CBF	CBB
CSS	CSD	CSF	CSB
MBS	MBD	MBF	MBB
MSS	MSD	MSF	MSB

Ogni terna è un possibile soggetto di studio

Non sempre è facile catalogare le possibilità.

C'è bisogno di una regola generale

Prove e sottoprove

L'evento può risultare da più sottoprove anche con dominio diverso

Comunque si produce una n-tupla che può essere:

$$\text{Non ordinata}: E = \{x_1 \in S_1,\ x_2 \in S_1,\ \ldots,\ x_n \in S_n\}$$
$$\text{Ordinata}: \quad E = (x_1 \in S_1,\ x_2 \in S_1,\ \ldots,\ x_n \in S_n)$$

Nella prima ogni alterazione dell'ordine genera un evento distinto

Nella seconda dove, per avere un evento diverso, è necessario modificare almeno un elemento.

Scelta con e senza ripetizione

Con ripetizione. Uno stesso elemento può essere ripetuto più volte nella stessa selezione

Esempio: nella roulette esce il 12 e poi riesce il 12

Senza ripetizione (o in blocco). Gli elementi della selezione sono tutti distinti

Sulla ruota di Venezia esce il 12 al 1° estratto, ma lo stesso 12 non può uscire nelle altre estrazioni

La moltiplicazione combinatorica

Nell'esempio, l'entità è formata da tre "caselle": la 1^ può variare in 3 modi, la 2^ in 2 e la 3^ in 4. Il numero totale di entità è quindi

$$N = 3 * 2 * 4 = 24$$

Supponiamo che

1) l'entità sia formata dall'accostamento di "k" categorie: $\boxed{1 \mid 2 \mid \ldots \mid k-1 \mid k}$

2) Ogni categoria abbia un numero definito di livelli: $\boxed{n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_{k-1} \mid n_k}$

Le possibilità saranno in tutto: $n = n_1 * n_2 * \ldots * n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$

Questa è una regola fondamentale del calcolo combinatorio e permette di stabilire il numero di possibilità risultanti dalla interazione di scelte diverse.

L'albero degli abbinamenti

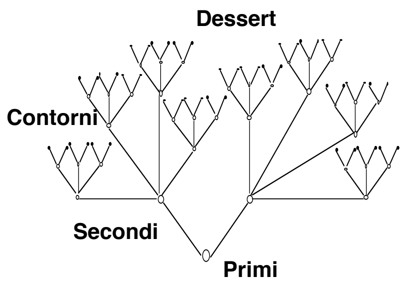
E' una utile rappresentazione: da una radice comune partono tanti rami per quante sono le categorie della prima variabile classificatoria

Il ramo termina con un nodo e da ognuno di questi partirà un nuovo ramo per ogni categoria della seconda variabile e così via

Esempio:

Un menù prevede due soli tipi di primi, quattro tipi di secondo, tre sole scelte per il contorno e due dessert. Quanti menu diversi è possibile richiedere?

La risposta si può ottenere contando i rami terminali: 48.



Esempio

ESEMPIO: indagine sul consumo di caffé

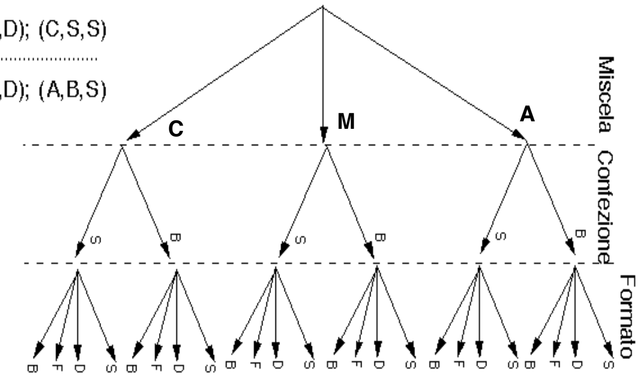
$n = 3 * 2 * 4 = 24$

(C,S,B); (C,S,F); (C,S,D); (C,S,S)

....

