

Soluzioni esercizi del capitolo 7

VC01:

$$S = \left\{ (0,0,0,0); (0,0,0,1); (0,0,1,0); (0,0,1,1); (0,1,0,0); (0,1,0,1); (0,1,1,0); (0,1,1,1); (1,0,0,0); (1,0,0,1); (1,0,1,0); (1,0,1,1); (1,1,0,0); (1,1,0,1); (1,1,1,0); (1,1,1,1) \right\}$$

$P[(x,x,x,x)] = 0.7^a 0.3^{4-a}$; dove a = numero di "1" nella quaterna
 $Y \in \{0,1,2,3,4\}$; $P(Y=y) = \{0.0081, 0.0756, 0.2656, 0.4116, 0.2406\}$

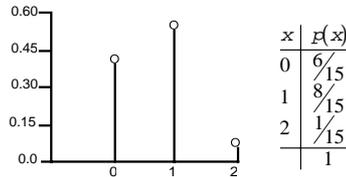
VC02:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (L,L,L); (L,L,O); (L,L,C); (L,O,L); (L,O,O); (L,O,C); \\ (L,C,L); (L,C,O); (L,C,C); \\ (O,L,L); (O,L,O); (O,L,C); (O,O,L); (O,O,O); (O,O,C); \\ (O,C,L); (O,C,O); (O,C,C); \\ (C,L,L); (C,L,O); (C,L,C); (C,O,L); (C,O,O); (C,O,C); \\ (C,C,L); (C,C,O); (C,C,C) \end{array} \right\}$$

a) $Y \in \{0,1,2,3\}$ $conP[Y=a] = \binom{3}{a} 0.5^a 0.5^{3-a}$;
 dove a = numero di sportelli liberi

b) Sono non negative ed hanno somma unitaria.

VC03:



VC04: Come ipotesi sulle probabilità di vendita:

0	0.11	1	0.27	2	0.41	3	0.10	4	0.08	5	0.02	6	0.01	7	0.01	8	0.01	9	0.01	10	0.00
---	------	---	------	---	------	---	------	---	------	---	------	---	------	---	------	---	------	---	------	----	------

VC05:

x	0	1	2
p(x)	0.09	0.42	0.49

VC06: $P(X \leq 4) = 0.99$; $P(1 \leq X < 4) = 0.52$; $P(X > 0) = 0.55$.

VC07: a) 0.1; b) 0.6; c) 0.7; d) 0.9; e) 0.0; f) 0.9

VC08: tenuto conto che:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$\sum_{i=1}^n (2i-1)^3 = \sum_{i=1}^n (8i^3 - 12i^2 + 6i - 1) = 2n^2(n+1)^2 -$$

si ottiene:

$$-2(n^2+n)(2n+1) + 3(n^2+1) - n = 4n^2 - n^2 = n^2(2n^2 - 1)$$

VC09: l'universo è: $S = \{(T,C), (C,T), (T,T), (C,C)\}$; sia $P(C) = p$ e $P(T) = 1-p$ e poniamo $X=1$ se le facce sono uguali e $X=0$ se sono diverse. Quindi $P(X=1) = P[(C \cap C) \cup (T \cap T)] = P(C) \cdot P(C) + P(T) \cdot P(T) = p^2 + (1-p)^2$ che è minima per $p=0.5$

VC10:

y	0	1	2
p(y)	0.3125	0.0625	0.6250

VC11: a) E' basata sulla progressione geometrica per la quale vale:

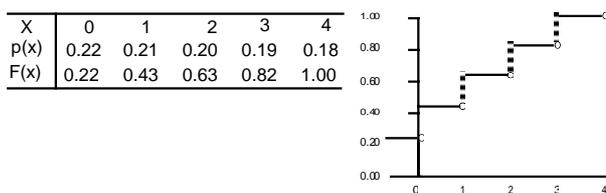
$$\sum_{i=1}^n a\theta^{i-1} = a \frac{(\theta^n - 1)}{(\theta - 1)}$$

b) E' decrescente per $\theta < 1$ e crescente per $\theta > 1$.

VC12: a) 0.8585; b) 0.2415; c) 0.7379;

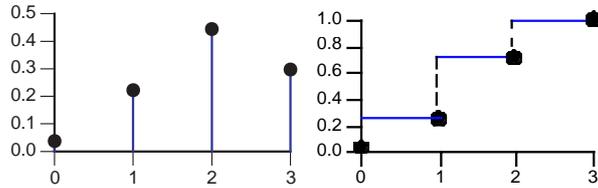
VC13: a) 2/7; b) 4/7; c) 1/7.

VC14:



VC15:

x	0	1	2	3
p(x)	0.037	0.222	0.444	0.297
F(x)	0.037	0.259	0.703	1.000



VC16:

x	0	1	2	3
p(x)	0.25	0.50	0.25	1.00
F(x)	0.25	0.75	1.00	

$F(3.6) - F(1.2) = 1 - 0.216 = 0.784$; $F(-2) = 0$;

VC17: $1 - F(2.2) = 1 - 0.648 = 0.352$

VC18: $p(x) = \frac{3x(x-1)+1}{\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2}$ per $x=1,2,3,\dots,n$

VC19: $F(x) = \begin{cases} \frac{i(i-1)}{72} & \text{se } i=2,3,\dots,6 \\ \frac{5}{12} + \frac{(i-6)(19-i)}{72} & \text{se } i=7,8,\dots,12 \end{cases}$

VC20:

$j=1 \Rightarrow F(X_1) = p(X_0) + p(X_1)$; $j=2 \Rightarrow F(X_2) = F(X_1) + p(X_2) = p(X_0) + p(X_1) + p(X_2)$

$j=i \Rightarrow F(X_i) = \sum_{j=0}^i p(X_j)$

VC21:

y	0	2	8	18	32
p(y)	0.50	0.20	0.15	0.10	0.05
F(y)	0.50	0.70	0.85	0.90	1.00

VC22:

y	0.040	0.125	1	5
p(y)	0.10	0.20	0.60	0.10
F(y)	0.10	0.30	0.90	1.00

VC23:

x	2	3	4	5
p(x)	0.1	0.2	0.3	0.4
F(x)	0.1	0.3	0.6	1.0

; $M_e=4$; $M_o=5$

VC24: $M_o=1$, $M_e=3$, $\mu=3.44$. $Q_1=1$, $Q_3=5$, $DI=4$.

