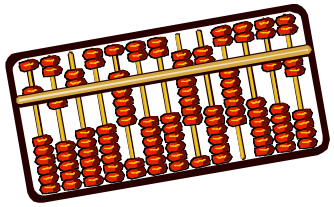
Premessa

La distribuzione di frequenze è il risultato della raccolta dati che in essa sono organizzati e semplificati.

Rimangono però ancora tante le informazioni da considerare.



Il nostro obiettivo è riassumerne gli aspetti salienti in pochi valori numerici (indici statistici)

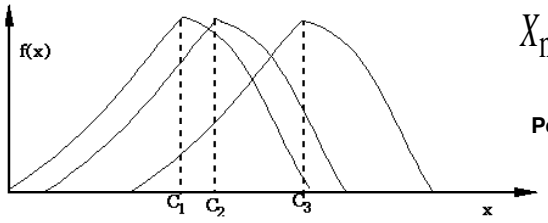
Essi consentono il confronto tra distribuzioni di variabili diverse oppure della stessa variabile in epoche, luoghi ed occasioni diverse.

Concetto di media

Individua il livello di maggiore addensamento delle modalità ovvero la categoria o il valore (espresso nella stessa unità di misura) intorno alla quale sembra ruotare l'intera rilevazione.

Non è necessario che appartenga al dominio della variabile (può essere un valore fittizio).

Bisogna e basta che rispetti la condizione di internalità:



$$X_{min} \leq Media \leq X_{max}$$

Per valori almeno ordinali

Esempi

Variabile qualitativa

Linguaggio	Parlanti (in milioni)
Mandarino	740
Inglese	403
Russo	277
Spagnolo	266
Indostano	264
Arabo	160
Bengalese	155
	2265

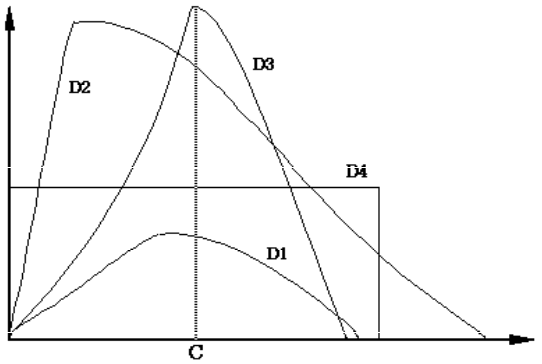
Variabile quantitativa.

Numeri di albini in famiglie di 5 figli	Numero di famiglie
1	25
2	23
3	10
4	1
5	1
	60

Nel primo caso la "media" può essere qualsiasi modalità; nel secondo può essere solo un numero compreso tra 1 e 5

Mancanza di univocità

Il processo di estrema sintesi che porta al collassamento della distribuzione di su di un singolo valore, costituisce il limite degli indici di posizione perché:



Distribuzioni molto diverse possono presentare la stessa "media". Conoscendo questa non è univocamente nota la situazione che l'ha determinata.

La moda

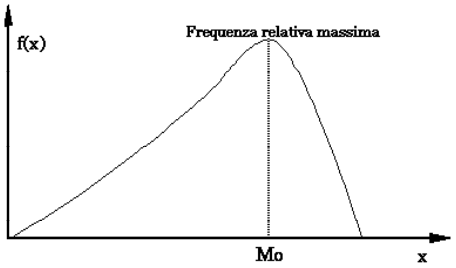
E' l'indice di posizione più facile da calcolare, ma anche quello più grezzo. Si identifica con la modalità corrispondente alla frequenza relativa maggiore:

$$M_o = \left\{ X_m \middle| f_m \geq f_i \quad per \quad i = 1,2,\ldots,k \right\}$$

Esempio.

Classificazione del molare inferiore destro per numero di canali su 1000 soggetti.

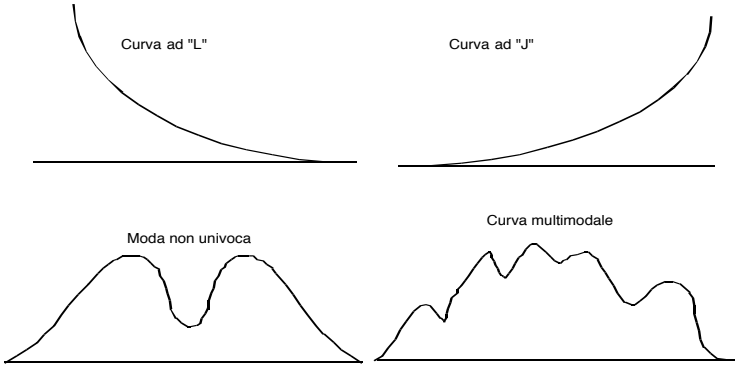
Canali x_i	Soggetti n_i	Freq. Rel. f_i
1	2	0.0002
2	914	0.9140
3	76	0.0076
4	8	0.0008
	1000	1.0000



La determinazione della Moda è influenzata solo dai rapporti ordinali tra le frequenze

Amodalità e multimodalità

La moda può essere assente dalla distribuzione.



La frequenza massima può non corrispondere ad una unica modalità.