(A,B,B); (A,B,F); (A,B,D); (A,B,S)

$E_1, E_2, \ldots, E_{24}$



Disposizioni senza ripetizione

Un'urna prevede N bussolotti. L'esperimento consista nell'estrarre - senza reimmissione- n di essi .

L'evento elementare è una n-tupla di elementi.

Si ammette che l'ordine sia importante e cioè che {A, B} è diverso da {B,A} anche se ha gli stessi elementi.

ESEMPIO: $S = \{A, E, C, N\}$ **Se n=1 le scelte sono 4:** (1), (2), (3), (4)

Scelte possibili per n=2

AE	AC	AN	EC	EN	CN
EA	CA	NA	CE	NE	NC

12

Scelte possibili per n=3

AEC	EAC	CAE	NAE	NCE	ECN
ACE	ECA	CEA	NEA	NEC	ENC
AEN	EAN	CEN	NAC	CAN	ACN
ANE	ENA	CNE	NCA	CNA	AEC

24

Disposizioni senza ripetizione/2

Scelte possibili con n=4:

AECN	AENC	ANEC	ANCE	ACEN	ACNE
EACN	EANC	ENAC	ECAN	ENCA	ECNA
CEAN	CENA	CNEA	CNAE	CANE	CAEN
NACE	NAEC	NECA	NEAC	NCAE	NCEA

24

DISPOSIZIONI SENZA RIPETIZIONE DI "N" OGGETTI PRESI "n" ALLA VOLTA

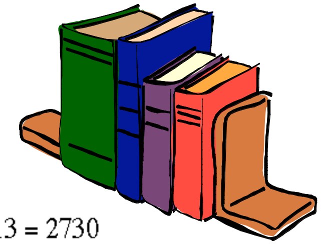
$$D_{sr}(N, n)$$

l'evento è formato da n caselle: | 1 | 2 | ... | n |

Nella prima casella possiamo porre uno qualsiasi degli "n" oggetti; nella seconda uno dei restanti cioè "(N-1)" perché il primo non si può ripetere; nella terza"(N-2)" perché le prime due sono già impegnate e così via.

$$D_{sr}(N, n) = N * (N-1) * (N-2) * \ldots * (N-n+1)$$

Esempi



I volumi numerati di un'opera in N=15 tomi sono riposti a caso su di uno scaffale. In quanti modi i primi tre posti possono accogliere i volumi?

$$D_{15,3} = 15*(15-1)*(15-3+1) = 15*14*13 = 2730$$

$$13 = 15-3+1$$

In quanti modi possono venir ordinatamente estratti i 5 numeri della ruota di Roma fra gli N=90 disponibili del gioco del lotto

$$D_{90,5} = 90*89*88*87*86 = 5,273,912,160$$

$$\text{NB:}\quad 86 = 90-5+1$$

Disposizioni con ripetizione

Trattiamo ora il caso in cui sia permessa la ripetizione degli oggetti. Quello che cambia è che, qualunque sia la casella, ci sono sempre "N" possibilità

$$D_{cr}(N,n) = \overbrace{N*N*\ldots*N}^{n\ \text{volte}} = N^n$$

Avendo "N" biglie da collocare in "n" celle (in modo che ogni cella possa contenere anche più di una biglia) le disposizioni con ripetizione esprimono il numero possibile di scelte

ESEMPIO: $S = \{A, E, C, N\}$

Disposizioni con ripetizione di 4 oggetti presi a 2 alla volta $D_{cr}(4,2) = 4^2 = 16$

AA	AE	AC	AN
EA	EE	EC	EN
CA	CE	CC	CN
NA	NE	NC	NN

Esempi

Nel codice ASCII un carattere è rappresentato da una disposizione di 8 bit ognuno

dei quali può assumere valore "0" oppure "1". Quanti sono i possibili codici:

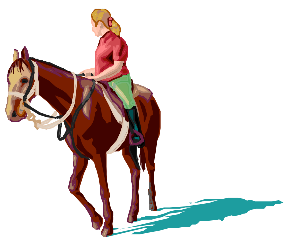
$$\overbrace{2*2*2*2*2*2*2*2}^{8\ \text{volte}} = 2^8 = 256$$

Nei concorsi TOTIP si ottiene la vincita massima indovinando n=14 risultati legati ad altrettanti concorsi ippici.

