

Le variabili casuali

L'esigenza di semplificare la trattazione degli esperimenti casuali porta a tradurne gli eventi in numeri reali

ESEMPIO ILLUSTRATIVO

Tre monete ben equilibrate sono lanciate insieme. L'universo degli eventi è

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = TTT, E_2 = TTC, E_3 = TCT, E_4 = CTT \\ E_5 = TCC, E_6 = CTC, E_7 = CCT, E_8 = CCC \end{array} \right\}$$

Indichiamo con "X" il numero totale di teste.

Per l'evento $E_4 = CTT$ si ha $X=2$.

Inoltre E_4 ha probabilità $1/8$ dato che gli 8 eventi dell'universo degli eventi sono equiprobabili.

Da notare che anche gli eventi E_2 ed E_3 producono $X=2$ per cui questo è un evento composto con probabilità $3/8$.

Le variabili casuali/2

L'evento " $X=2$ " si verifica ogni volta che si verifica l'evento $E_2 \cup E_3 \cup E_4$

Il valore assunto dalla "X" non è noto a priori perché dipende dall'esito casuale dell'esperimento

Per questo la "X" è detta variabile casuale

La tabella dei valori della X e delle probabilità con cui sono assunti si chiama:

DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ DELLA VARIABILE CASUALE

con essa si calcolano le probabilità degli eventi che interessano la "X". Ad esempio

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

UNIVERSO DEGLI EVENTI

- $E_1 = TTT$
- $E_2 = TTC$
- $E_3 = TCT$
- $E_4 = CTT$
- $E_5 = TCC$
- $E_6 = CTC$
- $E_7 = CCT$
- $E_8 = CCC$

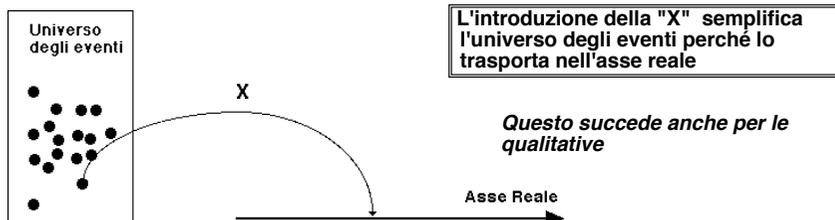
Valori della X	Probabilità
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$
1	

Le variabili casuali/3

Definizione:

La variabile casuale è una funzione che associa ad ogni evento dell'universo degli eventi uno ed un solo numero reale.

E' diversa dalla variabile matematica in quanto i valori sono assunti con probabilità e non con certezza



La corrispondenza tra eventi e valori della X è univoca, ma non necessariamente biunivoca: un dato valore della X può derivare da eventi diversi

ESEMPIO

Una indagine campionaria propone due domande

☀ E' vero che gli ipermercati fanno ribassare i prezzi?

☀ E' vero che la piccola distribuzione favorisce l'elusione fiscale?

Indichiamo con "Y" la variabile: "Numero di Si alle due domande".

		Ribassa i prezzi		X	P(X = x)
		Si	No		
Favorisce Elusione	Si	2	1	0	0.14
	No	1	0	1	0.41
				2	0.55
					1.00

Prima di effettuare l'esperimento "intervista" abbiamo la seguente distribuzione

Esempio

Si supponga che le seguenti coppie di lettere siano equiprobabili

ab	aj	bg	eg	gj
ae	ak	bj	ej	gk
ag	be	bk	ek	jk

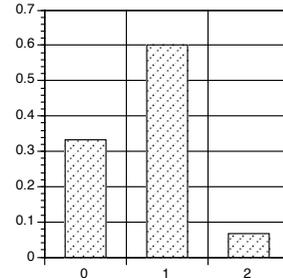
Sia "X" la variabile casuale: X=numero di vocali nella coppia

a) Costruire la distribuzione di probabilità

b) Rappresentarla graficamente

$X = x_i$ è un evento

X	P(X = x)
0	$\frac{6}{15}$
1	$\frac{8}{15}$
2	$\frac{1}{15}$
	1

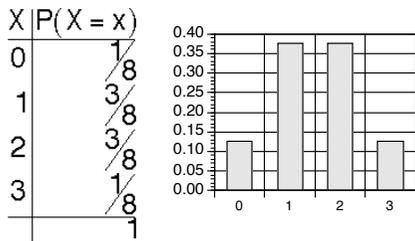


Una precisazione

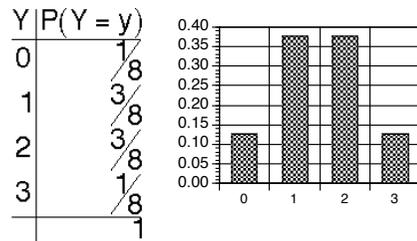
il meccanismo della variabile casuale può funzionare allo stesso modo in situazioni diverse

Esempio: LANCIO DI TRE MONETE

X: Numero di teste



Y: Numero di croci



Le due variabili hanno lo stesso dominio e le stesse probabilità, ma sono diverse perché sono due aspetti di un esperimento.

Da uno stesso esperimento possono nascere più variabili casuali

Esercizio

Un esperimento saggia la praticabilità del green di una buca da golf con il tiro di 4 palline.

L'esito è incerto, ma riteniamo che la probabilità di mandare la pallina in buca sia del 70%.

Indichiamo con Y= "numero di palline in buca".

A) Quali sono gli eventi di interesse?

B) Quali probabilità sono associate ai valori della Y?



$$S = \left\{ (0,0,0,0); (0,0,0,1); (0,0,1,0); (0,0,1,1); (0,1,0,0); (0,1,0,1); (0,1,1,0); (0,1,1,1); (1,0,0,0); (1,0,0,1); (1,0,1,0); (1,0,1,1); (1,1,0,0); (1,1,0,1); (1,1,1,0); (1,1,1,1) \right\}$$

$$F[(x,x,x,x)] = 0.7^a 0.3^{4-a}; \text{ dove } a = \text{numero di "1" nella quaterna}$$

$$Y \in \{0,1,2,3,4\}; P(Y = y) = \{0.0081, 0.0756, 0.2656, 0.4116, 0.2406\}$$

Variabili casuali discrete e continue

La natura quantitativa dell'universo degli eventi porta a considerare



VARIABILI CASUALI DISCRETE

L'insieme dei valori possibili è formato da punti isolati che possono essere "contati" cioè posti in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei naturali anche enumerabilmente infinito

Esempi

Scelta casuale di una famiglia da intervistare: X= Numero di componenti

Ispezione di un lotto di prodotti: X= numero di pezzi difettosi

Numero di molecole in un composto



VARIABILI CASUALI CONTINUE

L'insieme dei valori possibili forma un intervallo di numeri reali

Esempio

Vita media di un componente di computer: X=tempo di funzionamento

Studio delle V.C. discrete

Una v.c. discreta è nota attraverso la sua distribuzione di probabilità formata dai suoi valori possibili e dalle probabilità loro associate

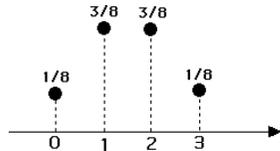
Valori di X	x_1	x_2	...	x_i	...	totale
Probabilità	p_1	p_2	...	p_i	...	1

Il minuscolo indica i valori possibili cioè $P(X = x_i) = p_i$

Perché le $\{p_i\}$ costituiscano delle probabilità è necessario che:

- 1) $p_i \geq 0 \quad \forall i$
- 2) $\sum_i p_i = 1$

DISTRIBUZIONE DI PROBABILITA'



Esempio: numero di teste in un lancio di tre monete equilibrate

La funzione di distribuzione teorica

Talvolta non si effettuano rilevazioni, ma si opera con un modello

$$f_i = \text{Funzione}(i, \text{parametri}) \text{ per ogni "i"}$$

è "teorica" perché modalità e frequenze nate da una funzione matematica e non sono stati effettivamente osservati.

La $f(x)$ è una rappresentazione semplificata ed astratta (modello) delle osservazioni effettuate.

È astratta perché non esiste in realtà e non è proposta in forma fisica o analogica

È semplificata perché in essa non confluisce tutto ciò che conosciamo o apprendiamo dai dati, ma solo ciò che riteniamo rilevante.

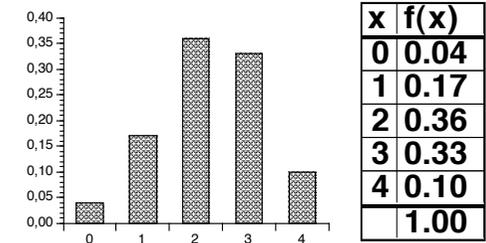
La funzione di distribuzione di probabilità

$$f(x) = P(X = x)$$

È il collegamento tra valori (o categorie) della v.c. e le rispettive probabilità.