Inoltre, pur esistendo, la moda può non essere significativa, cioè le frequenze relative dei vari massimi potrebbero differire troppo poco

Difetto della moda

Poiché non usa tutti i dati la moda può dare indicazioni fuorvianti

ESEMPIO:

n=20 uomini arrestati per violenza in famiglia furono sottoposti a vigilanza speciale per 2 anni. Ecco la distribuzion degli arresti alla fine del periodo:

Arresti	Criminali
0	8
1	1
2	1
3	1
4	2
5	4
6	3
	20

La moda è M_o=0 arresti.

La frequenza modale è elevata (doppia della 2ª in ordine di grandezza)

Tuttavia dire che zero arresti è tipico nasconderebbe un gruppo di criminali che ha reiterato il reato ben 5 o 6 volte

Modalità in classi

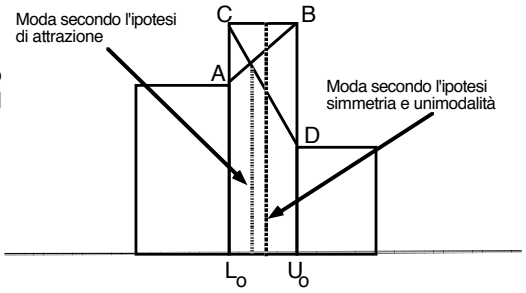
La frequenza relativa più elevata individuerà la classe modale.

Metodo N. 1

I valori della classe modale hanno uguale frequenza. La Moda è il valore centrale della classe:

$$M_o = c_m = \frac{U_m + L_m}{2}$$

$$f_m \geq f_i \quad \forall i$$



Metodo N. 2

La moda è più vicina all'estremo Lm o Um che confina con la classe con più frequenza (che esercita maggiore "attrazione")

$$M_o = L_m + \frac{(f_m - f_{m-1})}{[(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})]} * (U_m - L_m)$$

Esempio

Ordinazioni per importi

	Importi		Ordini	f_i	d_i	h_i
	0.0	1.9	102	0.1726	1.9	0.0908
Classe modale: (4 - 5.9);	2.0	3.9	175	0.2961	1.9	0.1558
	4.0	5.9	208	0.3519	1.9	0.1852
	6.0	7.9	76	0.1286	1.9	0.0677
Valore centrale classe modale:	8.0	9.9	23	0.0389	1.9	0.0205
	10.0	11.9	7	0.0118	1.9	0.0062
			591	1.0000		

$$\frac{4.0 + 5.9}{2} \cong 5$$

Attrazione: $$4.0 + \left[\frac{0.1852 - 0.1558}{(0.1852 - 0.1558) + (0.1852 - 0.0677)}\right] * 1.9 = 4.38$$

Ampiezze diverse

Se le modalità sono espresse in classi si impone la considerazione della loro eventuale differenza di ampiezza.

L_i	U_i	n_i	d_i	h_i	c_i
3	5	8	2	4	4
5	11	18	6	3	8

In questi casi occorre fare riferimento non più alle frequenze relative, bensì alle densità di frequenza ovvero alle altezze già viste nella costruzione degli istogrammi:

$$M_o = c_m = \frac{L_m + U_m}{2} \qquad \text{dove } (h_m \geq h_i \text{ per } i=1,2,\ldots,k)$$

$$M_o = L_m + \frac{(h_m - h_{m-1})}{[(h_m - h_{m-1}) + (h_m - h_{m+1})]} * (U_m - L_m)$$

$$h_i = \frac{f_i}{d_i}$$

Esempio

Una radiografia è stata scomposta in pixel e su ciascuno di questi si è misurato il tono di grigio

	Riflettenza		Pixel	f_i	d_i	h_i
	0	30	54	0.0113	30.0	0.0004
Classe modale: (31-49);	31	49	613	0.1277	18.0	0.0071
	50	98	421	0.0877	48.0	0.0018
Valore centrale classe modale:	99	127	716	0.1492	28.0	0.0053
	128	160	432	0.0900	32.0	0.0028
	161	191	798	0.1663	30.0	0.0055
	192	240	1579	0.3290	48.0	0.0069
	241	255	187	0.0390	14.0	0.0028
			4800	1.0000		

$$\frac{31 + 49}{2} = 40$$

Attrazione: $$31 + \left[\frac{0.0071 - 0.0004}{(0.0071 - 0.0004) + (0.0071 - 0.0018)}\right] * 18 = 41.05$$

La mediana

La Mediana è la modalità che è preceduta e seguita dalle altre con uguale frequenza, si trova cioè in posizione centrale nella graduatoria delle modalità.

ESEMPIO:

Soldati schierati in ordine di altezza: la fila posta al centro è quella mediana

Ricordando che, se non altrimenti indicato, le modalità sono ordinate in senso crescente, la Mediana di "n" osservazioni è data da:

$$M_e = \begin{cases} X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & se\ "n"\ è\ dispari \\ \dfrac{X_{(n/2)} + X_{(n/2)+1}}{2} & se\ "n"\ è\ pari \end{cases}$$

Esempio

Costi di estrazione dollaro-barile.