Ogni risultato può essere: "1", "X", "2".

Quante sono le possibili colonne?

$$3^{14} = 4\ \ 782\ \ 969$$



Le permutazioni

Quante sono le scelte possibili se un diverso ordinamento delle unità genera una scelta diversa?

La risposta è data dal numero di disposizioni senza ripetizione per tutte le "n" posizioni

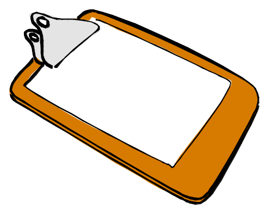
$$P_{sr}(n,n) = n*(n-1)*(n-2)*\ldots*2*1 = n!\ (fattoriale\ \ di\ \ "n")$$

detta anche PERMUTAZIONE senza ripetizione degli "n" oggetti

ESEMPIO:

Un ordine del giorno è stato circoscritto a n=7 argomenti. Quante sequenze di discussione sono possibili?

$$P_{sr}(7) = 7*6*5*4*3*2*1 = 5040$$



Digressione sui fattoriali

Per ogni intero positivo "n" il simbolo "n!" indica il fattoriale di "n" cioè il prodotto dei primi "n" interi naturali.

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1*2*3*\ldots*(n-1)*n$$

Da notare che $n! = n*(n-1)!$

Perché questa valga anche per n=1 si pone convenzionalmente $0! \equiv 1$

Per avere un'idea della rapidità con cui cresce il fattoriale di un numero si consideri la seguente tabella:

n	n!	n	n!	n	n!
1	1	6	720	11	39,916,800
2	2	7	5,040	12	479,001,600
3	6	8	40,320	13	6,227,020,800
4	24	**9**	362,880	14	871,782,291,200
5	120	**10**	3,628,800	15	1,307,674,368,000

Formula di Stirling

Uno strumento di grande importanza analitica per il trattamento dei fattoriali è la formula di Stirling

$$n! \cong \sqrt{2\pi} * n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

dove $\cong$ indica che il rapporto tra i due membri tende ad uno se "n" è grande

n	n!	Stirling
1	1.	0.922
2	2.	1.919
3	6.	5.836
4	24.	23.506
5	120.	118.019
6	720.	710.078
7	5'040.	4'980.396
8	40'320.	39'902.395
9	362'880.	359'536.873
10	3'628'800.	3'598'695.619

Questa formula ha molte applicazioni teoriche, ma fornisce anche delle buone approssimazioni.

Anche se la differenza tra le due colonne aumenta il rapporto si avvicina sempre più ad uno

Permutazioni e Disposizioni S.R.

Tra permutazioni e disposizioni S.R. esiste un legame che torna molto utile

$$N! = [N*(N-1)*(N-2)*\ldots*(N-n+1)]*[(N-n)*(N-n-1)*\ldots*2*1] = D_{SR}(N,n)*(N-n)!$$

il senso è che ogni disposizione S.R. di "N" oggetti presi "n" alla volta" può essere abbinata alla permutazione dei restanti (N-n) oggetti

il numero di disposizioni S.R. si può ricavare dal numero di permutazioni:

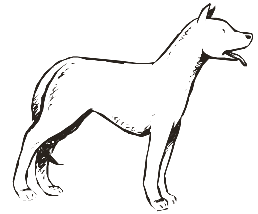
$$D_{SR}(N,n) = \frac{N!}{(N-n)!} = \frac{D_{SR}(N,N)}{D_{SR}(N-n,N-n)}$$

ESEMPI:

$$D_{SR}(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6*5*4*3*2*1}{3*2*1} = \frac{6*5*4}{1} = 120$$

$$D_{SR}(7,5) = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7*6*5*4*3*2*1}{2*1} = \frac{7*6*5*4*3}{1} = 2520$$

Esempi



Alle corse dei cavalli o dei cani, una scommessa sulla exacta significa scegliere due dei concorrenti che arriveranno - nell'ordine- al primo e al secondo posto.