VC25:

a) $E(X) = (n+1)/2$; b) $P(X > x) = (1-1/n)^x$

$$E(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \left(1 - \frac{1}{n}\right)^x = \frac{q}{n} \sum_{y=0}^{\infty} (y+1) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^y = \frac{q}{n} \left[\frac{1}{1-q} + \frac{q}{(1-q)^2} \right] = n$$

$$q = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Banca: $10'000'000 * \left(\frac{\sum_{i=1}^{10} 1.04^i}{1.08^{10}} \right) = 58'000'000$;

VC26: Casinò: $360'000'000 * \left(\frac{\sum_{i=1}^{10} 1.08^i}{37} \right) = 121'000'000$

Converrebbe quindi giocare al casinò.

n	p(x)	F(x)
1	0.1796	0.1796
2	0.2953	0.4748
3	0.2674	0.7422
4	0.1473	0.8895
5	0.0514	0.9410
6	0.0115	0.9525
7	0.0016	0.9541

b) Il gioco non è equo ed il *payoff* peggiora all'aumentare delle puntate.

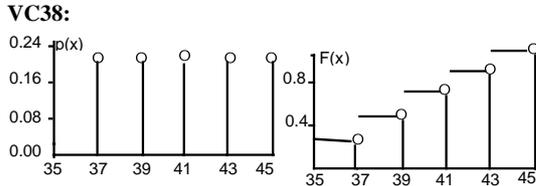
x	0	1	2	3	
p(x)	0.15	0.45	0.21	0.09	1.00

- VC28:** a) $E(Y)=3.13; 1.14$; il livello di grigio si è ridurrà, in media, di 2 valori.
VC29: a) $k=1/2$; b) $\mu=2$; c) $8/10$.
VC30: a) $\mu=10=M_c$; $\sigma=4.45$, $S_{Me}=3.72$;
 b) Il modello presenta una rilevante variabilità dato che in media ci si aspetta che lo scarto quadratico sia superiore a 4 e che lo scarto assoluto dalla mediana sia quasi quattro.
VC31: 1.23, 1.77, 2.53.
VC32:

$$E(Z) = E\left(-\frac{\mu}{\sigma} + \frac{X}{\sigma}\right) = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{E(X)}{\sigma} = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma} = 0;$$

$$\sigma(Z) = \sigma^2\left(-\frac{\mu}{\sigma} + \frac{X}{\sigma}\right) = \frac{\sigma^2(x)}{\sigma^2} = \frac{\sigma}{\sigma} = 1$$

- VC33:** $A=M_c$ e $A=\mu$.
VC34: a) $P(9 < x < 15) \geq 11/36$; b) $P(|x-15| > 7) \leq 24/49$;
 c) Distribuzione degenera cioè variabilità nulla e $P(X=15)=1$.
VC35: $\mu=1, \sigma=1, P \leq 0.75$
VC36: $\mu_r = E(X^r) = 1^r \cdot p = p$; $\mu'_3 = p - 3p^2 + 2p^3$, $\mu'_4 = p - 4p^2 + 6p^3 - 3p^4$
VC37:
 a) $E(X)=0.2$; $\sigma(X)=1.99$;
 b) $E(Y)=4.6$; $\sigma(X)=3.98$;
 c) E' una variabile di Dirac con $Y=3$.



- VC39:** a) 0.5; b) 0.333; c) 0.583
VC40: $\mu_3 = n(n+1)^2/4$, $\mu'_3 = (n+1)^2/4 [n - (2n+1) + n + 1] = 0$; $\mu_4 = [(n+1)/30][6n^3 + 9n^2 + n - 1]$.
VC41: $\mu=7.5$, $\sigma=4.61$
VC42: a) $E(N)=3(1+p+p^2-4p^3+2p^4)$; b) $p=0.5$
VC53: a) $E(X)=21$, $\sigma(X)=21.656$;
 b) La media geometrica con $M_g(X)=11.31$
VC44: $k(x) = [(n-x)/(x-1)] [p/(1-p)]$
VC45: $p(X \geq 6) \geq 0.99$ implica che $n=9$ piante
VC46: $p(X \geq 10) = 85.2\%$
VC47: $p(7 \leq X \leq 13) = 45.1\%$
VC48: a) $\mu_3 = np(1-p)(1-2p) = 0$ se $p=1/2$; $g_2 = 3 + \{[1-6p(1-p)]/np(1-p)\}$ tende a tre se "n" tende ad infinito; b) Per $p=0.5$ ed n fissato.
VC49: $\mu=8$, $\sigma=2$, $p(6)+p(7)+p(8)+p(9)+p(10)=0.79$.
VC50: a) 61.3%; b) 0.05%; c) 92.7%.
VC51:

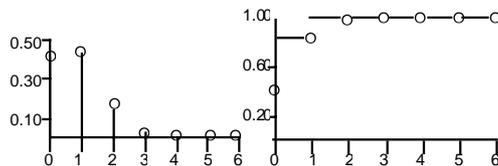
$$P(K=k) = P\left(\frac{n-x}{x} = k\right) = P(x = n - [nk])$$

$$P(X=x) = \binom{n-[nk]}{x} p^x (1-p)^{n-[nk]-x}$$

VC52: $P(|H-p| \geq \epsilon) \leq [p(1-p)/\epsilon n]^2 \leq (1/4\epsilon n)^2$ dato che $p(1-p) \leq 0.25$

VC53:

a) $p(x) = C(6,x)C(39,6-x)/C(45,6)$



VC54: se fossero vere le proporzioni della fatture la probabilità di 8 scatole di piselli su 10 (senza reimmissione) sarebbe 0.000023 cioè 1 possibilità su 5000. Valori così piccoli sotto l'ipotesi portano di solito a rifiutare l'ipotesi.