La "f" deve rispettare le seguenti condizioni

1. $f(X) = P(X = x)$;
2. $f(X) \geq 0$;
3. $\sum_{x \in S} f(x) = 1$; con $S = \text{dominio di } X$



La variabile casuale dell'esempio rispetta tutte le condizioni

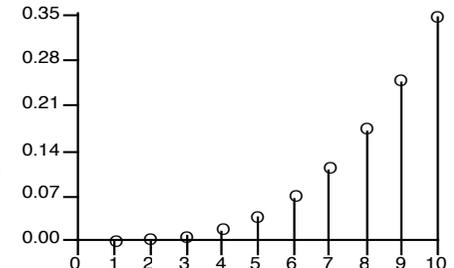
Modelli di distribuzione di probabilità

Collega valori o categorie osservabili nella prova con le probabilità di osservarle

$$p(x) = P(X = x)$$

Modello per il numero di ammanchi accertati in un supermercato con pochi controlli

$$p(x) = \frac{(2x-1)^3}{n^2(2n^2-1)}; \quad x = 1, 2, \dots, 10$$



Nota sulla distribuzione di probabilità

La distribuzione di probabilità è la sintesi formale delle probabilità assegnate ai vari elementi dell'universo degli eventi.

Sono evidenti due grandi difficoltà:

- Nella maggior parte delle situazioni la distribuzione di probabilità è del tutto sconosciuta.
- Poiché esistono diversi meccanismi di collegamento tra universo degli eventi e probabilità, in base a quale criterio scegliere la variabile casuale?

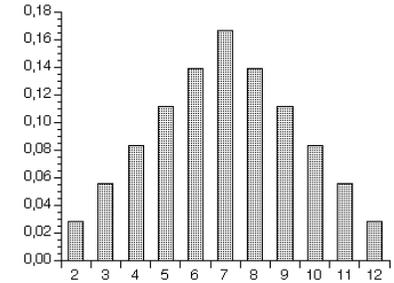
Compito della Statistica è di definire dei "modelli" di variabili casuali e di scegliere quello più adatto alla particolare situazione di studio.

Esempio

Lancio di due dadi. Studiare la variabile casuale X: SOMMA DEI DUE NUMERI CHE COMPAGNO NELLE DUE FACCE SUPERIORI

UNIVERSO DEGLI EVENTI

(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)



Poiché ogni coppia ha probabilità 1/36 la V.C. "X" avrà distribuzione di probabilità:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
P(X=x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

In questo caso le probabilità sono dettate dalle simmetrie dell'esperimento

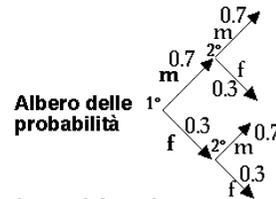
Esercizio

In un'impresa che ha il 70% del personale di sesso maschile si scelgono a caso (con riposizione) due persone per una commissione. Il numero di donne "X" nella commissione è una variabile casuale

Possibili risultati:
(f,f) (f,m) (m,f) (m,m)

Corrispondenti valori della v.c.

$X = \begin{cases} 0 & \text{se (m,m)} \\ 1 & \text{se (f,m) oppure (m,f)} \\ 2 & \text{se (f,f)} \end{cases}$

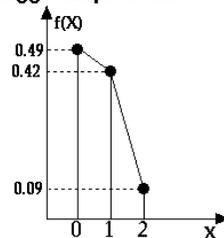


Poiché il 1° componente è indipendente dal 2° si applica la legge del prodotto delle probabilità per cui

Evento	X	P(Evento)
(m,m)	0	$0.7 \cdot 0.7 = 0.49$
(f,m)	1	$0.3 \cdot 0.7 = 0.21$
(m,f)	1	$0.7 \cdot 0.3 = 0.21$
(f,f)	2	$0.3 \cdot 0.3 = 0.09$
		1.00

Distribuzione di probabilità

x	P(X=x)
0	0.49
1	0.42
2	0.09
1.00	



Uso della distribuzione di probabilità

Per calcolare la probabilità che "X" ricada in un sottoinsieme "A" si pone

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} p_x$$

Somma estesa agli x che sono in A

Ad esempio, per i due dadi, la probabilità che il risultato sia pari è

$$P(X \text{ è pari}) = p_2 + p_4 + p_6 + p_8 + p_{10} + p_{12} = \frac{1+3+5+5+3+1}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Molto interessante è il calcolo per un intervallo chiuso a destra del tipo: $]-\infty, x]$

Ad esempio per $]-\infty, 4]$ avremo:

$$P(X \leq 4) = p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Esempio

Si supponga che la variabile casuale discreta "X" abbia la seguente distribuzione di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & \text{per } x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$P(X \leq 1) = f(1) = \frac{1}{6}; \quad P(X \leq 2) = f(1) + f(2) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$$

$$P(X \leq 3) = \sum_{i=1}^3 f(i) = \sum_{i=1}^3 \frac{i}{6} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 i = \frac{3 \cdot (3+1)}{2 \cdot 6} = 1$$

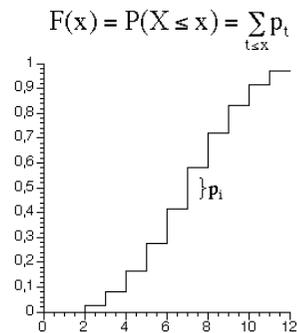
$$P(X \leq 0) = 0; \quad P\left(X \leq \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6}; \quad P\left(X \leq \frac{7}{3}\right) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

Esempio

Il grafico della F(x) di una V.C. discreta è a gradini

Esempio: somma dei risultati del lancio di due dadi

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1



La funzione di ripartizione

Le variabili casuali relative ad aspetti quantitativi della prova possono essere descritte con le probabilità cumulate sintetizzate nella funzione di ripartizione:

$$F(x) = P(X \leq x) = P\{x \in (-\infty, x]\} = \sum_{X \leq x} p(x);$$

Esempio:

In uno staff operano 4 persone prossime alla pensione, ma indecise se rinviare. L'ufficio personale ha messo a punto uno schema di probabilità di ritiro per i prossimi tre anni:

x	0	1	2	3	4	
p(x)	0.15	0.2	0.5	0.1	0.05	1.00

Distribuzione di probabilità

x	0	1	2	3	4
F(x)	0.15	0.35	0.85	0.95	1.00

Ripartizione di probabilità

Proprietà della funzione di ripartizione

0. Definita per ogni $x \in \mathbb{R}$

1. $F(-\infty) = 0$; $F(\infty) = 1$;

2. $F(X)$ è non decrescente: $x_2 > x_1 \Rightarrow F(x_2) \geq F(x_1)$

3. $F(X)$ è continua a destra $\lim_{d \rightarrow 0^+} F(X+d) = F(X)$

4. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

Le prime tre scaturiscono dalla definizione di funzione di ripartizione.

La 4^a si spiega così:

$$\text{Data la relazione } \{x | x \leq b\} = \{x | x \leq a\} \cup \{x | a < x \leq b\}$$

Poichè gli eventi sono incompatibili, si ha $P(x \leq b) = P(x \leq a) + P(a < x \leq b)$

$$\text{Ne consegue: } P(a < x \leq b) = P(x \leq b) - P(x \leq a) = F(b) - F(a)$$

Esempio

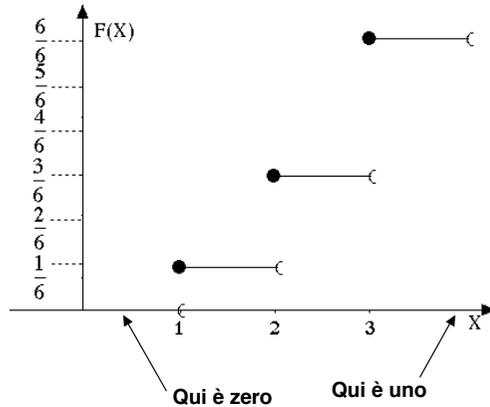
Partiamo dalla d.di p. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & \text{per } x = 1,2,3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

CONSIDERAZIONI

a) La continuità a destra significa che la funzione rimane costante per tutti i valori più grandi di X fino a che non si cambia valore.

Per tutti i valori di X (anche per quelli non indicati) assume lo stesso valore: fra 2 e 3 è sempre 3/6.

b) Nel punto X=x succede che a sinistra c'è un valore e a destra, un altro.

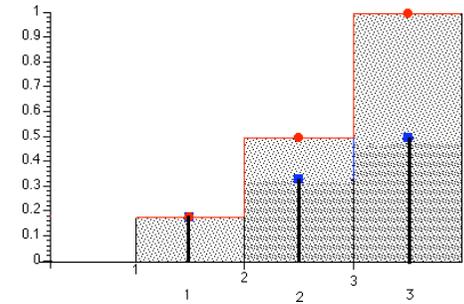


Ancora sulla funzione di ripartizione

La rappresentazione grafica della funzione di ripartizione ha una forma particolare detta ogiva di probabilità

Partiamo ancora da $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & \text{per } x = 1,2,3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

X	P(X = x)	P(X ≤ x)
1	1/6	1/6
2	2/6	3/6
3	3/6	1



Da notare che se la funzione di distribuzione ha valori non nulli solo nei punti X=1,2,3, la funzione di ripartizione ha valori positivi dall'uno in poi.

Modelli di funzione di ripartizione

E' definito allo stesso modo per le frequenze teoriche generate con dei modelli.