Usa/Alaska	7.5	Canada	5.0
Messico	6.0	Venezuela	6.2
Argentina	15.1	Medio Oriente	2.5
Indonesia	10.7	Africa	7.4
Nord Europa	17.5	URSS	6.3

I dati ordinati sono: {2.5,5.0,6.0,6.2,6.3,7.4,7.5,10.7,15.1,17.5}

Poichè n=10 (cioè n è pari)

$$M_e = \frac{X_{\left(\frac{10}{2}\right)} + X_{\left(\frac{10}{2}+1\right)}}{2} = \frac{X_{(5)} + X_{(6)}}{2} = \frac{6.3+7.4}{2} = 6.85$$

Se si aggiunge il dato 19.4 allora n=11 è dispari per cui

$$M_e = X_{\left(\frac{10+1}{2}\right)} = X_{(6)} = 7.4$$

Da notare che 7.4 è un dato osservato e 6.85 è un dato fittizio

Proprietà della mediana

La Mediana rende minima la somma dei moduli degli scarti delle modalità. Supponiamo che A>0.

$$Q(A) = \sum_{i=1}^{k} |X_i - A| f_i$$

è minima se A=M_e.

$$\begin{aligned} Q(A) &= \sum_{X_{(i)}>A} \left(X_{(i)} - A\right) f_{(i)} + \sum_{X_{(i)} \le A} \left(A - X_{(i)}\right) f_{(i)} \\ &= \sum_{X_{(i)}>A} X_{(i)} f_{(i)} - \sum_{X_{(i)}>A} A f_{(i)} + \sum_{X_{(i)} \le A} A f_{(i)} - \sum_{X_{(i)} \le A} X_{(i)} f_{(i)} \pm \sum_{X_{(i)} \le A} X_{(i)} f_{(i)} \\ &= \sum_{X_{(i)}>A} X_{(i)} f_{(i)} - A\left(\sum_{X_{(i)}>A} f_{(i)}\right) + A\left(\sum_{X_{(i)} \le A} f_{(i)}\right) - \sum_{X_{(i)} \le A} X_{(i)} f_{(i)} + \sum_{X_{(i)} \le A} X_{(i)} f_{(i)} - \sum_{X_{(i)} \le A} X_{(i)} f_{(i)} \\ &= \sum_{X_{(i)}>A} X_{(i)} f_{(i)} + \sum_{X_{(i)} \le A} X_{(i)} f_{(i)} - A\left[1 - F(A)\right] + AF(A) - 2\sum_{X_{(i)} \le A} X_{(i)} f_{(i)} \\ &= \mu - A\left[1 - 2F(A)\right] - 2\sum_{X_{(i)} \le A} X_{(i)} f_{(i)} \end{aligned}$$

dove μ non dipende dalla costante A e l'ultimo termine cresce con A.

Q(A) è decrescente per A tale che F(A)<0.5 ed è crescente per F(A)>0.5; il minimo è perciò raggiunto per F(A)=0.5 che corrisponde a A=M_e.

La mediana per dati raggruppati

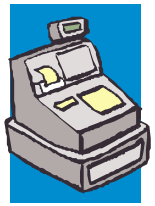
La mediana corrisponde alla modalità più piccola tra quelle che hanno frequenza relativa cumulata è maggiore o uguale a 0.5

$$Min\{x \in S | F(x) \ge 0.5\}$$

ESEMPIO:

Classificazione dei clienti di un punto vendita per numero di acquisti effettuati nel mese

Acquisti	Clienti	f_i	F_i
0	40	0.0964	0.0964
1	69	0.1663	0.2627
2	95	0.2289	0.4916
3	111	0.2675	0.7590
4	74	0.1783	0.9373
5	26	0.0627	1.0000
	415	1.0000	

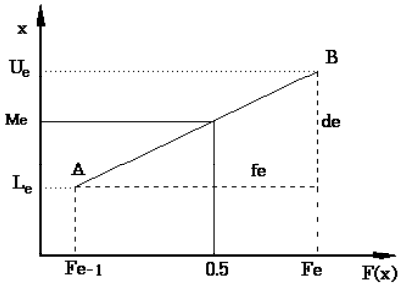


La Mediana è "3 acquisti"

Modalità in classi

E' possibile individuare solo la classe mediana, ovvero quella cui corrisponde la frequenza relativa cumulata di 0.5.

Per calcolare la mediana si ipotizza che le unità siano uniformi nella classe mediana per cui i segmenti della curva di graduazione sono rette ascendenti.



La retta AB ha equazione

$$X = L_e + \frac{(F - F_{e-1})}{h_e}$$

$$h_e = \frac{f_e}{d_e}$$

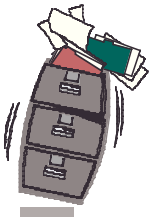
$$M_e = L_e + \frac{(0.5 - F_{e-1})}{h_e}; \quad per\ "e"\ tale\ che\ F_e = \underset{1 \le j \le k}{Min}\{F | F_j \ge 0.5\}$$

Esempio

Uno studio di consulenza ha classificato le operazioni di auditing per la revisione dei conti annuali secondo la durata in giorni. Calcolo della mediana