VC55: $0.3483 + 0.2147 + 0.0507 = 0.6137$

VC56:

a) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{i=0}^2 \frac{\binom{5}{i} \binom{16}{7-i}}{\binom{21}{7}} = 0.1816$

VC57:

a) $P(E) = \frac{\binom{28}{18} \binom{52}{2}}{\binom{80}{20}} = 0.492 * 10^{-9}$ (1 su 2 miliardi);

b) 97%.

VC58:

a) $p(x) = \frac{\binom{6}{x} \binom{5}{3-x}}{462}$; $x = 0, 1, 2, 3$; b) $\mu=1$; $\sigma=2.56$

VC59: a) $\mu=1.98 \approx 2$, $\sigma=1.14$; b) 57%

VC60: a) 3, 2.896;

b) $P(n_i > 30) = 1 - \sum C(150, i) 0.015^i 0.985^{150-i}$;

c) No; $N=6069$ che è troppo distante da 10^7 000.

VC61: $C(10,0) * C(490,10) / C(500,10) = 0.816$;

$C(10,0) 0.02^0 0.98^{10} = 0.817$.

VC62: a) $\mu=37$, $\sigma=8.18$; b) 0.9879;

VC63: E' la formulazione che danno Mood, Graybill and Boes (1974, p. 212)

VC64: sono tagliate fuori le successioni infinite di eventi.

VC65:

a) Applichiamo il test di D'Alembert:

$$\text{Se } \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{p_{i+1}}{p_i} = \begin{cases} < 1 \text{ la serie converge} \\ > 1 \text{ la serie diverge} \\ = 1 - \text{ il test non è conclusivo;} \\ = 1 + \text{ la serie diverge} \end{cases}$$

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{i!}{(i+1)!} = \frac{1}{i+1} \rightarrow 0 \text{ quindi la serie converge}$$

b) Il criterio di condensazione (cfr. ad esempio Khuri 1993, p. 153) di Cauchy dice che se $\{p_i\}$ è una successione di termini positivi e monotona decrescente allora $\sum p_i$ converge o diverge se lo stesso accade alla serie $2^i p_{2^i}$. Le condizioni ricorrono per la proposta n.2 e dunque:

$$p_i = \frac{2^i k}{2^i \ln(2^i)} = \frac{k/\ln(2)}{i}$$

che coincide con la serie armonica che è divergente.

c) Se $\{p_i\}$ e $\{q_i\}$ sono successione di termini positivi e:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{p_i}{q_i} = \delta$$

allora le due serie sono entrambe convergenti ed entrambe divergenti. Per la funzione proposta la serie è prossima a $p_i = i^{-2}$ che è convergente. Occorre solo inserire una costante che renda la somma unitaria.

VC66: se $\{E_i\}$ è una successione decrescente, allora $\{E_1 - E_i\}$ è crescente per cui

$$P\left[\lim_{n \rightarrow \infty} (E_1 - E_n)\right] = P(E_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n)$$

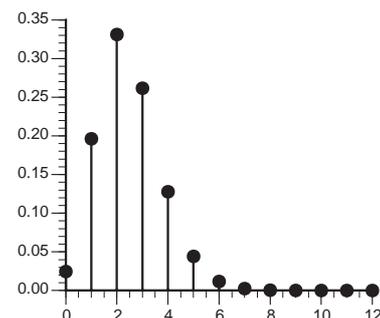
Considerato che

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (E_1 - E_n) = E_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$$

si ottiene il risultato cercato.

VC67: perché i termini sono tutti non negativi e le sottosuccessioni sono minoranti di una successione convergente e quindi convergono indipendentemente dall'ordine degli addendi.

VC68: la serie converge a "15e" e per ottenere una distribuzione di probabilità basterà dividere la formula per tale costante.

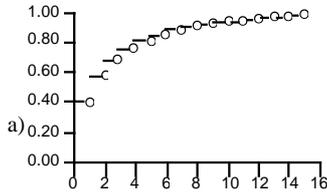


VC69: a)0.9999796; b)0.0001956; c)0.0126806.

VC70:

a) $F(i)-F(i-1)=d(i+1)/[(i+d)(i-1+d)]>0$; $F(\infty)=1$, $F(0)=0$;
 b) Cresce rapidamente per i valori piccoli di "i", ma poi tende a saturarsi con aumenti impercettibili non appena "i" diventa grande. Il parametro "d" riduce o accentua la concavità.

VC71:



b) In un articolo del 1943 Fisher R.A ed altri lo ha hanno usato per la frequenza di animali per numero di specie finiti nelle trappole.

c) $p_j = -\frac{j\theta^j}{\ln(1-\theta)}$; per $j=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, $0 < \theta < 1$;

VC72:

a) E' bimodale con moda in $i=0$ e $i=1$; $Q_1=0$, $Q_3=2$;
 b) La forma della distribuzione è ad "L" per cui la moda, se è plausibile in tale caso, è per $i=1$. $Q_1=1=Q_2$ e $Q_3=3$.