ESEMPIO:
Modello geometrico.

$$f_i = (1-p)^{i-1} p; \quad i = 1, 2, \dots; \quad F_i = p \sum_{j=1}^i (1-p)^{j-1}$$

$$= p \left[\frac{1 - (1-p)^i}{1 - (1-p)} \right] = 1 - (1-p)^i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Rappresenta la frequenza relativa del numero di ripetizioni che occorre effettuare per ottenere un "successo" in una sequenza binaria.

E' ovvio che il modello vale fino a che ha riscontri con la realtà:

se questi mancano il modello deve essere cambiato (a meno che per magia o per gioco non sia possibile cambiare la realtà).

Funzione di variabili casuali

Le variabili casuali sono trasformate per studiare delle altre variabili ad esse legate funzionalmente.

Se i valori della X sono assunti con probabilità lo stesso accade a Y=g(X) per un effetto di concatenamento.

ESEMPIO:

$$p(x) = \frac{4 - |x - 4|}{16}; \quad x = 1, 2, \dots, 9$$

Analizziamo Y=1/X.

$$P(y) = \frac{4 - \left| \frac{1}{y} - 4 \right|}{16}; \quad y = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{9}$$

Funzione di variabili casuali/2

Come si determina la $p(Y)$ allorché sia nota quella della X legata ad Y dalla relazione: $Y=g(X)$?

Se X è discreta e finita con dominio $T=\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ e $g(\cdot)$ una applicazione continua e con un numero di inverse, al più, enumerabile, allora:

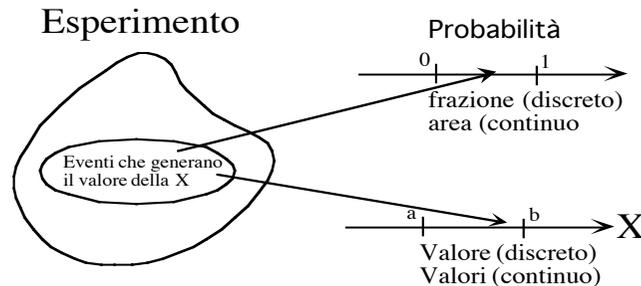
$$p(y) = P(Y = y_i) = P[X \in g^{-1}(y_i)]; \quad F(y) = P[X \leq g^{-1}(y_i)] \quad i = 1, 2, \dots, k$$

dove $g^{-1}(y_i)$ per $i=1, 2, \dots, k$ è l'insieme dei punti x_i in T tali che $g(x_i)=y_i$.

$$P(Y = y_i) = \sum_{x_j \in g^{-1}(y_i)} P(X = x_j)$$

Riflessione

Se l'obiettivo dell'esperimento è lo studio della variabile casuale perché non concentrarsi direttamente sulla sua funzione di distribuzione (X, p)?



I fenomeni soggetti alla sorte non nascono con il loro bravo modello, ma occorre decifrarlo, se possibile, con opportuni esperimenti.

Dopo che ciò è avvenuto e per tutti i casi riconosciuti analoghi si può adottare direttamente il modello di distribuzione.

Esempio

Sia $X=0, 2, 3$ il descrittore del punteggio ottenibile con un tiro a canestro ed ipotizziamo la seguente distribuzione di probabilità:

X	$p(X=x)$
0	0.40
2	0.35
3	0.15
1.00	

Quale distribuzione associare alla variabile casuale $Y=2X-1$?

Y	$p(Y=y)$
-1	0.40
3	0.35
5	0.15
1.00	

Qual'è la funzione di ripartizione di Y ?

$$F(y) = P(2X-1 \leq y) = P[X \leq (y+1)/2].$$

Sintesi delle variabili casuali

Si possono ricondurre le v.c. a pochi parametri descrittivi delle caratteristiche principali:

CENTRALITA' - VARIABILITA' - ASIMMETRIA

già discusse per le rilevazioni empiriche.

L'idea è che il verificarsi più o meno probabile di certi eventi risulta legato ad aspetti comprensibili e noti della variabile casuale.

Simbologia e definizioni non cambiano di molto: si sostituiscono le frequenze con le probabilità

In particolare

Media aritmetica ponderata (Valore atteso)

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

dove "E" sta per "Expectation" cioè aspettativa, valore atteso

Varianza

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \mu^2$$

Esercizio

La aut carrozzeria RUG.PAL effettua 5 diverse categorie di interventi ed ogni settimana ripete lo stesso numero di interventi per ogni categoria.

Servizio	Incasso	P(X)	F(X)
1	120	1/5	1/5
2	60	1/5	2/5
3	20	1/5	3/5
4	80	1/5	4/5
5	70	1/5	5/5

Gli incassi sono i seguenti:

a) Qual'è l'incasso atteso per una settimana qualsiasi?

$$\mu = \frac{120 + 60 + 20 + 80 + 70}{5} = 70$$

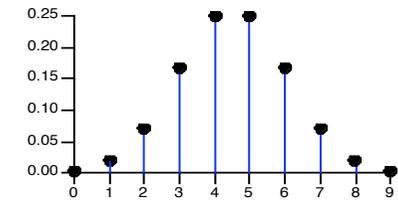
b) Qual'è la varianza dell'incasso atteso?

$$\sigma^2 = \frac{120^2 + 60^2 + 20^2 + 80^2 + 70^2}{5} - 70^2 = 1040$$

Esempio

Un modello assegna le probabilità ai valori secondo la formula di seguito riportata e di cui è dato un esempio in figura per n=9.

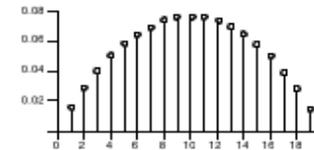
$$p(i) = \frac{\binom{n}{i}}{2^n} \text{ per } i = 0, 1, 2, \dots, n;$$



Calcolare il valore atteso

$$\mu = \sum_{i=0}^n i \frac{\binom{n}{i}}{2^n} = \frac{n 2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}$$

Esercizio



Alcuni fenomeni si manifestano con probabilità speculari rispetto al centro. Un modello che risponde a tale requisito è:

$$P_i = \frac{i * (n - i)}{\binom{n}{6} (n^2 - 1)} ; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Calcolare lo scarto quadratico medio se n=20

$$\mu = 10; \sigma = 4.45$$

Qui si può adoperare il foglio elettronico

Equità dei giochi

Un gioco d'azzardo si dice EQUO se le poste dei giocatori sono proporzionali alle rispettive probabilità di vincita



ESEMPIO:

Nel lancio del dado l'uscita singola è data 5:1. Per una puntata di 5€, in caso di vincita dovrei incassare 30€ (i miei 5 più 25€ di vincita).

Se perdo, il banco dovrebbe trattenere solo 1€ e restituire 4€ per compensare le sue maggiori probabilità:

$$5\left(\frac{1}{6}\right) - 1\left(\frac{5}{6}\right) = 1 - 1 = 0$$

La speranza matematica $E(G)$ è l'importo certo che si è disposti a pagare per ricevere in cambio un importo aleatorio maggiore

Esempio

Nella roulette americana decidete di giocare \$ Y sul nero con $P(N)=18/38$ e $P(N^c)=20/38$ (in questo tipo di roulette ci sono lo "0" ed il "00" di colore verde).

Se esce il nero ricevete 2Y (inclusivi della vostra puntata).

E' un gioco equo?

$$X = \frac{\frac{20}{38}}{\frac{18}{38}} = \frac{20}{18} = 1.11$$



Se il gioco fosse equo puntando 27\$ se ne dovrebbero incassare $27+1.11*27=56.97$ cioè la giocata più l'equa vincita.

Invece il casinò dà 54. Questo si spiega per spese organizzative, di manutenzione e gestione, ma lo scarto dell'11% è alto.

Equità dei giochi/2

Se "p" è la probabilità di vincere una scommessa G in cui vi sia la promessa di vincere una cifra "x" con probabilità "p" e di perdere "y" con probabilità (1-p) l'esito atteso è:



$$E(G) = xp - y(1 - p) = xp - y + yp = (x + y)p - y$$

Perché il gioco sia equo si deve avere

$$E(G) = 0 \Rightarrow (x + y)p - y = 0 \Rightarrow p = \frac{y}{x + y}, 1 - p = \frac{x}{x + y}$$

Ovvero: $x = \left(\frac{1-p}{p}\right)y$ *Odd's ratio*

Se perdo 1€ con probabilità 1/30, quando vinco debbo incassare

$$X = \frac{\frac{30}{30} - \frac{1}{30}}{\frac{1}{30}} = \frac{29}{1} = 29$$

La tassa sulla stupidità

Se Ciccillo si gioca 5€ per un ambo sulla ruota di Cagliari (perché comincia con la sua lettera) la sua aspettativa di guadagno è

$$x = \left(\frac{\frac{7090}{8010}}{\frac{20}{8010}}\right)5 = \left(\frac{7090}{20}\right)5 = 1772.5$$

Il gestore paga invece 250 volte la posta cioè 1250€.

La differenza è in parte da attribuire alle spese di organizzazione, ma possono incidere con una decurtazione del 30% ?