Si supponga che la corsa preveda 12 partecipanti. Quante alternative esistono?

$$\frac{12!}{10!} = 12*11 = 132$$

La giuria di un film-festival deve scegliere i primi tre classificati tra 18 opere concorrenti. Quante sono le possibili terne di finalisti?

$$\frac{18!}{15!} = 18*17*16 = 4896$$

Combinazioni

Un modo frequente di costruire “S” è la scelta in blocco di “n” oggetti tra “N” disponibili senza badare all’ordine (Combinazioni)

ESEMPIO:

P={E, N, O, S} che implica: {E,N}, {E,O}, {E,S}, {N,O}, {N,S}, {O,S}

Le scelte {O,S} e {S,O} coincidono e contano per una

Le disposizioni sarebbero : $D_{sr}(N,n) = N!/(N-n)!$

ma per ogni disposizione ve ne sono n! identiche che contano come se fossero una sola perciò:

$$C(N,n) = \frac{D_{sr}(N,n)}{n!} = \frac{\frac{N!}{(N-n)!}}{n!} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Esempio

Nel solito caso: $S = \{A, E, C, N\}$ **consideriamo**

Disposizioni senza ripetizione

{A,E}	{A,C}	{A,N}	{E,C}	{E,N}	{C,N}
{E,A}	{C,A}	{N,A}	{C,E}	{N,E}	{N,C}

Combinazioni:

{A,E}	{A,C}	{A,N}	{E,C}	{E,N}	{C,N}

$$C(4,2) = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4*3*2*1}{2*1*2*1} = 6$$

i coefficienti binomiali

il numero di combinazioni ha un altro simbolo:

$$C(N,n) = \binom{N}{n} \qquad \text{leggi: N grande su n piccolo}$$

detto coefficiente binomiale.

Si conviene che: $a)\binom{N}{n} = 0 \quad se \quad n > N; \qquad b)\binom{N}{N} = 1; \qquad c)\binom{N}{0} = 1$

a) stabilisce che non c’è modo di scegliere più elementi di quelli contenuti;

b e c) affermano che c’è un solo modo di scegliere tutti gli elementi e c’è pure un solo modo di non scegliere alcun elemento: lasciare intatto l’insieme di base.

Coefficienti binomiali/2

- **Simmetria** $\binom{N}{n} = \binom{N}{N-n}$ **Discende dal fatto che ogni scelta di "n" implica una scelta di (N-n)**

- **Addizione** $\binom{N}{n} = \binom{N-1}{n} + \binom{N-1}{n-1}$ **Relazione ricorsiva, molto pratica per il calcolo dei coefficienti binomiali**

Un combinazione può contenere o non contenere una data unità.

Se NON la contiene vi sono C(N-1,n) possibilità. Se la contiene vuol dire che una unità della combinazione è fissa e rimangono (n-1) posizioni su cui incidono le restanti

(N-1) unità. Questo può avvenire in C(N-1,n-1) modi. La somma dà il totale.

Teorema del binomio

In molte occasioni ricorre la seguente uguaglianza:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{i} a^{n-i} b^i + \ldots + \binom{n}{0} b^n$$

il termine a^n non può che essere ottenuto prendendo il fattore "a" da tutti i binomi e questo può essere fatto in un solo modo C(n,0)=1

il successivo a^{n-1} b si ottiene prendendo il fattore "a" in (n-1) binomi e "b" nel restante e ciò può farsi in C(n,1) modi diversi

il termine generico a^{n-i} b^i può aversi scegliendo "a" in "(n-i)" binomi e "b" negli altri "i" e questo si farà in C(n,i) modi.