VC73: diverge perché coincide con la serie armonica:

$$\mu = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{6x}{(\pi x)^2} = \frac{6}{\pi} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x}$$

VC74:

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i^2} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \zeta(2) = 1.644834;$$

a) $\mu_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{2i}}{i^2} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i^2} \rightarrow \infty$

b) valori grandi hanno probabilità rilevante cosicché scarti dalla media elevati hanno probabilità non nulla anche per modalità infinitamente lontane dalla media.

VC75:

a) Svolgere le successioni ad esempio su foglio elettronico. $z(4)=1.082323$, $\mu=1.301$, $\sigma=0.2775$.

b) Fenomeni in cui la probabilità di superare una soglia minima è alta, ma che si riduce all'aumentare della soglia. La rarefazione dei casi non impedisce la presenza di valori alti con probabilità elevate. Può essere usato come modello per la distribuzione delle città secondo il numero degli abitanti o dei prodotti di un ipermercato per prezzo.

VC76:

a) $E(X^{-1}) = \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right) \frac{1.442695}{x^{2^x}} = \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) \frac{1.442695}{2^x} = 0.493422$

b) $E(X^2) = 1.442695 \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x}{2^x} = 2.88539$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x+1}{2^{x+1}}}{\frac{x}{2^x}} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{x+1}{2x} \right| = 1/2 < 1$ μ_2 esiste finito

VC77:

a) Il rapporto tra due termini contigui concernenti μ_r è

$$\frac{(i+1)^r \frac{e^{-\lambda} \lambda^{i+1}}{(i+1)!}}{i^r \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}} = \left(1 + \frac{1}{i}\right)^r \frac{\lambda}{i+1}$$

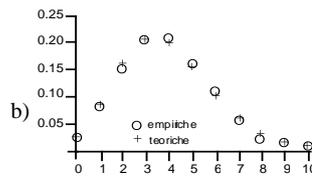
che tende a zero per ogni "r" e per ogni λ finito; perciò la serie è convergente in base al criterio di D'Alembert.

$$\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots\right) + \left(1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} - \frac{\lambda^3}{3!} + \dots\right) \right] =$$

b) $P(x = \text{pari}) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2x} e^{-\lambda}}{(2x)!} = e^{-\lambda} \left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \right) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}$

VC78:

a) $\lambda=3.87$



c) $\hat{\lambda} = 3.94$; L'adattamento è diverso, ma altrettanto buono. Lo studio della statistica inferenziale consentirà di scegliere il metodo di stima più efficace.

$$B(10000, 1/80000): P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) =$$

VC79: a) $1 - \sum_{j=0}^3 \binom{10000}{j} \left(\frac{1}{80000}\right)^j \left(\frac{79999}{80000}\right)^{10000-j} = 0.038259$

Poi(1.25): $1 - e^{-1.25} \sum_{j=0}^3 \frac{1.25^j}{j!} = 0.038269$

b) $p(0) = e^{-\lambda}$; $p(1) = \lambda e^{-\lambda} \Rightarrow e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}$ se e solo se $\lambda = 1$

c) $1 - p(0) = 1 - e^{-\lambda} = 0.25 \Rightarrow e^{-\lambda} = 0.75 \Rightarrow \lambda = \ln\left(\frac{1}{0.75}\right) = 0.288$

$$P(X \leq 10) = \sum_{x=0}^{10} \frac{\binom{10000}{x} \binom{90000}{150-x}}{\binom{100000}{150}} \approx \sum_{x=0}^{10} \binom{150}{x} 0.1^x 0.9^{150-x}$$

VC80:

$$\approx e^{-15} \sum_{x=0}^{10} \frac{15^x}{x!} = 11.85\%$$

VC81:

$$p(X \geq 27) = 1 - \sum_{x=0}^{26} \frac{\binom{6000}{x} \binom{24000}{45-x}}{\binom{250000}{45}} = 1 - \sum_{x=0}^{26} \binom{45}{x} (0.25)^x (0.75)^{45-x}$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{26} \frac{11.25^x e^{-11.25}}{x!} = 1 - 0.999953 = 0.005\%$$

Le rotture definitive sono molto di più di quanto non ci si aspetterebbe se fossero rispettate le proporzioni montate sui camion. La marca risulta Pexima di nome e di fatto.

a) $t = 2$, $\lambda t = 1 * 2 = 2$;

VC82: b) $t = 0.5$; $p(1) = \frac{(1 * 0.5)^1 e^{-1 * 0.5}}{1!} = 30.33\%$;

c) $t = 10$; $1 - p(0) = 0.99996$

VC83: $P(X \leq m) \geq 0.95 \Rightarrow m = 69$

VC84: le molecole del composto debbono essere distribuite casualmente e indipendentemente in ogni metro cubo di aria. La rarefazione deve essere tale che la probabilità di riscontrare più di una molecola, diciamo in un centimetro cubo, deve essere zero o quasi.

VC85: $P(X = x) = (x-1)0.03^2 (0.97)^{x-2}$, $x = 2, 3, 4, \dots$

VC86: ragioniamo prima su S_1 . Questa rimane vuota dopo che siano stati consumati $n+n-r=2n-r$ fiammiferi (tutti quelli nella S_1 più quelli della S_2 tranne gli "r" che qui sono rimasti). Le scelte possono essere avvenute in $C(2n-r, n-r)$ modi diversi ognuna con probabilità $p^n (1-p)^{n-r}$. Lo stesso vale per la scatola S_2 e quindi $P(\text{una vuota e l'altra con "r"}) = C(2n-r, n-r) p^n (1-p)^{n-r} + C(2n-r, n-r) p^{n-r} (1-p)^n$.