Durata		Revisioni	f_i	F_i
5	7	5	0.0595	0.0595
8	10	9	0.1071	0.1667
10	14	14	0.1667	0.3333
15	19	18	0.2143	0.5476
20	24	15	0.1786	0.7262
25	29	12	0.1429	0.8690
30	34	11	0.1310	1.0000
		84	1.0000	

$$M_e = 15 + \frac{(0.5 - 0.3333)}{0.2143/4} = 18.11$$



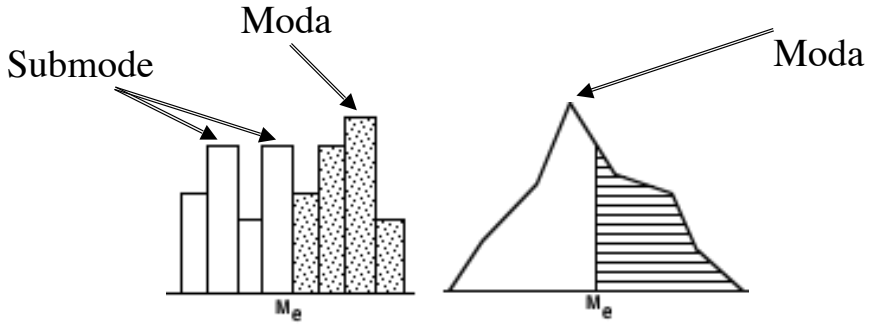
Il calcolo della mediana avviene in due passi:

1) Si individua la classe mediana

2) Si interpola per ottenere il valore puntuale.

Individuazione grafica

La mediana corrisponde alla retta $X=M_e$ che separa due parti uguali dell'istogramma o dell'area sottesa al poligono di frequenza (se le classi hanno uguale ampiezza).



I quantili (o percentili)

L'idea di valori di soglia che suddividano le modalità in particolari gruppi può essere generalizzata definendo il quantile di ordine "p"

Modalità discrete

$$X_p = (1-\gamma)X_{(i)} + \gamma X_{(i+1)},\ 0 < p < 1;\ i \le np < i+1;\ \gamma = \begin{cases} 0.5 & se\ [np] = np \\ 1 & se\ [np] < np \end{cases}$$

Modalità continue non in classi

$$X_p = (1-\gamma)X_{(i)} + \gamma X_{(i+1)} \quad i = [np + 0.5];\ \gamma = np + 0.5 - i$$

Modalità dense o continue in classi

$$X_p = (1-\gamma)L_i + \gamma U_i = L_i + \gamma(U_i - L_i);\ F_{i-1} \le p < F_i;\ \gamma = \frac{p - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}}$$

il quantile supera il p% delle modalità ed è superato dall' (1-p)%

Esempio_1

Discrete o dense singole

Consideriamo le n=18 rilevazioni degli arrivi di auto ad un punto di imbarco e calcoliamo il quantile del 17%.

612	623	666	744	883	898
964	970	983	1003	1016	1022
1029	1058	1085	1088	1122	1135

$$n * p = 18 * 0.17 = 3.06 \Rightarrow [np] < np \Rightarrow \gamma = 1$$

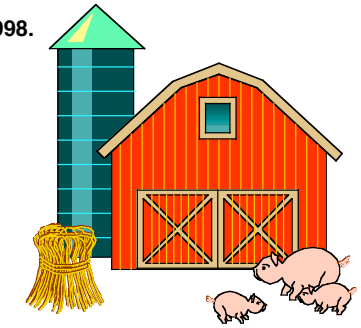
$$X_{0.17} = 0 * X_{(3)} + 1 * X_{(4)} = X_{(4)} = 744$$

Esempio_2

Continue singole

Principali coltivazioni agricole delle Marche. Anno 1998. Valori in ettari. Calcolo del quantile di ordine 0.60

Coltivazione	Superficie
Pomodoro	1'304
Pesca	1'486
Cavolfiore	1'967
Olivo	6'218
Mais ibrido	14'558
Uva da vino	24'272
Grano tenero	36'553
Girasole	38'281
Grano duro	123'049



$$n * p = 9 * 0.60 = 5.4 \Rightarrow i = [5.4 + 0.5] = [5.9] = 5;$$

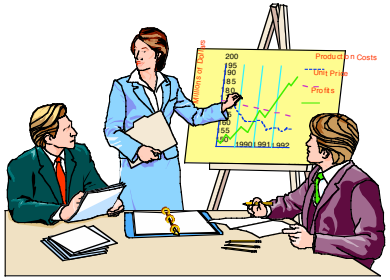
$$\gamma = 5.9 - 5 = 0.9$$

$$X_{0.6} = 0.1 * X_{(5)} + 0.9 * X_{(6)} = 23'300.$$

Esempio_3

Dimensioni delle operazioni di fusione e di acquisizione in Italia per fatturato. Calcolo di $X_{0.80}$.

Fatturato		Operazioni	f_i	F_i
1	5	30	0.2804	0.2804
5	20	36	0.3364	0.6168
20	40	14	0.1308	0.7477
40	60	10	0.0935	0.8411
60	100	12	0.1121	0.9533
100	150	5	0.0467	1.0000
		107	1.0000	



$$X_{0.80} = 40 + \frac{(0.80 - 0.7477)}{(0.0935 / 40)} = 51.19$$

Definizione alternativa

I quantili possono essere definiti evitando il riferimento ai valori ordinati.

Il quantile di ordine p con 0<p<1 è dato dalla soluzione del seguente problema di ottimizzazione

$$\underset{A \in R}{Min} \left[\sum_{t \in \{t | X_t \geq A\}} p |X_t - A| + \sum_{t \in \{t | X_t < A\}} (1 - p) |X_t - A| \right]$$

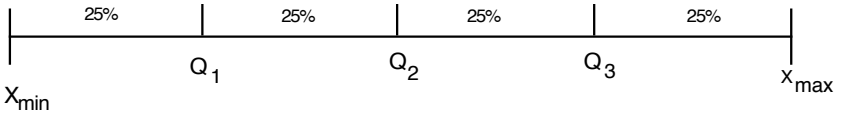
Il caso p=0.5 corrisponde alla mediana.