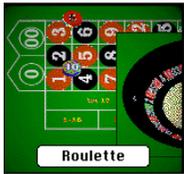
Il lotto ed altri giochi gestiti dallo stato sono iniqui e sarebbe stupido giocarci qualora ci fossero alternative più convenienti

Tuttavia, la tassa sulla dabbenaggine dei giocatori trova parziale giustificazione nell'interesse pubblico con cui si impiegano i fondi così ottenuti.

Regole del giocatore accorto

Si accetta di giocare se la speranza matematica è positiva, se è negativa si rifiuta e ci si regola come si crede se è nulla.

Se si è costretti a giocare e si può scegliere il gioco, si preferirà quello in cui la speranza matematica è maggiore.



Se punto 100'000 sul "12" la mia speranza matematica è

$$3'500'000 * \frac{1}{37} - 100'000 * \frac{36}{37} = -2702.6$$

il banco paga 35 volte la posta e restituisce la puntata.
In media si perdono 2700 lire.

E' poco se il gioco piace e se piace l'atmosfera del casinò

Depositare i soldi al casinò

State risparmiando per comprare casa. Riuscite a mettere da parte 10 milioni all'anno. Ecco due strategie:

A) Ogni 2 gennaio depositate in banca i soldi. Tasso composto previsto nel decennio: 3% e tasso di inflazione 2%

B) Ogni 2 gennaio andate al casinò di Sanremo e vi giocate i 10 milioni sul "12"

Chi sceglie la strategia "B"?

$$A) \quad 10'000'000 * \frac{(1.03 + 1.03^2 + \dots + 1.03^{10})}{1.02^{10}} \cong 96'865'000$$

$$B) \quad 360'000'000 \left(\frac{10}{37} \right) \cong 97'297'000$$

Le lotterie

Vi viene proposto il seguente gioco:



Da un'urna che contiene 99 biglietti rossi ed uno blu si estrae un biglietto. Se è rosso perdetevi 10 milioni se è blu vincete 10 miliardi. Giocate?

$$10'000'000'000 \frac{1}{100} - 10'000'000 \frac{99}{100} = 90'100'000 \quad \text{Voi ?}$$



Da un'urna che contiene 2'500'000 biglietti rossi ed uno blu si estrae un biglietto. Se è rosso perdetevi 5000 lire se è blu vincete 5 miliardi. Giocate?

$$5'000'000'000 \frac{1}{2500000} - 5'000 \frac{2499999}{2500000} = -3000 \quad \text{Voi ?}$$

L'utilità soggettiva non è lineare: la gioia di vincere 10 milioni non compensa il dolore di perdere 10 milioni (almeno per molti)

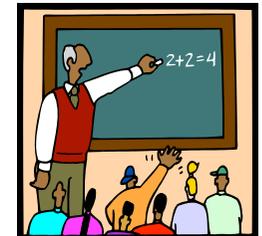
Variabili casuali discrete

Studieremo delle v.c. le cui distribuzioni di probabilità siano legate a dei PARAMETRI,

Variando il parametro varia la distribuzione formando una FAMIGLIA PARAMETRICA di variabili casuali.

Tale impostazione ha il vantaggio che non si deve inventare ogni volta un modello.

Basta inquadrare il fenomeno in un particolare schema MATEMATICO di cui poi occorre solo specificare i parametri.

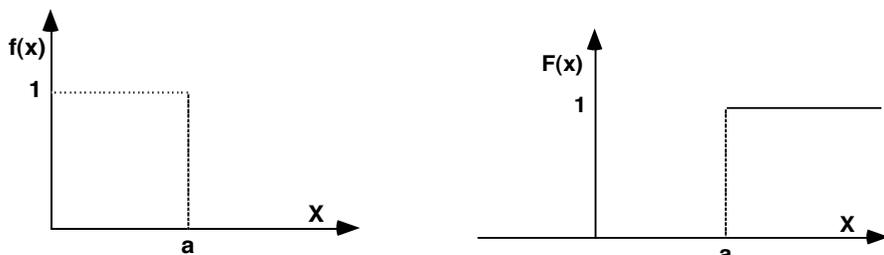


La v.c. degenerare

Il dominio prevede un solo valore:

$$P(X = a) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad F(X) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ 1 & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

E' il modello adatto per una misurazione che avviene senza errori



Esempio

La aut carrozzeria RUG.PAL effettua 5 diverse categorie di interventi ed ogni settimana ripete lo stesso numero di interventi per ogni categoria.

Servizio	Incasso	P(X)	F(X)
1	120	1/5	1/5
2	60	1/5	2/5
3	20	1/5	3/5
4	80	1/5	4/5
5	70	1/5	5/5

Gli incassi sono i seguenti:

a) Qual'è l'incasso atteso per una settimana qualsiasi?

$$\mu = \frac{120 + 60 + 20 + 80 + 70}{5} = 70$$

b) Qual'è la varianza dell'incasso atteso?

$$\sigma^2 = \frac{120^2 + 60^2 + 20^2 + 80^2 + 70^2}{5} - 70^2 = 1040$$

La uniforme discreta

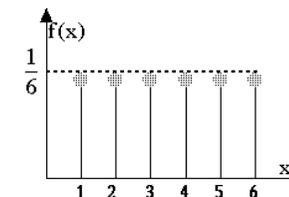
Descrive le situazioni in cui non ci sono ragioni di ritenere una modalità più probabile dell'altra.

$$X \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}; \quad P(X = x) = p = \frac{1}{n}$$

dove "n" è il numero di eventi inclusi nel dominio.

Esempio: lancio di un dado ben equilibrato

$$X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \quad P(X = x) = \frac{1}{6}$$



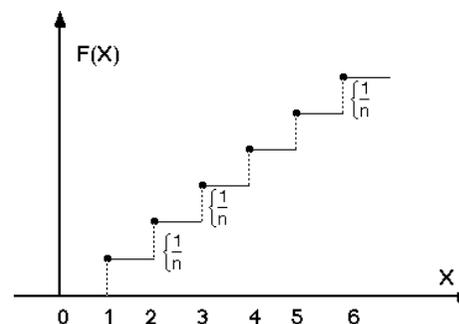
Valore atteso e varianza sono

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \frac{1}{n} - \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2$$

La funzione di ripartizione

$$F(X) = \sum_{x_i \leq x} \left(\frac{1}{n} \right); \quad i = 1, 2, \dots, n$$



Esempio: lancio del dado

X	P(X=x _i)	F(X _i)
1	1/6	1/6
2	1/6	2/6
3	1/6	3/6
4	1/6	4/6
5	1/6	5/6
6	1/6	6/6

1

I gradini hanno altezza costante

La V.C. di Bernoulli

E' forse la v.c. più semplice e serve come base per lo studio di altre v.c.

Il dominio ha solo due valori: "1" e "0" Se il primo è assunto con probabilità "p" l'altro avrà probabilità (1-p)

La funzione di distribuzione è immediata:

come tabella:
$$\begin{array}{c|c} x & P(X=x) \\ \hline 1 & p \\ 0 & 1-p \end{array}$$

in formula: $P(X=x) = p^x(1-p)^{1-x}$

Valore atteso e varianza

$$E(x) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(x) &= E(x^2) - [E(x)]^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - p^2 \\ &= p - p^2 = p \cdot (1-p) \end{aligned}$$

La v.c. di Bernoulli è un modello adatto nei casi in cui il risultato è dicotomo:

"SI/NO", "Bianco/Nero", "Perde/Vince"
"Successo/Insuccesso", etc.

Esempio

Si supponga che una nuova concessionaria di auto nel primo anno di attività abbia due soli risultati: "fallimento" o "pareggio".

Il mercato è tale che ci sono quattro possibilità su dieci di fallire.

Santina De Rose intende partire con una nuova concessionaria.

- a) Qual'è la probabilità che sia ancora attiva al secondo anno?
- b) Quali sono media e varianza della distribuzione?

Pareggio=>X=1; fallimento=>X=0 P(X=1)=0.60; P(X=0)=0.4

a) =0.60

b) $\mu=0.60$; $\sigma^2 = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24$

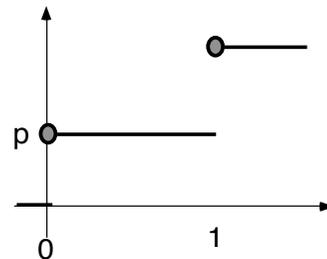
Funzione di ripartizione

LA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE DELLA BERNOULLI E' SEMPLICE

$$P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } X < 0 \\ p & \text{se } X = 0 \\ 1 & \text{se } 1 \leq X \end{cases}$$

Esempio: $P(X \leq 2) = 1$

$P(X < 1) = p$



La variabile casuale Binomiale

Un esperimento ha due soli risultati: Successo/Insuccesso.

Indichiamo con "p" la probabilità di successo; (1-p) sarà quella di insuccesso

Supponiamo di ripetere l'esperimento un certo numero di volte.

Il numero di successi "X" in "n" prove è una variabile casuale discreta che assume i valori da zero ad n.

Per determinarne la distribuzione di probabilità supponiamo che le prove siano *Bernoulliane* cioè indipendenti e con costante probabilità di successo.