VC87: $p(x \leq 14) = \sum_{x=3}^{14} \binom{x+2}{x} 0.1^3 0.99^x = 84.1\%$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+i-1}{j} x^j = \frac{1}{(1-x)^i} \text{ se } -1 < x < 1$$

$$\mu = p \sum_{i=0}^{\infty} i(1-p)^i = p \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2-1}{k} (1-p)^k = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

VC88: $\mu_{2i} = E[i(i-1)] = p \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)(1-p)^i = p \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)(1-p)^{i-1}$

$$= 2p \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3-1}{k} (1-p)^k = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

VC89:

$$\begin{aligned} \mu_{3!} &= p \sum_{j=3}^{\infty} j(j-1)(j-2)(1-p)^{j-1} = 6p \sum_{j=3}^{\infty} \binom{j+3}{3} (1-p)^{j-1} \\ &= 6p(1-p)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4-1}{3} (1-p)^k = \frac{6(1-p)^2}{p^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \mu_{3!} + 2\mu_2 - 2\mu = \frac{6(1-p)^2}{p^3} + 4 \frac{(1-p)}{p^2} - \frac{2}{p} = \\ &= \frac{2}{p} \left[3 \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 + 2 \left(\frac{1-p}{p} \right) - 1 \right] = 0 \end{aligned}$$

per p=0.75

VC90:

a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Osservate	436	107	61	40	14	23	6	11	1	0	22
Teoriche	360	120	60	36	24	17	12	10	8	6	65

b)

Poiché $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ si ha: $\frac{P_{i+1}}{P_i} = i \frac{\Gamma(i+a+1)}{\Gamma(i+a+2)} = \frac{i}{i+a+1}$

per cui se si nota una curva ascendente con concavità rivolta verso il basso sarà un indizio per l'adozione del modello di Yule.

VC91:

a) La probabilità è nulla avendo l'insieme dei razionali la cardinalità dell'enumerabile rispetto alla cardinalità del continuo che è superiore rispetto alla prima.

b) La rappresentazione dei numeri dell'intervallo [0,1] è:

$$x = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \dots \text{ dove } b_i \in (0,1,2,\dots,9)$$

La probabilità secondo l'approccio "casi favorevoli/casi possibili" non può essere perseguita perché si tratterebbe di un rapporto tra due infiniti di cui non si può stabilire il limite.

c) Il singolo numero reale non può essere proposto come evento base dato che i reali hanno la cardinalità del continuo. Intuitivamente, saremmo portati a dire p=0.5, ma senza poterlo confermare o sconfermare ogni altra asserzione apparentemente meno plausibile quale p=0.99.

VC92: a)0; b)5/6; c)5/6; d)19/24.

VC93:

a) $F(x) = 0.5F_{ac}(x) + 0.5F_d(x); F_d(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases};$

$$F_{ac}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1/4 & \text{se } x = 0 \\ 1/4 + 3x/8 & 0 < x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

VC94: nel punto x=a esistono finiti il limite sinistro ed il destro, ma sono diversi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ 1 & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

VC95:

Manca un 2 al numeratore: $F(x) = 1 - \frac{2}{1+e^x}$

VC96:

$$\int_0^1 \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} dx = c * \arcsen(x) \Big|_0^1 = c \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{2}{\pi}$$

VC97: derivando rispetto alla "x" nei punti di continuità si ottiene:

$$F'(x) = h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

la h(.) è discontinua per x=0 e x=1 (limite sinistro e destro sono diversi).

VC98: ricordando che l'area del trapezio è data dalla semisomma delle basi per altezza e che l'area deve essere pari ad uno si ha:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & \text{se } 0 \leq x \leq 24 \\ \frac{36-x}{360} & \text{se } 24 < x \leq 36 \\ 0 & \text{se } x > 36 \end{cases}; F(x) = \begin{cases} \frac{x}{30} & \text{se } 0 \leq x \leq 24 \\ \frac{72x-x^2}{720} & \text{se } 24 < x \leq 36 \\ 1 & \text{se } x > 36 \end{cases}$$

VC99: a) 0.8; 0.5625; b) 0.6; 0.59375; c) 0.3; 0.8125

VC100: 1) c=2; 2) c=8; 3) c=1/√2;

VC101:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \alpha_i h_i(x) &\geq 0 \text{ dato che } \alpha_i h_i(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^k \alpha_i h_i(x) dx &= \sum_{i=1}^k \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_i h_i(x) dx = \sum_{i=1}^k \alpha_i \int_{-\infty}^{\infty} h_i(x) dx = \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \end{aligned}$$

La densità della somma è inclusa tra la minima e la massima delle densità.

VC102: a) 0.25; b) 0.625; c) 0.40625

VC103: alla distanza x≤2 sul lato positivo delle ascisse passa la retta x=L parallela all'asse delle ordinate e quindi la distanza tra R e l'asse X=0 è uguale alla sua ascissa "r". La probabilità che r≤x coincide con la probabilità che R si collochi sopra o a sinistra di x=L. Quindi:

$$\frac{\text{area a sinistra di } L}{\text{area totale}} = \frac{\int_0^L (2x-x^2) dx}{\int_0^2 (2x-x^2) dx} = \frac{3x^2-x^3}{4} = F(x);$$

VC104: se non avete tempo di fare l'indagine considerate la tavola dei numeri casuali riportata in appendice e scegliete un qualsiasi punto di inizio ed una sequenza per numeri di due cifre. Calcolate la somma ogni 24 numeri e verificate che l'istogramma della distribuzione somigli alla normale. Invece della tavola potete usare la funzione CASUALE() dell'EXCEL.

VC105:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{b}}; G(x) = e^{-\frac{x}{b}};$$

VC106:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{(ax)^2}{2}} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}; G(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(ax)^2}{2}} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

VC107: a) Non rileva il fatto che negli estremi la derivata della F(x) sia diversa a sinistra ed a destra dell'estremo.