Questa formulazione può tornare utile per risolvere alcuni problemi di calcolo relativi all'uso dei valori assoluti.

Uso dei quantili

In genere, i quantili si utilizzano come soglie di separazione delle modalità in gruppi di numerosità prestabilita.

Fra i più usati sono da annoverare i tre quartili che suddividono le modalità in quattro gruppi ciascuno comprendente il 25% delle modalità:



Q1 supera il 25% ed è superato del 75%, Q2 coincide con la mediana ed è superato da tante unità quante ne supera esso stesso; Q3 supera il 75% delle unità ed è superato dal restante 25%.

Tra due soglie è sempre compreso il 25% di unità.

Esempio

L'esito di una selezione per l'ammissione ad un corso universitario a numero chiuso è riassunto nella tabella.

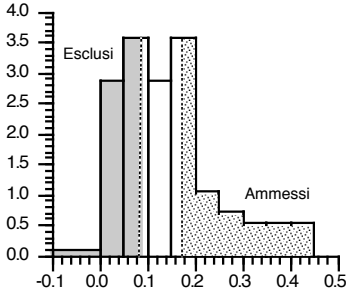
La commissione decide di ammettere il 40% con punteggio più alto, di escludere il 25% inferiore e di sottoporre il restante 35% a dei test suppletivi.

Quali sono le soglie di divisione?

$$X_{0.25} = 0.05 + \left(\frac{0.25 - 0.152}{0.205}\right)(0.10 - 0.05) = 0.0843;$$

$$X_{0.60} = 0.15 + \left(\frac{0.60 - 0.536}{0.143}\right)(0.20 - 0.15) = 0.1724$$

Punteggio		Candidati	f_i	F_i
<0.00		1	0.009	0.009
0.00	0.05	16	0.143	0.152
0.05	0.10	23	0.205	0.357
0.10	0.15	20	0.179	0.536
0.15	0.20	16	0.143	0.679
0.20	0.25	20	0.179	0.857
0.25	0.30	6	0.054	0.911
0.30	0.35	4	0.036	0.946
0.35	0.40	3	0.027	0.973
>0.40		3	0.027	1.000
		112	1.000	



La media aritmetica

E' la media per antonomasia, quella che si sottintende se non si qualifica ulteriormente il termine di media.

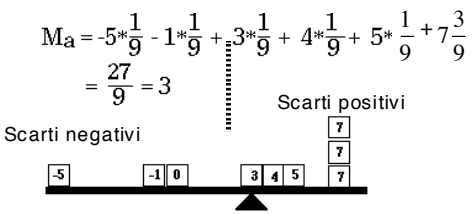
$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} X_i f_i = X_1 f_1 + X_2 f_2 + \ldots + X_k f_k$$

La media aritmetica è il punto di equilibrio fisico delle modalità spaziate in base al loro valore numerico e pesate con le frequenze relative:

x_i	n_i	f_i
-5	1	1/9
-1	1	1/9
0	1	1/9
3	1	1/9
4	1	1/9
5	1	1/9
7	3	3/9
	9	

$$\mathrm{Ma} = -5*\frac{1}{9} - 1*\frac{1}{9} + 3*\frac{1}{9} + 4*\frac{1}{9} + 5*\frac{1}{9} + 7\frac{3}{9}$$

$$= \frac{27}{9} = 3$$



Esempio

Numero di link visitati per ricerche su Google (max 8)

Siti x_i	Ricerche n_i	Freq. Rel. f_i	Prodotti $x_i f_i$
0	161	0.0042	0.0000
1	152	0.0304	0.0304
2	3957	0.1043	0.2086
3	7603	0.2004	0.6012
4	10263	0.2705	1.0821
5	8498	0.2240	1.1200
6	4984	0.1314	0.7883
7	1055	0.0278	0.1947
8	264	0.0070	0.0557
	37937	1.0000	4.0809

Da notare che si può calcolare moltiplicando le modalità per le frequenze assolute e poi dividendo l'ammontare ottenuto per il totale delle frequenze

Proprietà della media aritmetica

La media aritmetica, se sostituita alle modalità, mantiene inalterato l'ammontare complessivo nella rilevazione.

Il totale delle modalità è infatti: $\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{k} x_i n_i$

Se al posto di X_i si pone la media aritmetica si ottiene

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{X} n_i = \overline{X} \sum_{i=1}^{n} n_i = \overline{X} n = \frac{T}{n} n = T$$

Quindi la media aritmetica è quella quantità che ciascuna unità avrebbe se tutte avessero la stessa parte di variabile.

Internalità

Considerando le modalità in senso ascendente saranno vere le relazioni:

$$\sum_{i=1}^{k} X_{\min} f_i \le \sum_{i=1}^{k} X_i f_i \le \sum_{i=1}^{k} X_{\max} f_i$$

Ogni addendo della prima somma è inferiore o uguale ad ognuno della seconda che a loro volta sono inferiori o uguali a quelli della terza.