In tal caso l'evento $S \overset{x \text{ volte}}{\underbrace{S \dots S}} \dots \overset{n-x \text{ volte}}{\underbrace{I \dots I}} N$ avrà probabilità $p^x(1-p)^{n-x}$

Binomiale/2

Quella vista però è solo uno dei modi di presentarsi di "x" successi in "n" prove.

Poiché qui non interessa l'ordine di accadimento occorre individuare le altre sequenze che generano lo stesso numero di successi.

Ad esempio

SSS III

SIS ISI

SSI IIS

Coefficiente binomiale

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Combinando le "S" e le "I" in tutti i modi possibili si determina un numero di eventi pari al numero dei modi in cui si possono scegliere "x" oggetti su "n"

Binomiale/3

Ciascuna delle sequenze ha la stessa probabilità della prima dato che nella legge del prodotto di probabilità la modifica dell'ordine non cambia il risultato.

$$\begin{aligned} P(S \cap I \cap S \cap I \cap I \cap S) &= P(S) * P(I) * P(S) * P(I) * P(I) * P(S) \\ &= p * (1-p) * p * (1-p)^2 * p = p^3 (1-p)^3 \end{aligned}$$

Inoltre, le sequenze sono eventi incompatibili per cui la probabilità che $X=x$ si ottiene per somma della probabilità di tutte le sequenze

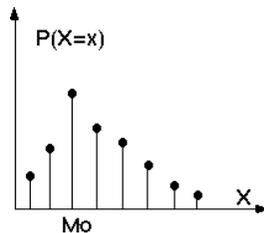
DEFINIZIONE: La variabile casuale X è Binomiale: $X \sim B(n, p)$ se ha la seguente distribuzione di probabilità

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Binomiale/4

La distribuzione della binomiale dipende da due parametri: n e p ; se si modificano si altera l'intera distribuzione di probabilità.

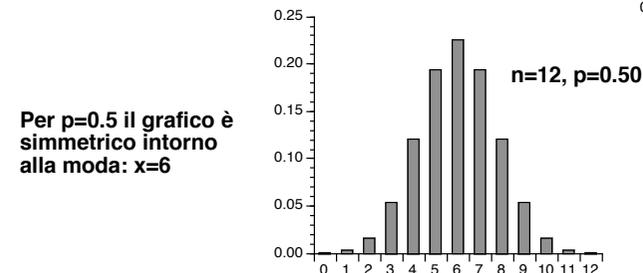
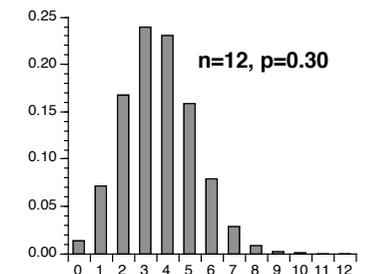
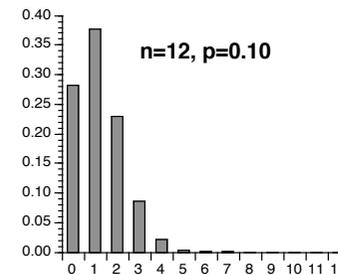
La distribuzione di probabilità prima cresce e poi decresce per cui in genere è unimodale (c'è un valore della X che è più probabile di altri)



Se $p=1/2$ la distribuzione della Binomiale è simmetrica: questo discende dal fatto che $p=q$ e che

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \binom{n}{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!x!}$$

Grafico della binomiale



Per $p=0.5$ il grafico è simmetrico intorno alla moda: $x=6$

Binomiale/5

Valore atteso $\mu = \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$

$$= \sum_{x=0}^n x \frac{np(n-1)!}{x(x-1)![(n-1)-(x-1)]!} p^{x-1} (1-p)^{n-1-x+1} = np \sum_{x=1}^n \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{n-x} = np$$

$$E[X(X-1)] = E[X^2] - E(X) \Rightarrow \sigma^2(X) = E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2$$

Varianza $\sigma^2 = n * p * (1-p)$

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^n x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^n x(x-1) \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= n * (n-1) p^2 \sum_{x=2}^n \frac{(n-2)!}{(x-2)![(n-2)-(x-2)]!} p^{x-2} (1-p)^{(n-2)-(x-2)}$$

$$= n * (n-1) p^2$$

$$\frac{n(n-1)p^2 + np - (np)^2}{-np^2 + np}$$

$$np(1-p)$$

Esempio

Un test consiste di n=25 domande a risposta multipla. Ogni domanda offre 4 scelte di cui una sola è corretta. Il test si supera se si risponde esattamente a 13 domande (la metà più uno).

Isidoro è totalmente impreparato, tuttavia vorrebbe tentare il test rispondendo a caso a tutte le domande.

Qual'è la probabilità che Isidoro superi il test?

Le domande sono delle prove bernoulliane con p=0.25 (una chance su quattro). La probabilità cercata è che si verifichino almeno 13 successi su 25 prove.

$$P(\text{Isidoro superi il test}) = P(B \geq 13) = 1 - P(B \leq 12) = 1 - \sum_{x=0}^{12} \binom{25}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{25-x}$$

$$= 1 - 0.9967 = 0.0033$$

Isidoro ha solo tre probabilità su mille di riuscire nel suo intento.

Esempio

Il monitoraggio di una linea di produzione su un periodo abbastanza lungo ha asseverato che, in media, un prodotto su dieci è difettoso.

Un cliente compra se, scelti a caso e con reimmissione cinque prodotti, trova non più di un prodotto difettoso?

a) Qual'è la probabilità che il cliente compri?

b) In media, quanti prodotti difettosi ci si deve aspettare scegliendone cinque a caso?

La selezione dei prodotti è di tipo Bernoulliano per cui si applica il modello binomiale con X= scelta di un prodotto difettoso e con p=0.1 ed n=5

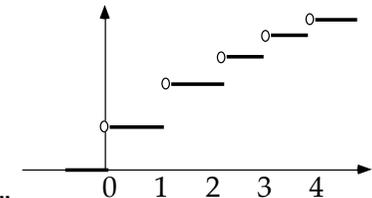
a) $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \binom{5}{0} (0.1)^0 (0.9)^5 + \binom{5}{1} (0.1)^1 (0.9)^4 = 0.91854$

b) $E(X) = 5 * 0.1 = 0.5 \approx 1$

La funzione di ripartizione

La funzione di ripartizione della Binomiale quantifica la probabilità di avere un numero di successi inferiori o uguali ad una soglia data

$$P(X \leq x) = \sum_{i=0}^x \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$



ESEMPIO

E' noto che la probabilità di sopravvivenza di una pianta in un nuovo impianto è p=0.9.

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - \sum_{i=0}^5 \binom{n}{i} (0.9)^i (0.1)^{n-i} \geq 0.99$$

ovvero

$$\sum_{i=0}^5 \binom{n}{i} (0.9)^i (0.1)^{n-i} \leq 0.01$$

Si vuole conoscere quante inserirne perché ne sopravvivano almeno 6 con una probabilità del 99%

Quindi occorrono n=9 piante

Piante X	P(X<x)
7	0.1497
8	0.0381
9	0.0083
10	0.0020

Frequenza di successi

 Nelle applicazioni si incontra spesso la variabile casuale $H = \frac{X}{n}$ che indica la frequenza dei successi su "n" prove

La v.c. H è discreta ed assume valori: $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$

Inoltre, si ha $P(X = x) \Rightarrow P\left(\frac{X}{n} = \frac{x}{n}\right) = P(H = h)$ per le cui probabilità di H si ottengono dalla binomiale.

Per valore atteso e varianza si ha

$$E(H) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X) = \frac{1}{n} * np = p$$

$$\sigma^2(H) = \sigma^2\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sigma^2(X) = \frac{1}{n^2} * np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Esempio

Un esperimento consiste in n=20 lanci Bernoulliani di una moneta ben bilanciata. Calcolare la probabilità che la frequenza di successi sia compresa tra 0.4 e 0.6

Si tratta di calcolare $P(0.4 \leq H \leq 0.6)$ che equivale alle relazioni

$$P\left(0.4 \leq \frac{B}{n} \leq 0.6\right) = P(n * 0.4 \leq B \leq n * 0.6) = P(8 \leq B \leq 12)$$

Interviene ora la funzione di ripartizione

$$P(8 \leq B \leq 12) = P(B \leq 12) - P(B \leq 7) =$$

$$= \sum_{x=0}^{12} \binom{20}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{20-x} - \sum_{x=0}^7 \binom{20}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{20-x}$$

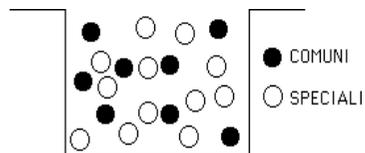
$$= \sum_{x=0}^{12} \binom{20}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{20} - \sum_{x=0}^7 \binom{20}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \sum_{x=9}^{12} \binom{20}{x} = 0.9537E-7 * (646646) = 0.6167$$



La variabile casuale ipergeometrica

Supponiamo che una popolazione sia bipartita in due tipi: comuni e speciali

N_1 comuni N_2 speciali con $N_1 + N_2 = N$



Si estrae **SENZA RIPOSIZIONE** un campione di ampiezza "n".
Qual'è la probabilità che in esso ci siano "x" unità comuni (ed n-x speciali)?