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}; G(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{4-x}{3} & \text{se } 1 < x < 4 \\ 0 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}; \begin{matrix} X_p = 3p+1; 0 \leq p \leq 1; \\ X_{1-p} = 4-3p; 0 \leq p \leq 1; \end{matrix}$$

VC108:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}; G(x) = \begin{cases} \frac{x-\mu}{\sigma} & \text{per } x > 0 \\ 1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} & \text{altrove} \end{cases}$$

$$X_p = \mu + \sigma \text{Ln} \left[\frac{p}{1-p} \right]$$

VC109:

$$r(x) = e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

VC110: $h(x) = \left\{ e^{-a \left[\left(\frac{1-e^{-bx}}{b} \right) + cx \right]} \right\} \left(ae^{-bx} + c \right)$

Potrebbe modellare l'esistenza di barriere all'entrata in un settore.

VC111:

a) F(x)=(x/2c)+(1/2); vi sono due tratti: x=-1/√y e x=1/√y.

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{1}{c^2} \\ 1 - \frac{1}{c\sqrt{y}} & \text{se } y \geq \frac{1}{c^2} \end{cases}$$

b) $F_y(y) = P[X \leq y] = P[-y \leq X \leq y] = F_x(y) - F_x(-y) = 2 \int_0^y \frac{2}{\pi} e^{-2t^2} dt$

VC112:

$h(w) = \frac{e^w}{b-a}; Ln(a) < w < Ln(b); h(z) = \frac{-6Ln(z)[1+Ln(z)]}{z} \quad 0 < z < e^{-1}$

$h(v) = \frac{3(v+1)}{8\sqrt{v}}; \quad 0 \leq v \leq e^{-1}$

VC113:

a) $h_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5\sqrt{y}} & \text{se } 0 < y \leq 4 \\ \frac{1}{10\sqrt{y}} & \text{se } 4 < y \leq 9 \end{cases}$;

b) $h_y(y) = \frac{1}{\pi R} \sqrt{\frac{R^2}{y}} - 1; \quad 0 < y < R^2$

VC114: a) è di tipo misto perché ha probabilità costante in (-1,1);

b) $F(y) = \begin{cases} 0.5 + \frac{\arctan(y-1)}{\pi} & \text{se } y < 0 \\ 0.5 & \text{se } y = 0 \\ 0.5 + \frac{\arctan(y+1)}{\pi} & \text{se } y > 0 \end{cases}; h(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi[1+(y-1)^2]} & \text{se } y < 0 \\ 0.5 & \text{se } y = 0 \\ \frac{1}{\pi[1+(y+1)^2]} & \text{se } y > 0 \end{cases}$

VC115:

a. $X_u = a \left[\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \right]^{-\frac{1}{b}}; \quad b. X_u = \left\{ 1 - \left[\frac{u-c}{1-c} \right]^{\frac{1}{b}} \right\}^{-\frac{1}{a}}$

c. $X_p = 2(1 - \sqrt{1-p})$

VC116: a) $M_0=1$; si perché la funzione di densità è unimodale. La forte asimmetria a destra non è influente in questo senso.

b) $M_0=4$. La curva di densità ha poca curvatura nel punto modale per cui la moda non ha forte rappresentatività.

VC117: la curva della funzione di ripartizione presenta un solo punto di flesso, molto prossimo allo zero e quindi ha una sola moda. Il calcolo differenziale permette di stabilire che $M_0=0.5$.

VC118:

a. $F(x) = 1 - \left[\frac{c_2 - x}{c_2 - c_1} \right]; \quad M_e = \frac{c_2 + c_1}{2};$

b. è il centro della progressione aritmetica.

VC119:

a) $X_p = \frac{1}{\sqrt{1-p}}; \quad b) X_{0.2} = 1.118$

VC120:

a) Probabilità crescenti a ritmo decrescente all'aumentare delle modalità: i rendimenti i percentuale di un investimento azionario.

b) $X_p = p^{\frac{2}{3}} \Rightarrow Q_1 = 0.3969, Q_2 = 0.63, Q_3 = 0.8255$

VC121: $E(x) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad \sigma > 0$

VC122:

$E[g(y)] = \int_0^y [(m+n)x - ny]h(x)dx + \int_y^M [my - k(x-y)]h(x)dx$

$F(y) = \frac{m+k}{m+k+n} \Rightarrow y = (a-b) + \frac{2b(m+k)}{m+k+n} \Rightarrow y = 11.33$

VC123: si incontra due volte la funzione gamma:

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{3}{2}} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$

a. $k = \frac{3\sqrt{3/2}}{\sigma^3 \sqrt{\pi}}; \quad b. E(mx^2) = mE(x^2) = \frac{m\sigma^2}{2}$

VC124:

$h(x) = \frac{1}{x^3}, \quad x \geq 1; \quad E(x) = \int_1^\infty \frac{x}{x^3} dx = -\frac{1}{x^2} \Big|_1^\infty = 1;$

$E(x^2) = \int_1^\infty \frac{x^2}{x^3} dx = Ln(x) \Big|_1^\infty \rightarrow \infty$

VC125: il momento k-esimo esiste per $k > b_2$.