Ne consegue che:

$$X_{\min} \sum_{i=1}^{k} f_i \le \sum_{i=1}^{k} X_i f_i \le X_{\max} \sum_{i=1}^{k} f_i \Rightarrow X_{\min} \le \sum_{i=1}^{k} X_i f_i \le X_{\max}$$

Somma nulla degli scarti

La media aritmetica rende nulla la somma degli scarti tra le modalità e la media.

$$\sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{X}) f_i = \sum_{i=1}^{k} X_i f_i - \sum_{i=1}^{k} \overline{X} f_i = \sum_{i=1}^{k} X_i f_i - \overline{X} = \sum_{i=1}^{k} X_i f_i - \overline{X} = \overline{X} - \overline{X} = 0$$

ESEMPIO

Numero di dipendenti formati nei comuni e nelle province per settori.

Area	Dipendenti	Scarto
Interventi settoriali	15913	5887
Managerialità	10801	775
Organizzazione	10711	685
Controllo di gestione	9362	-664
Informatizzazione	3938	-6088
Gestione del personale	9431	-595
Totale	60156	0

La media aritmetica è $\overline{X} = 10026$ che, annullando la somma degli scarti, si conferma valore di equilibrio per la distribuzione.

Minimo della somma degli scarti al quadrato

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} (X_i - A)^2 f_i &= \sum_{i=1}^{k} \left[(X_i - \overline{X}) + (\overline{X} - A) \right]^2 f_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left[(X_i - \overline{X})^2 + (\overline{X} - A)^2 + 2(\overline{X} - A)(X_i - \overline{X}) \right] f_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{X})^2 f_i + \sum_{i=1}^{k} (\overline{X} - A)^2 f_i + 2(\overline{X} - A) \sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{X}) f_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{X})^2 f_i + \sum_{i=1}^{k} (\overline{X} - A)^2 f_i
\end{aligned}$$

Il terzo termine risulta nullo per la proprietà già dimostrata della media aritmetica di annullare la somma degli scarti semplici.

$$= \sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{X})^2 f_i + (\overline{X} - A)^2$$

il primo addendo non dipende da "A" il 2° è semplicemente un quadrato che ha il minimo nello zero raggiunto per $A = \overline{X}$

Riproducibilità per trasformazioni lineari

Quando la variabile x subisce una trasformazione lineare del tipo y=a + bx lo stesso succede alla media aritmetica.

Infatti: $$Y = \sum_{i=1}^{k} Y_i f_i = \sum_{i=1}^{k} (a + bX_i) f_i = \sum_{i=1}^{k} a f_i + b \sum_{i=1}^{k} X_i = a + b\overline{X}$$

ESEMPIO

Bilancio delle principali squadre di calcio di serie A (in milioni). Conversione in migliaia di dollari.

Squadre	M. Lire	m. Dollari
Juventus	1847	947.18
Milan	-27093	-13893.85
Inter	-21442	-10995.90
Roma	504	258.46
Parma	-25418	-13034.87
Lazio	251	128.72
Fiorentina	-10579	-5425.13
Sampdoria	-879	-450.77
Bologna	-8822	-4524.10
	-10181.22	-5221.14

il rapporto di conversione tra milioni di lire e migliaia di dollari è:

$$a = 0.0, \quad b = \frac{1000}{1950} = 0.512821$$

$$\overline{X} = -10181.22, \quad \overline{Y} = 0.512821 * (-10181.22) = -5221.14$$

Proprietà associativa

Supponiamo di individuare "g" gruppi. Le modalità sono individuate con due indici: il primo per il gruppo ed il secondo per le unità del gruppo:

Gruppi	*Valori*			*Unità*
G_1	X_{11}	X_{12}	X_{1k_1}	n_1
G_2	X_{21}	X_{22}	X_{2k_2}	n_2
$\vdots$				
G_g	X_{g1}	X_{g2}	X_{gk_g}	n_g

$$\sum_{i=1}^{g} n_i = n$$

Per ogni gruppo si può calcolare la propria media aritmetica

$$\mu_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_i}; \quad i = 1,2,\ldots,g$$

Proprietà associativa/2

La proprietà associativa consente di ricavare la media aritmetica complessiva:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{g} n_i \frac{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_i}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{g} n_i \mu_i}{n} = \sum_{j=1}^{g} \mu_i f_i$$

ESEMPIO

Per tre diverse aree si è considerato il consumo medio annuo di zucchero.

Aree	*Unità*	*Medie*
Zona_A	647	115
Zona_B	173	80
Zona_C	435	75
totale	1255	?

$$\overline{X} = \frac{647}{1255} * 115 + \frac{173}{1255} * 80 + \frac{435}{1255} * 75 = 96.31$$

Modalità raggruppate in classi

E' un caso particolare della proprietà associativa.

Purtroppo le medie aritmetiche di classe non sono note ed occorre stimarle.

La tecnica più usata è quella di adoperare il valore centrale delle classi:

$$\overline{X}_i = \frac{1}{2} L_i + \frac{1}{2} U_i \quad i = 1,2,\ldots,k$$

ESEMPIO

Casi di epatite A in un comune.

Le classi estreme hanno un'ampiezza pari alla metà delle ampiezza delle classi loro continue.