Possiamo scegliere le comuni "x" in $\binom{N_1}{x}$ modi diversi. Ognuna di queste scelte si combina con la scelta di "n-x" unità speciali da "N2": $\binom{N_2}{n-x}$

In tutto le scelte sono: $\binom{N}{n}$ quindi la probabilità è $P(x \text{ unità comuni}) = \frac{\binom{N_1}{x} * \binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

Ipergeometrica/2

La v.c. ipergeometrica esprime il numero di unità comuni in un campione di ampiezza "n" estratto da un popolazione dicotoma con N_1 unità comuni

La funzione di distribuzione è:

$$P(X = x) = \frac{\binom{N_1}{x} * \binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}; \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

ESEMPIO:

In una "mailing list" ci sono 50 indirizzi di cui 10 sono di società. Se in un sondaggio si scelgono -a caso e senza riposizione- 7 indirizzi, qual'è la probabilità che 2 siano di società?

$$P(X = 2) = \frac{\binom{10}{2} * \binom{40}{5}}{\binom{50}{7}} = \frac{45 * 658.008}{99.884.400} = 0.296$$

Ipergeometrica/3

La v.c. ipergeometrica dipende da tre parametri: n, N, N_1 .

Media e Varianza: $E(X) = n * \left(\frac{N_1}{N}\right); \quad \sigma^2(X) = n * \left(\frac{N_1}{N}\right) * \left(\frac{N_2}{N}\right) * \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

Ad esempio nel caso degli indirizzi abbiamo:

$$\mu = 7 * \left(\frac{10}{50}\right) = 1.4; \quad \sigma^2 = 7 * \left(\frac{10}{50}\right) * \left(\frac{40}{50}\right) * \left(\frac{43}{49}\right) = 0.983$$

La funzione di ripartizione è quella solita delle v.c. discrete:

$$F(X) = \sum_{i=0}^x \frac{\binom{N_1}{i} * \binom{N_2}{x-i}}{\binom{N}{x}}$$

Esempio

L'ufficio imposte ha riscontrato 500 dichiarazioni IRPEF. 350 hanno dovuto pagare tasse in più.

L'ispettrice Mariacarmela Turco controlla le procedure e sceglie a caso, senza ripetizione, 10 dichiarazioni

a) Qual'è la probabilità che trovi 6 di queste con elusione?

$$P(X=6) = \frac{\binom{350}{6} * \binom{150}{4}}{\binom{500}{10}} = 0.2016$$

b) Usare l'approssimazione binomiale

Poiché $n=10$ è pari al 2% della popolazione $N=500$ si ha $10 \leq 0.05 * 500 = 25$. Si può quindi usare la binomiale con

$$p = \frac{350}{500} = 0.7$$

$$P(X=6) = \binom{10}{6} * 0.7^6 * 0.3^4 = 0.2001$$

La leggera differenza nel risultato non dovrebbe essere rilevante

Ipergeometrica e Binomiale

I calcoli diventano difficili per N grande. Si può però usare l'approssimazione binomiale.

Se si pone $\frac{N_1}{N} = p$ si ha la probabilità di successo in una estrazione qualsiasi

Media e varianza diventano: $\mu = n * p; \quad \sigma^2 = n * p * (1-p) * \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

il fattore: $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ è la correzione dovuta alla estrazione in blocco

Se " N " diventa grande (rispetto all'ampiezza del campione " n ") il fattore tende ad uno

Con: $N=1000, N_1=200, n=10$ la probabilità di successo nelle prime tre prove è $\frac{200}{1000}, \frac{199}{999}, \frac{198}{998}$ in cui la seconda e la terza sono molto vicine a 0.20

In genere la ipergeometrica è ben approssimata dalla binomiale se: $n \leq 0.05 * N$

In questo caso l'estrazione senza riposizione non differisce da quella con riposizione

Esempio

I 200 studenti di un corso di Inglese sono suddivisi a caso in 10 gruppi di 20 ciascuno per le esercitazioni in laboratorio.

Nel corso ci sono 160 matricole e 40 del II anno.

Qual'è la probabilità che in un gruppo qualsiasi ci sia un numero di studenti del II anno inferiore o uguale a 5?

Indichiamo con " G " la variabile casuale per gli studenti del II anno.

$$P(G \leq g) = \sum_{g=0}^5 \frac{\binom{40}{g} * \binom{160}{20-g}}{\binom{200}{20}} = ?$$

Approssimazione binomiale

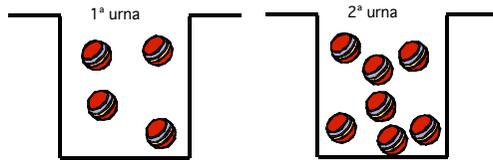
$$\cong \sum_{g=0}^5 \binom{20}{g} (0.20)^g (0.80)^{20-g} = 0.8042$$

$0.05 * 200 = 10$ quindi l'approssimazione non è ottima, ma è da preferire a causa dei fattoriali molto grandi

La ipergeometrica negativa

Un esperimento consiste nell'inserire con equiprobabilità e senza reimmissione "n" biglie scelte tra N in due urne inizialmente vuote.

L'esperimento si ferma non appena un'urna, diciamo la prima, abbia raggiunto la soglia di "r" biglie.



La variabile casuale che ci interessa è il numero di biglie X inserite complessivamente nelle due urne allorché se ne trovano "r" nella prima.

La ipergeometrica negativa/2

La distribuzione di probabilità si determina considerando che ci sono in tutto C(N,n) scelte possibili senza reimmissione.

Si raggiungono le "r" biglie nella 1ª urna all'x-esimo inserimento se nella 1ª urna ve ne sono già (r-1) e queste possono essere scelte in C(x-1,r-1);

Se la x-esima biglia va nella 1ª, nella 2ª urna vi si troveranno (n-r) biglie scelte fra le (N-x) cioè C(N-x,n-r).

$$P(X = x) = \frac{\binom{x-1}{r-1} \binom{N-x}{n-r}}{\binom{N}{n}}; \quad x = r, r+1, \dots, n$$

Dall'algebra alla sigma-algebra

I postulati della teoria elementare non consentono di assegnare delle probabilità ad eventi inseriti in un universo enumerabile o infinito.

Si deve ampliare la teoria elementare con due nuovi postulati

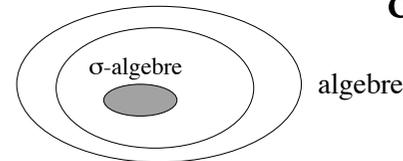
1bis. Gli eventi composti formano una sigma-algebra W.

Questo significa che ogni evento costruito con gli eventi elementari di S e con le operazioni di unione, intersezione e negazione di un numero finito o enumerabile di eventi già in W è comunque in W:

1) $S \in W$; 2) Se $E \in W \Rightarrow E^c \in W$;

3) Se $E_i \in W, i = 1, 2, \dots, \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \in W$

sigma-algebra minimale



Una sigma-algebra è anche un'algebra, ma il contrario non è sempre vero per cui la sigma-algebra è una restrizione dell'algebra.

A partire da S si possono costruire tante classi di eventi composti: alcune saranno delle sigma-algebra ed altre no.

Fra tutte le sigma-algebra di S useremo la più piccola cioè l'intersezione di tutte le sigma-algebra di S

Tale sigma-algebra, detta minimale, esiste ed è unica ovvero se W_1 è un'altra sigma-algebra di S, esiste una sola W, la sigma-algebra minimale, tale che $W \subseteq W_1$

Additività completa (σ -additività)

Se S è numerabile le probabilità debbono scaturire da una successione convergente.

$$1. p_i = \frac{\pi^2}{6i^2}, i = 1, 2, \dots; \quad 2. p_i = \frac{1}{(3 * i + 2)}; i = 0, 1, 2, \dots$$

buono

no buono

Esempio

Spostamenti subiti da una particella passando dallo stato liquido a quello gassoso :

$$p_i = \frac{0.23365}{(2i + 1)^2}; i = 1, 2, \dots$$

La non negatività è evidente. Per la convergenza si applica il criterio stabilito da J.L. Raabe.

Teorema della continuità

Se $\{E_n\}$ è una successione monotona di eventi allora:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n)$$

Nel quadro degli assiomi appena definito è possibile scambiare l'assegnazione della probabilità al limite della successione con il limite della successione delle probabilità.

Kolmogorov preferisce adottare questa come assioma per la teoria della probabilità e derivare l'additività completa come caso particolare.

Additività completa (σ -additività)/2

Per probabilizzare gli eventi della σ -algebra minimale è necessaria una funzione di probabilità che verifichi il seguente postulato:

4bis. Se $\{E_1, E_2, E_3, \dots\}$ è un insieme numerabile di eventi mutualmente incompatibili la probabilità dell'unione è data da:

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) \quad \text{con } E_i \cap E_j = \emptyset \quad \text{per } i \neq j$$

Alla funzione di probabilità si attribuisce la proprietà dell'additività completa (o σ -additività).

Permette risultati teorici più generali, ma non è indispensabile.

Casi estremi/1

"... Non appena compare il concetto di infinito l'intuizione si perde e il concetto vago, ma familiare di casualità non ci è più d'aiuto".