VC126:

1) $\mu_k = \left[\frac{b}{Ln(1+b)} \right] \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{x^{k-j}}{(k-j)b^{j+1}} \Big|_0^1 \Rightarrow \mu_1 = \left[\frac{b}{Ln(1+b)} \right] \left(\frac{b-1}{b^2} \right);$

$\mu_2 = \frac{b}{Ln(1+b)} \left(\frac{b^2 - b + 1}{b^3} \right); \quad \mu_3 = \frac{b}{Ln(1+b)} \left(\frac{b^3 - b^2 + b - 1}{b^4} \right)$

$\int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = -xe^{-\lambda x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$

2) $\int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} = E(x^3)$

VC127:

$E(x) = \int_0^c xh(x)dx + \int_c^\infty xh(x)dx \geq \int_c^\infty xh(x)dx \geq \int_c^\infty ch(x)dx$

$\geq c \int_c^\infty h(x)dx \geq cp(x > c) \Rightarrow \frac{E(x)}{c} \geq p(x > c)$

VC128: a) 2.095, 6.857, il supporto prevede solo valori non negativi;

b) $M_e=2, \mu^+(M_e)=3.9524, \mu^-(M_e)=0.8095$

VC129:

a) $E(x^k) = \int_0^\infty \frac{x^k}{x^2} 2\sigma e^{-\frac{2\sigma}{x}} dx = (2\sigma)^k \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y^k} dy$

per $k=1$ coinvolge la funzione integrale esponenziale:

$Ei(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy = -0.5772156649 - Ln(z) - \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n z^n}{n(n!)}$

che diverge per "z" tendente a zero.

b) Occorre riscalfare la funzione di densità prendere uno l'area sottesa:

$h(x) = \frac{2\sigma}{(1-e^{-2\sigma})x^2} e^{-\frac{2\sigma}{x}}, \quad x > 1 \Rightarrow E(x^k) = \frac{(2\sigma)^k}{(1-e^{-2\sigma})} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y^k} dy$

VC130:

a)

$\mu = \int_0^\infty x 2\alpha e^{-\alpha x} (1 - e^{-\alpha x}) dx = \frac{3}{2\alpha}; \quad \int x e^{-x} dx = -(x+1)e^{-x}$

$\mu_2 = \int_0^\infty x^2 2\alpha e^{-\alpha x} (1 - e^{-\alpha x}) dx = \frac{7}{2\alpha^2}; \quad \int x^2 e^{-x} dx$

$= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}; \quad \sigma^2 = \frac{19}{4\alpha^2}$

b)

$F(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow M_e = \sqrt{2} - 1$

$S_{Me} = \int_{-1}^1 |x - M_e| \left(\frac{x+2}{4} \right) dx = 2 \int_{-1}^{M_e} (M_e - x) \left(\frac{x+2}{4} \right) dx$

$= \frac{M_e^3 + 6M_e^2 - 9M_e + 4}{12}$

VC131:

a) $\mu=0, \sigma=0.5292, M_e=0, S_{Me}=2/5; \quad b1) S_\mu=6/32=\Delta; \quad b2) S_\mu=1/3; \quad \Delta=5/3;$

$\mu = \frac{1}{16} \int_{-4}^2 x(2-x)dx + \frac{4}{2} \int_2^4 x(x-2)dx = -\frac{11}{6} = -1.833$

$S_\mu = \frac{1}{16} \int_{-4}^\mu (\mu-x)(2-x)dx + \int_\mu^2 (x-\mu)(2-x)dx + \int_2^4 (x-\mu)(x-2)dx = 4.562$

VC132:

$S_y(A, \alpha) = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} (y-A)^\alpha h(y)dy = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} (ax+b-aA-b)^\alpha h(x)dx = |\alpha| S_x(A, \alpha)$

$\Delta_{w,z} = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |w-z| h(w)h(z)dw dz = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |ax+b-Ay-b| h(w)h(z)dw dz = |\alpha| \Delta_{y,x}$

VC133: $\mu=8/5, \sigma=0.809492$, soglia di miglioramento: 1.5626. Per $e=1.6$ la Tchebycheff propone: $1/1.62=0.39063$, la formula stabilisce: 0.46791; la probabilità che il modello assegna all'intervallo è 0.49305 per cui la formula si avvicina notevolmente al valore vero.

VC134:

$$L(p) = \frac{1}{2\mu\sqrt{1-p}} \Rightarrow F(x) = 1 - \frac{2\mu}{x^2}, \quad 0 < x < 2\mu; \quad h(x) = \frac{4\mu}{x^3}$$

$$K(p) = (5-4p)^{\frac{3}{2}}$$

Il punto di saturazione si ha per $p=1$.

VC135:

$$L(p_D + p) - p = L(p_D - p) + p \Rightarrow L(p_D + p) - 1 = L(p_D - p) + 1$$

$$a) X_{p_D+p} - X_{p_D-p} = 2\mu$$

b) Ad una curva di Lorenz simmetrica corrisponderà una funzione di densità simmetrica se e solo se $\mu = M_e = M_d$ cioè media aritmetica = mediana = media divisoria. La prima relazione è vera, ma non sempre lo è la seconda. Kendall (1956) afferma che la condizione necessaria e sufficiente affinché la curva di Lorenz sia simmetrica è che la funzione di densità della variabile $h(x)$ verifichi:

$$h(x) = \left(\frac{x}{\mu}\right)^{1.5} g\left[\text{Log}\left(\frac{x}{\mu}\right)\right]$$

dove $g(\cdot)$ è una funzione pari cioè tale che $g(-x) = g(x)$. Taguchi (1968) prova che la seguente condizione (già suggerita da Champernowne nel 1956)

$$\frac{\mu^2}{x} h\left(\frac{\mu^2}{x}\right) = \frac{x^2}{\mu} h(x)$$

è necessaria e sufficiente perché una funzione di densità continua con media finita “ μ ” abbia una curva di concentrazione simmetrica:

VC136:

$$M_e = \mu; \quad F(\mu - \varepsilon) = \frac{1}{1 + e^{-\left(\frac{\mu - \varepsilon - \mu}{\sigma}\right)}} = \frac{1}{1 + e^{\frac{\varepsilon}{\sigma}}};$$

$$F(\mu + \varepsilon) = \frac{1}{1 + e^{-\left(\frac{\mu + \varepsilon - \mu}{\sigma}\right)}} = 1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{\varepsilon}{\sigma}}} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{\sigma}}}{1 + e^{-\frac{\varepsilon}{\sigma}}} = \frac{1}{1 + e^{\frac{\varepsilon}{\sigma}}}$$