Applicazioni

Calcolo combinatorio ed equiprobabilità sono al centro di gran parte delle applicazioni del nostro corso

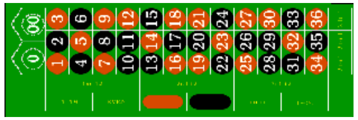
Poiché la formula per stabilire la probabilità di un evento composto è

$$P(E) = \frac{Numero\ eventi\ elementari\ in\ E}{Numero\ di\ eventi\ nell'Universo\ degli\ eventi}$$

Basterà conoscere quanti e quali sono gli eventi elementari pertinenti ad E per determinarne la probabilità

Esempio: Probabilità di un carré

$$P(E) = \frac{4}{36} \quad ovvero\ 1:8$$



Il famoso caso del Cavalier De Méré

Quale evento è più probabile

Ottenere almeno un "1" nel lancio di 4 dadi

Ottenere un doppio "1" in 24 lanci di 2 dadi?

Nel 1° i casi possibili sono 6^4=1'296. Per i favorevoli definiamo prima

A_i={esce un 1 in i dadi e non negli altri} la cui cardinalità è:

$$n(A_i) = \binom{4}{i} 5^i; \quad i = 1,2,3,4$$

L'evento che interessa è E=(A_1UA_2UA_3UA_4)

$$P(E) = \frac{500+150+20+1}{1'216} = \frac{621}{1216} = 0.5107$$

De Méré/2

Ottenere un doppio "1" in 24 lanci di 2 dadi?

i casi possibili sono 3624.

I casi sfavorevoli sono le serie di 24 lanci
di due dadi in cui non si verifica un doppio "1" che ha cardinalità 3524 .

Se

A_i={escono due "1" nel lancio i-esimo}

interessa

E=(A_1UA_2UA_3... UA_{24})

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914$$

Combinazione con ripetizione

ESEMPIO: P={a, b, c, d, e}. Supponiamo che n=3. Le combinazioni S.R. sono

$$\begin{matrix}(a,b,c) & (a,b,d) & (a,b,e) & \\ (a,c,d) & (a,c,e) & (a,d,e) & (c,d,e) \\ (b,c,d) & (b,c,e) & (b,d,e) & \end{matrix}$$

Se possono ripetersi occorre aggiungere le terne in cui compaiono "a a" (4) e la terna "a a a" e questo anche per le altre unità. In tutto si arriva a 10 + 5 + 5*4=35

Sebbene non sia semplice dimostrarlo, il numero di combinazioni con ripetizione ha una formula semplice:

$$\binom{N+n-1}{n} = \frac{(N+n-1)!}{n!(N-1)!}$$

Esempio

La password di una rete è formata da 5 caratteri scelti tra le 26 lettere dell'alfabeto inglese e le 10 cifre arabe.

Le lettere possono ripetersi.

L'ordine non è influente.

Quante sono le possibili password?

$$\binom{36+5-1}{5} = \frac{36*37*38*39*40}{5!} = 658008$$

Permutazioni con ripetizione

Sono le permutazioni in cui uno o più oggetti sono uguali. E' chiaro che il loro numero è minore di quello ottenibile con oggetti diversi dato che alcune scelte sono identiche

Supponiamo che ogni oggetto si possa ripetere n_i volte

$$n_1,\ n_2,\dots,n_k \quad con \quad n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Se n_i=1 allora l'oggetto i non si ripete.

Il numero di permutazioni distinte è dato da

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}$$

Esempio

Una nave deve inviare dei messaggi con bandiere di 3 colori diversi: Rosso, Giallo, Blù;

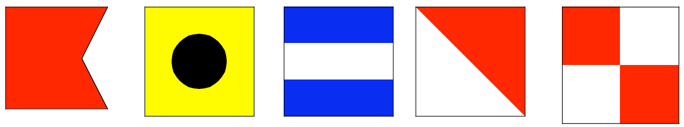
ogni messaggio è costituito da un allineamento di 12 bandiere:

R,R,R,G,G,G, B,B,B

potrebbe significare perdita di carburante.