Età		Pazienti	c_i	f_i	Xif_i
≤9		662	6.75	0.5400	3.6448
10	19	420	14.50	0.3426	4.9674
20	29	117	24.50	0.0954	2.3381
30	39	18	34.50	0.0147	0.5065
40	49	5	44.50	0.0041	0.1815
≥50		4	52.25	0.0033	0.1705
		1226		1.0000	11.8087

Le medie di potenze

La media aritmetica rientra in una classe che fornisce una espressione dell'ordine di grandezza del fenomeno a partire da tutti i valori riscontrati:

$$M(X_1,\ldots,X_k;f_1,\ldots,f_k;\alpha) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} X_i^{\alpha} f_i \right\}^{1/\alpha}$$

Che scaturiscono dal principio di Chisini:

La misura di centralità deve lasciare invariato un particolare aspetto del fenomeno allorché al posto di ogni X_i si sostituisce "M":

Ad esempio, la media aritmetica posta in vece di ciascuna modalità lascia invariato l'ammontare complessivo delle rilevazioni

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{X} n_i = \overline{X} \sum_{i=1}^{k} n_i = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i n_i}{n} * n = \sum_{i=1}^{k} X_i n_i = T$$

La media geometrica

E' una media particolarmente adatta come misura di centralità per fenomeni evolutivi che si realizzano proporzionalmente al livello già raggiunto.

Formula classica

$$Mg = \prod_{i=1}^{k} x_i^{f_i} = x_1^{f1} * x_2^{f2} * \ldots * x_k^{fk} \quad \text{per } x_i>0$$

Formula per il calcolo

$$Mg = e^{\left\{\sum_{i=1}^{k} f_i \mathrm{Ln}(x_i)\right\}}$$

Esempio.

x_i	n_i	f_i	$\mathrm{Ln}(x_i)$	$f_i\mathrm{Ln}(x_i)$
1	2	2/10	0.0000	0.0000
3	1	1/10	1.0986	0.1099
4	1	1/10	1.3863	0.1386
5	1	1/10	1.6094	0.1609
6	1	1/10	1.7918	0.1792
7	1	1/10	1.9459	0.1946
9	3	3/10	2.1972	0.6592
	10			1.4424

$$Mg = e^{1.4424} = 4.2308$$

Proprietà della media geometrica

E' meno soggetta a variazioni rispetto alla loro media aritmetica:

X_i	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024		204.6
$\mathrm{Log}(X_i)$	0.3010	0.6021	0.9031	1.2041	1.5051	1.8062	2.1072	2.4082	2.7093	3.0103	1.6557	45.2548

G=45.25 supera ed è superata dallo stesso numero di valori rispetto alla media aritmetica: μ=204 che ne supera sette ed è superata solo da tre.

La media armonica

Si tratta di un indice posizione da utilizzare soprattutto per misurare la centralità in situazioni in cui interessa il contributo delle modalità alla composizione di un tutto.

$$H = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{X_i}}; \; per \; X_i \neq 0$$

Figli	Famiglie	f_i	$(1/X)f_i$
1	185	0.5362	0.5362
2	78	0.2261	0.1130
3	33	0.0957	0.0319
4	25	0.0725	0.0181
5	13	0.0377	0.0075
6	8	0.0232	0.0039
7	3	0.0087	0.0012
	345	1.0000	0.7119

Per calcolare la media armonica si calcola prima la media aritmetica di reciproci e di questa si calcola il reciproco:

$$H = \frac{1}{0.7119} = 1.4047$$

Valori remoti (outlier)

sono valori (uno o più) che appaiono inusuali senza che li si possa ritenere errati

Ciò dipende dal contesto:

{5, 13, 2, 291, 11, 6}

Non è un outlier né un errore tipografico: numero di clienti in coda ad uno sportello

{3.6, 2.7, 2.8, 3.9, 2.1, 85.8, 3.4, 2.8}

Peso alla nascita di un campione di neonati . E' anomalo se si tratta di persone

Valori remoti /2

Dato un insieme di modalità quantitative, una di esse sarà maggiore delle altre ed un'altra sarà minore.

Se gli estremi sono molto remoti nascerà il sospetto di disfunzioni:

Attenzione! Se un fenomeno può produrre modalità estremamente piccole e/o estremamente grandi è inevitabile che qualcuno si mostri prima o poi.

… E magari proprio nei vostri dati.

Una ASL ha storicamente richiesto il rimborso di un numero mensile di parti cesarei con complicazioni che oscilla tra i 20 ed i 30. Un dato mese, richiede rimborsi per 120.

Questo non necessariamente è un dato anomalo, ma è la spia di un cambiamento nel meccanismo dei rimborsi o nel management della ASL.

Valori anomali e medie

La presenza di valori isolati rispetto al resto della distribuzione ha una incidenza diversa a secondo della media che si usa

A	5	8	9	9	10	11	12	15	20	**valore isolato**
B	5	8	9	9	10	12	12	15	2013	

μ passa da 11 a 210

La media geometrica cresce, ma meno della media aritmeticae più della armonica.

La mediana, non cambia (al massimo si sposta di una posizione)

La moda non cambia (il valore isolato per definizione non può fare moda)

La media aritmetica ponderata

La media aritmetica è un caso speciale della media ponderata:

$$M(w_1, w_2, \ldots, w_k) = \sum_{i=1}^{k} w_i X_i; \;\; con \;\; w_i \geq 0; \;\; \sum_{i=1}^{k} w_i = 1$$

dove w_i è il "peso" con cui la X_i contribuisce alla media. M coincide con $\bar{X}$ se $w_i = f_i$.