Eventi con probabilità zero diversi dall'evento impossibile

Consideriamo il modello

$$p(x) = \frac{0.62867901}{x!(x+1)!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

Per modalità X molto grandi la probabilità non è distinguibile dallo zero, ma tali modalità non sono impossibili

Casi estremi/2

Eventi con probabilità uno diversi dall'evento certo



La somma della serie infinita delle probabilità $\{p_i\}$ converge ad uno.

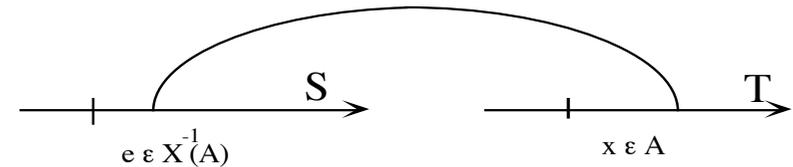
Anche ogni sottosuccessione di probabilità di eventi scelti in modo che da preservare l'ordine, converge pure all'unità.

Questa però risulta assegnata ad un evento che è diverso dall'evento certo.

Ovviamente esistono infinite sottosuccessioni e tra queste ve ne sono infinite che hanno probabilità non negative e somma unitaria, ma non sono l'evento certo dell'esperimento

Ridefinizione della var. cas.

T ed S possono essere enumerabilmente infiniti



La funzione $X=X(e)$ che trasferisce S in T è una variabile casuale se la controimmagine $X^{-1}(A)$ è un evento in W ovvero se e solo se

$$\{e | X(e) \leq x\} = \{X \leq x\} \subset W$$

Variabili casuali e modelli

Ogni insieme di numeri tale che:

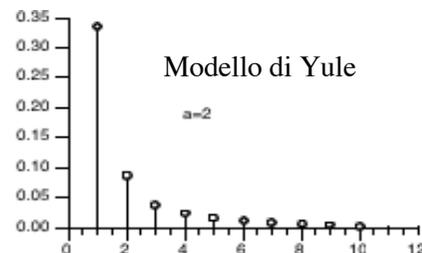
$$\text{per ogni } j \in J: p_j \geq 0; \sum_{j \in J} p_j = 1$$

Si può considerare una funzione di distribuzione e ad ogni variabile casuale può essere associata una funzione di distribuzione senza dover passare per la mediazione di un esperimento casuale

$$p(x) = (x-1)! \left[\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(x+a+1)} \right]; \quad x = 1, 2, \dots,$$

dove $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ è la funzione gamma

$\Gamma(x) = (x-1)!$ se x è intero.



Esempio_1

Determinare moda e quartili nei due modelli:

	Modello a	Pr. Cum.		Modello b	Pr. Cum.
0	0.36787	0.36787	1	0.5431	0.5431
1	0.36787	0.73574	2	0.1629	0.7061
2	0.18394	0.91968	3	0.0776	0.7837
3	0.06131	0.98099	4	0.0453	0.8289
4	0.01533	0.99631	5	0.0296	0.8586
5	0.00307	0.99938	6	0.0209	0.8795
6	0.00051	0.99989	7	0.0155	0.8950
7	0.00007	0.99996	8	0.0120	0.9070
8	0.00001	0.99997	9	0.0095	0.9165
9	0.00000	0.99997	10	0.0078	0.9243
10	0.00000	0.99997	11	0.0064	0.9307
			12	0.0054	0.9361
			13	0.0046	0.9408
			14	0.0040	0.9448
			15	0.0035	0.9483
			16	0.0031	0.9514
			17	0.0027	0.9541
			18	0.0024	0.9566
			19	0.0022	0.9588
			20	0.0020	0.9607
			21	0.0018	0.9625
			22	0.0016	0.9642
			23	0.0015	0.9657
			24	0.0014	0.9671
			25	0.0013	0.9684
			26	0.0012	0.9695
			27	0.0011	0.9706
			28	0.0010	0.9717
			29	0.0010	0.9726
			30	0.0009	0.9735

$$a. p_i = \frac{0.36787}{i!}; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$b. p_i = \frac{1.629446}{i(2i+1)}; \quad i = 1, 2, \dots,$$

Crisi del concetto di media

Si consideri il seguente gioco:

Si lancia ripetutamente una moneta equilibrata e resistente finché esce testa. Si ricevono 2^x mila lire se "testa" avviene al lancio "X". Qual'è il pegno da pagare per rendere equo tale gioco?

La speranza matematica è:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^x \left(\frac{1}{2}\right)^x = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Per entrare in questo gioco in condizioni di parità ci vorrebbero tutti i soldi dell'universo e oltre.

Nessuno sarebbe disposto a scommettere e nessuno farebbe da banco

Esempio

Supponiamo che il costo di un fattore di produzione dipenda linearmente dal numero di pezzi e geometricamente dal costo di stoccaggio.

$$x_i = i(2^i), \quad p_i = \left(\frac{1.71750326}{2^i}\right)\left(\frac{1}{i^2}\right); \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} i(2^i)\left(\frac{1.71750326}{2^i}\right)\left(\frac{1}{i^2}\right) = 1.71750326 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \rightarrow \infty$$

Se la media è infinita lo è anche la varianza, se la varianza è finita lo è anche la media. Se la media è finita, nulla si può dire sulla varianza

Esistenza finita dei momenti

L'esistenza finita del momento r-esimo implica l'esistenza del limite:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a^r P(|x| > a) = 0$$

Solo se le probabilità nelle code sono piccole i momenti possono esistere finiti, ma quanto piccole?

Se $\mu_{r < \infty}$ la probabilità negli estremi deve diminuire con il reciproco della potenza r-esima della variabile:

$$P(|X| > a) = o(x^{-r})$$

Modalità con segno

Se si modifica l'ordine degli addendi la somma -talvolta- cambia

$$x_i = (-1)^i i, \quad p_i = \frac{0.6079271}{i^2}; \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\mu = 0.6079271 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i i}{i^2} = 0.6079271 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} = -0.6079271 \ln(2)$$

Se accorpamo i segni negativi ed i segni positivi il risultato è diverso:

$$\begin{aligned} \mu &= 0.6079271 \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots \right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \right) \right] = \\ &0.6079271 \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \right) \right] = +\infty - \infty \end{aligned}$$

La media è indeterminata

Modalità con segno/2

L'aspettativa della funzione $g(x)$ non dipenda dall'ordine degli addendi se essa rispetta la condizione di convergenza assoluta:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |g(x_i) p(x_i)| = \sum_{i=0}^{\infty} |g(x_i)| p(x_i) = |g(x_1)| p(x_1) + |g(x_2)| p(x_2) + \dots < \infty$$

$$x_i = (-1)^i, \quad p(x) = \frac{0.64805427}{(2x)!}; \quad x = 0, 1, 2, \dots; \quad g(x) = (-1)^x$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} |(-1)^i| \frac{1}{(2i)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} = \frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e} \right) = 1.54308 \Rightarrow \mu = 0.64805427 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} = 0.35014522$$

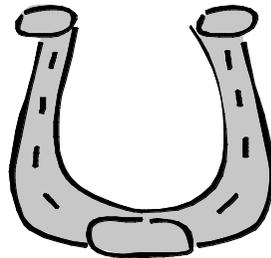
$$p(x) = \frac{0.6079271}{x^2}; \quad x = 1, 2, \dots; \quad g(x) = x_i = (-1)^x x, \quad \sum_{x=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^x}{x} \right| = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} = \text{divergente}$$

Sequenze di prove bernoulliane

1. Sottosequenze di prove che non si sovrappongono sono indipendenti;
2. La probabilità di rinvenire un successo dipende dalla lunghezza della sequenza e non dal suo punto di inizio o di fine.
3. E' poco probabile che più successi si verifichino in prove ravvicinate.

Le disgrazie non vengano mai da sole: nello stesso giorno vi accorgete di aver perso il biglietto vincente i 50 milioni di una lotteria, di avere l'influenza, chi vi sta a cuore non ha telefonato e la prova di Statistica è andata male.

La condizione "3" non è rispettata.



Il problema dei momenti

Se fossero noti tutti i momenti di una variabile casuale sarebbe per questo nota l'intera distribuzione?

Possono esistere due distribuzioni diverse, ma coincidenti per i momenti di ogni ordine?

I momenti debbono esistere finiti perché altrimenti la risposta è negativa.

Perché una variabile casuale sia univocamente caratterizzata dai suoi momenti, basta che sia assolutamente convergente la serie:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{i!} a^i, \quad a > 0$$

Questo è vero per le variabili finite, ma per quelle con dominio infinito andrà stabilito di volta in volta

La variabile casuale di Poisson

Può essere derivata in due diversi contesti



DELLE PROVE BERNOULLIANE

Quando si debbano considerare moltissime prove ciascuna con probabilità di successo molto piccola (forma limite della binomiale per $n \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$)



DEGLI EVENTI TEMPORALI

Ripetizione di un evento in un intervallo di tempo formato da subintervalli più piccoli

Possibili applicazioni

- Teoria delle code
- Numero di interruzioni di energia elettrica in un anno
- Numero di errori tipografici in uno scritto
- Numero di esplosioni lungo una condotta di gas

Prove Bernoulliane

Si parte dal modello binomiale in cui la probabilità di successo è espressa in funzione del numero di prove:

$$p = \frac{\lambda}{n} \quad \text{dove } \lambda > 0 \quad \lambda < n$$

Avremo quindi

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{x! n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

Se si aumenta "n" e nel contempo si riduce "p" in modo che sia costante $p \cdot n = \lambda$ si ha

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

tendono ad uno

tende a $e^{-\lambda}$

Aprossimazione della Binomiale

Per come è costruita, la v.c. di Poisson è una comoda approssimazione della binomiale se è "n" molto grande e "p" vicino a zero.