Quanti sono i messaggi diversi?

$$P(3,3,3) = \frac{9!}{3!3!3!} = 1680$$



Partizioni

Un'urna contiene "N" biglie di "m" colori diversi: $P(n_1,n_2,\dots,n_m)$.

Dall'urna si scelgono "n" biglie. Quante sono le scelte che hanno r_1 del primo colore, r_2 del secondo e così via?

$$\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{r_i}=\binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}\cdots\binom{n_m}{r_m}=\frac{n_1!\,n_2!\dots n_m!}{r_1!\,r_2!\dots r_m!}\left[\frac{1}{(n_1-r_1)!(n_2-r_2)!\dots(n_m-r_m)!}\right]$$

ESEMPIO:
Un lotto da sottoporre ad ispezione contiene 20 prodotti di cui 14 buoni 4 mediocri e 2 difettosi . Se si scelgono 6 prodotti quante sono le possibilità che vi compaiano 2 mediocri e due difettosi?

$$\binom{20}{2}\binom{4}{3}\binom{2}{1}=\frac{20!\,4!\,2!}{2!\,3!\,1!}\,\frac{1}{17!\,1!\,1!}=27\;360$$

Lo schema ipergeometrico

Separazione di "N" oggetti in due gruppi

uno con N_1 elementi "speciali" perché hanno una certa proprietà

un altro di $(N-N_1)$ elementi "comuni" per i quali la proprietà non è vera.

L'esperimento consiste nella scelta casuale <u>senza reimmisione</u> di "n" elementi di cui n_1 speciali ed i restanti $(n-n_1)$ comuni.

Qual'è la probabilità che la scelta contenga proprio n_1 speciali?

La scelta di questi può avvenire in $C(N_1, n_1)$ modi diversi. Ognuna delle combinazioni di speciali può abbinarsi con le combinazioni di $(N-N_1)$ comuni presi a blocchi di $(n-n_1)$ e quindi i casi favorevoli sono:

$C(N_1, n_1)*C(N-N_1, n-n_1)$ con $C(N,n)$ casi possibili.

Quindi

$$P(n_1)=\frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N-N_1}{n-n_1}}{\binom{N}{n}};\quad n_1=1,2,\;\dots,\;n$$

Esempio

Da una lista di N persone si deve formare un comitato di "n" membri tra cui sarà nominato un presidente. Quante sono le opportunità di scelta se N=15 e n=6?

$$C(N,n)*C(n,1)=\frac{N!}{(N-n)!*n!}*\frac{n!}{1!*(n-1)!}$$
$$=\frac{N!}{(N-n)!*(n-1)!}$$

prima si formare il comitato e poi, ad ogni comitato, si abbina la nomina del presidente:

Esempio

E' in corso il gioco delle coppie. I nomi di 6 ragazzi e di 6 ragazze sono scritti su dei bigliettini ben piegati e riposti in un cappello.

Dopo una energica mescolatura si scelgono a caso 4 biglietti ed i nomi di coloro che sono estratti dovranno organizzarsi in coppie, anche di membri dello stesso genere

1. Qual'è la probabilità che siano scelti due ragazze e due ragazzi?

$$P(D=2,U=2)=\frac{\binom{6}{2}\binom{6}{2}}{\binom{12}{4}}=0.4546$$

2. Qual'è la probabilità che siano scelte più ragazze che ragazzi?

$$P(D>U)=P(D=3,U=1)+P(D=4,U=0)=\frac{\binom{6}{3}\binom{6}{1}}{\binom{12}{4}}+\frac{\binom{6}{4}\binom{6}{0}}{\binom{12}{4}}=02727$$