ESEMPIO:

Un campione di giovani è stato classificato per numero di domande inviato alle aziende fuori regione

Domande	Disoccupati	f_i	$1/f_i$	w_i	Xw_i
0	25	0.1667	6.0000	0.0239	0.0000
1	30	0.2000	5.0000	0.0199	0.0199
2	26	0.1733	5.7692	0.0230	0.0459
3	20	0.1333	7.5000	0.0298	0.0895
4	14	0.0933	10.7143	0.0426	0.1705
5	11	0.0733	13.6364	0.0543	0.2713
6	8	0.0533	18.7500	0.0746	0.4477
7	7	0.0467	21.4286	0.0853	0.5969
8	4	0.0267	37.5000	0.1492	1.1938
9	3	0.0200	50.0000	0.1990	1.7907
10	2	0.0133	75.0000	0.2984	2.9845
	150	1.0000	251.2985	1.0000	7.6108

La media aritmetica, calcolata in base alle frequenze relative è μ=2.86; nello schema vi è invece il calcolo in base ai pesi:

$$w_i = \frac{1/f_i}{\sum_{j=1}^{k} 1/f_j}$$

che inverte l'importanza delle modalità: quelle meno frequenti diventano più rilevanti e quelle più riscontrate vedono ridotto il loro contributo.

Le medie troncate

La "centralità" può risultare contaminata dalla presenza di valori troppo piccoli o troppo grandi.

la loro influenza può essere controllata escludendo dalle medie una certa frazione di unità.

L'esclusione può avvenire eliminando le unità in una delle due code o in entrambe.

Supponiamo di cancellare i valori inferiori o uguali al quantile $\gamma 2$ e superiori o uguali al quantile $\gamma 1$. La media aritmetica è:

$$M_{\gamma_1,\gamma_2} = \frac{\sum_{x_{\gamma_1} < x < x_{\gamma_1}} X_{(i)}}{n - [n\gamma_1] - [n\gamma_2]}$$

E' nota come media *trimmed* (potata)

Esempio

Un partito politico ha ottenuto n n=29 comuni i seguenti voti:

831	195	781	294	249	241	749	146	286	1445
1367	266	977	1668	1122	563	498	630	1164	1240
620	377	1516	240	724	300	1097	228	2213	

La media aritmetica per l'intera rilevazione è $M_{0,0}$=759.55.

Eliminiamo i valori inferiori al 1° decile ed 19° ventile, cioè vincoliamo i voti nell'intervallo:

$$X_{0.1} < X < X_{0.95}$$

I quantili sono: $X_{0.1}$=X(3)=228, e $X_{0.95}$=X(28)=1668 e quindi si dovranno escludere dal calcolo X(1)=146,X(2)=195 e X(29)=2213

La media aritmetica troncata è: $M_{0.1,0.05}$=749.

Le medie winsorizzate

Invece di eliminarli, i valori anomali possono essere sostituiti con delle stime: medie winsorizzate.

Paese	Quota	Paese	Quota
Algeria	0.764	Libia	1.409
Gabon	0.293	Nigeria	1.857
Indonesia	1.374	Qatar	0.380
Iran	3.490	Arabia S.	8.395
Iraq	0.500	Emirati	2.260
Kuwait	1.500	Venezuela	2.360

La media aritmetica semplice: $\overline{X} = 2.049$ è ritenuta poco attendibile a causa di modalità abnormi negli estremi. Eliminiamo perciò il valore più piccolo e quello più grande per sostituirli con il primo e l'ultimo quartile rispettivamente:$X_{0.25}$=0.5, $X_{0.75}$=2.36. M_w=1.563

La tecnica di sostituzione e molto varia e può risultare arbitraria

Uso dei valori medi_1

I valori medi riescono a dare solo un'idea di massima della distribuzione

Il loro uso non può essere disgiunto dall'apporto informativo di altri indici descrittivi.

Il principio del Chisini è un importante ausilio per la scelta della media. C'è da notare però che le medie potenziate stanno tra di loro in una precisa relazione d'ordine

$$M_h \leq M_g \leq M_a \leq M_q$$

ed è difficile che conclusioni tratte sulla base di una siano poi sconvolte o alterate dall' uso di un'altra.

D'altra parte potrebbero mancare indicazioni su quale funzione dei dati osservati occorra preservare

Uso dei valori medi_2

Le medie troncate e perequate vanno usate con prudenza:

i valori anomali sono tali solo se si ha una conoscenza completa dello spettro dei valori riscontrabili.

Certi suoni a frequenza molto bassa o molto alta sono a noi "remoti"; questo però non significa che non esistono, anzi sono centrali per l'udito di altri esseri viventi.

D'altra parte, è accertata la sensibilità della media aritmetica ai valori grandi ed è perciò inadatta se tali manifestazioni sono marginali:

Uso dei valori medi_3

Un discorso a parte meritano la moda e la mediana (i singoli percentili hanno poco rilievo come indici di posizione).

Innanzitutto la prima può essere usata anche per carattere qualitativi e la seconda per caratteri ordinali. Hanno perciò un raggio d'azione più ampio delle medie potenziate.

La moda ha il difetto di non essere sempre calcolabile o sempre significativa;

La mediana è resistente ai valori anomali, ma come la moda non sfrutta tutte le informazioni rilevate.