VC137:

$$\mu = 5, M_e = 5 \text{Ln}(2), S_{Me} = \frac{\mu^+(M_e) - \mu^-(M_e)}{2}$$

$$\mu > M_e \Rightarrow \alpha_1 > 0$$

VC138:

$$M_e = a + \frac{(b-a)}{4}; \quad \mu = a + \frac{b-a}{3}; \quad \sigma = \frac{2(b-a)}{\sqrt{45}} \Rightarrow \alpha_1 = 1.118$$

VC139:

a) Sì, per quanto riguarda il centro, ma meno nelle code;
b) Poter applicare lo stesso modello a ciò che ha preceduto la sperimentazione, a ciò che la seguirà ed a tutte le applicazioni che si possano ritenere analoghe a quella analizzata.

VC140: si effettua il cambio di variabile $y = a + bx$ nella funzione di ripartizione della normale:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx; \Rightarrow \frac{1}{|b|} \int_{-\infty}^{\frac{y-a}{b}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-a-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dy =$$

$$= \int_{-\infty}^y \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-a-b\mu}{b\sigma}\right)^2}}{|b|\sigma\sqrt{2\pi}} dy = F(y)$$

$$a. 2[1 - \phi(1.5)] = 0.1336; \quad b. \phi(2) = 0.9772$$

VC141:

$$c. \phi(2.5) - \phi(0.5) = 0.3023; \quad d. 2\phi(2.38) - 1 = 0.9826$$

VC122: a) 0.891398; b) 0.999969; c) 0.093584.

VC143: 0.67429 (0.67), 1.64521 (1.64).

VC144:

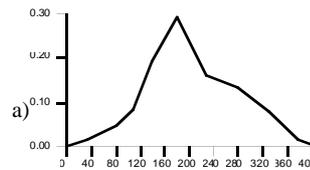
a)

$$P(|x - 0.2| \leq r) = 0.032 \Rightarrow r = 0.01\phi^{-1}\left(\frac{0.032}{2}\right) = 0.01(1.853) = 0.0185$$

Quindi: $0.1815 \leq x \leq 0.2185$

$$b) P(X < X_\alpha) = 0.01 \Rightarrow X_\alpha = 65 + 7\phi^{-1}(0.01) = 65 + 7(2.327) = 81.3;$$

VC145:



b) $\mu = 189.64, \sigma = 75.54, \mu \pm \sigma = 73.96\%, \mu \pm 2\sigma = 95.62\%, \mu \pm 3\sigma = 100\%$. Il centro è più concentrato che nella normale.

VC146: 68.3%, 95.4%, 99.8% e quindi l'approssimazione di Burr è piuttosto buona.

VC147: il calcolo con l'Excel è facile:

$$\text{INV.NORM}(0.05; 300; 24) = 260.52,$$

$$\text{INV.NORM}(0.15; 300; 24) = 275.13.$$

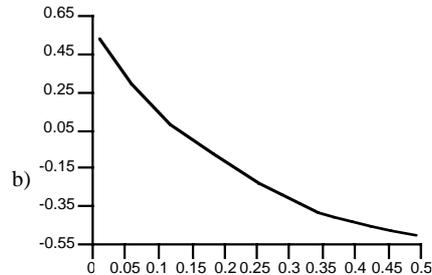
$$\text{VC148: } \mu = 52'585, \sigma = 18657, Z_{0.10} = -1.28,$$

$$Z_{0.80} = 0.84, X_{0.10} = 28'704, X_{0.80} = 68257$$

$$\text{VC149: } \gamma_2 = 1/5.$$

VC150:

$$a) GM_p = \frac{\text{Ln}\left(\frac{2-p}{p}\right) + \text{Ln}\left(\frac{1+p}{1-p}\right) - b - 2\text{Ln}(3)}{\text{Ln}\left(\frac{2-p}{p}\right) + \text{Ln}\left(\frac{1+p}{1-p}\right) - 2b};$$



VC151:

$$p_i = \binom{i-1}{r-1} 0.5^i, \quad i = r, r+1, r+2, \dots \quad \mu = 2r, \sigma^2 = 2r$$

$$F(i < 50) \cong \phi\left(\frac{50 - 0.5 - 40}{\sqrt{40}}\right) = \phi(1.5) = 0.9332$$

VC152:

$$a) p(X = 15) = \phi\left(\frac{15 + 0.5 - 12.5}{3.062}\right) - \phi\left(\frac{15 - 0.5 - 12.5}{3.062}\right) =$$

$$= \phi(0.98) - \phi(0.65) = 0.0943 \cong 9.4\%$$

$$P(z \leq Z_a) = 0.9999 \Rightarrow Z_a = 3.58;$$

$$b) \frac{X - \mu}{\sigma} = 3.58 \Rightarrow X = \mu + 3.1\sigma \Rightarrow 12.5 + 3.58 * 3.062 = 24$$

$$c) 1 - \phi\left(\frac{24 - 0.5 - 25}{3.54}\right) = 1 - \phi(-0.42) = 0.6648 \cong 66\%$$

d) C'è una probabilità su tre che una persona con preparazione sufficiente sia esclusa; per aggirare tale ostacolo si potrebbe aumentare il numero totale di quiz.

VC153: l'approssimazione con la Normale non è consigliabile.

VC154: il poligono di frequenza dei valori originali non si presta ad essere modellato con la Normale. La trasformazione Box-Cox migliore è $\alpha = -2.3$, ma con valori molto elevati dell'indice di asimmetria di Fisher e dell'indice di curtosi.