Per "n" grande, il calcolo del coefficiente binomiale

$\binom{n}{x}$ diventa difficile.

Un "p" molto piccolo significa che il "successo" è altamente improbabile. Per questo la v.c. di Poisson è nota come v.c. degli EVENTI RARI

ESEMPIO.

La probabilità di un parto trigemino è 1/8000. Ci si chiede quale sia la probabilità che se ne verifichino almeno 4 su 10'000. ($\lambda = 10000 \cdot (1/8000) = 1.25$)

$$\text{Binomiale: } P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \sum_{j=0}^3 \binom{10000}{j} \left(\frac{1}{8000}\right)^j \left(\frac{7999}{8000}\right)^{10000-j} = 0.038259$$

$$\text{Poisson: } P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - e^{-1.25} \sum_{j=0}^3 \frac{(1.25)^j}{j!} = 0.038269$$

Eventi temporali

La v.c. di Poisson esprime la probabilità che si ripetano certi eventi in una data unità di tempo



ESEMPIO ILLUSTRATIVO

il telefono, in ogni istante, squilla (successo) o non squilla (insuccesso). Supponiamo che il telefono suoni, in media, 5 volte in un'ora



Se dividiamo l'intervallo in 60 parti uguali otteniamo degli intervalli di 1' di tempo per i quali il numero medio di chiamate è 5/60.

Pensiamo agli intervallini come prove Bernoulliane in cui il successo è la chiamata con $p = 5/60$.

Ad esempio, la probabilità di 3 telefonate è:

$$P(X = 3) = \binom{60}{3} \left(\frac{5}{60}\right)^3 \left(\frac{55}{60}\right)^{57}$$

Eventi temporali/2

Forse una partizione in 60 è troppo grezza perchè valgano le condizioni del modello binomiale. Dividiamolo in secondi: 3600 intervallini di ampiezza 1".

$$P(X = 3) = \binom{3600}{3} \left(\frac{5}{3600}\right)^3 \left(\frac{3595}{3600}\right)^{3597}$$

ripetendo il processo di restrizione, il numero delle prove diventa grande e la probabilità di successo $p = 1/n$ diventa molto piccola. Da notare però che ogni volta si ha $p \cdot n = \lambda = 5$

Formula binomiale in termini "n" e "λ": $P(X = x) = \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-x}$

Al tendere di "n" ad infinito si otterrà $P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

il parametro λ è il numero medio di realizzazioni per unità di tempo. Per calcolare la probabilità che l'evento si ripeta "x" volte in "t" periodi è in media "λt"

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

Studio della Poisson

E' una v.c. discreta legata al parametro λ . $P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ $x=0,1,2,3,\dots$

Ecco alcuni istogrammi di probabilità che ne illustrano il comportamento

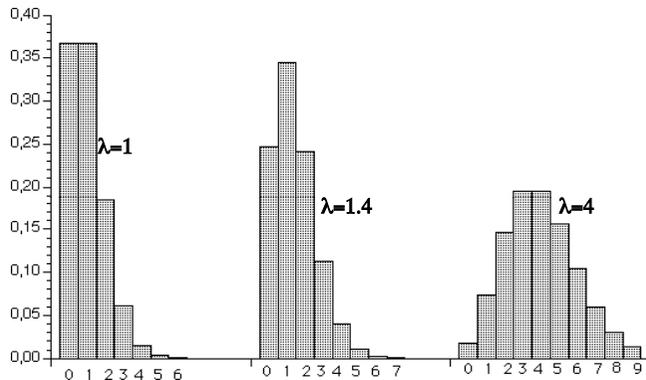
Se λ non è intero è unimodale.

Se λ è intero si ha

$$P(X = \lambda) = \frac{\lambda^\lambda}{\lambda!} e^{-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} e^{-\lambda} = P(X = \lambda - 1)$$

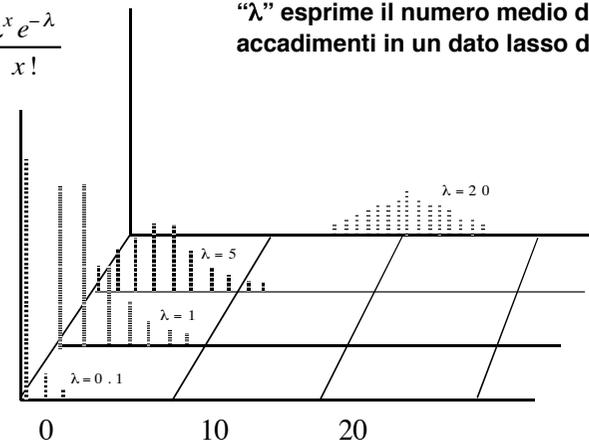
se c'è un massimo questo è ottenuto per due valori



Funzione di distribuzione

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

" λ " esprime il numero medio di accadimenti in un dato lasso di tempo



Studio della Poisson/2

La formula della Poisson è in effetti una funzione di distribuzione

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \left(\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \right) = e^{-\lambda} (e^\lambda) = 1$$

m	$\sum_{x=0}^m \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	
5	7.266667	$e^2 = 7.389056$
10	7.388995	
15	7.389056	
20	7.389056	

Media e varianza della Poisson si ricavano agevolmente

$$E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = 0 + \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda$$

inoltre: $E[X*(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = 0 + 0 + \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda^2$

Ma $E[X(X-1)] = E[X^2 - X] = E[X^2] - E(X) = \lambda^2 \Rightarrow E[X^2] = \lambda^2 + \lambda$

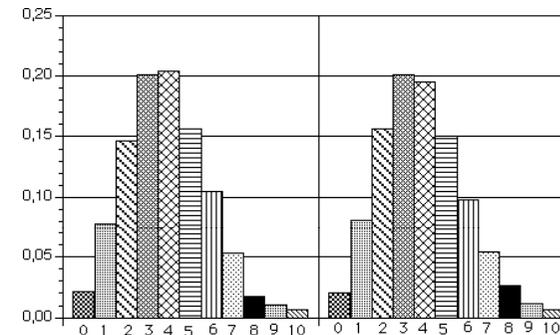
Per cui $Var(X) = E[X^2] - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Esempio

Rutherford, nel 1910, osservò un pezzo di radium durante 2608 intervalli di tempo di 7.5 secondi contando il numero di particelle emesse stimando una media di 3.87 particelle.

Nella tabella è riportata la frequenza relativa delle particelle nonché la probabilità derivata dalla Poisson

x	Osservate	$\frac{3.87^x e^{-3.87}}{x!}$
0	0.0219	0.0209
1	0.0778	0.0807
2	0.1469	0.1562
3	0.2013	0.2014
4	0.2040	0.1949
5	0.1564	0.1509
6	0.1047	0.0974
7	0.0533	0.0538
8	0.0173	0.0260
9	0.0103	0.0112
10+	0.0061	0.0066



Il fenomeno aleatorio è rappresentato bene dal modello di Poisson

Esempio

Si supponga che il numero di imperfezioni per metro quadro di tappeto segua la v.c. di Poisson con media $\lambda=2.2$

$$P(X = x) = \frac{2.2^x e^{-2.2}}{x!}$$

a) Calcolare $P(X=0)$; b) $P(X \leq 2)$; c) Calcolare il valore più probabile di X

a) $P(X = 0) = \frac{2.2^0 e^{-2.2}}{0!} = e^{-2.2} = 0.1108$

b) $P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^2 \frac{2.2^x e^{-2.2}}{x!} = 0.1108 + 0.2438 + 0.2681 = 0.6227$

c)

x	$\frac{2.2^x e^{-2.2}}{x!}$
0	0.1108
1	0.2438
2	0.2681
3	0.1966
4	0.1082
5	0.0476
6	0.0174

← Questa è la probabilità che consente di individuare la Moda

Esempio

La probabilità di soffrire degli effetti collaterali di un vaccino anti influenzale è del 5 per mille.

Supponendo che il vaccino sia somministrato a 1500 persone, determinare la probabilità che non più di una persona subisca effetti collaterali.

Calcolo esatto con la binomiale

$$P(X \leq 1) = \sum_{x=0}^1 \binom{1500}{x} (0.005)^x (0.995)^{1500-x} = 0.00463$$

Approssimazione con la Poisson

$$\begin{aligned} \lambda &= n \cdot p = 1500 \cdot 0.005 = 7.5 \\ P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= \frac{7.5^0 \cdot e^{-7.5}}{0!} + \frac{7.5^1 \cdot e^{-7.5}}{1!} = 0.00470 \end{aligned}$$

7 decimillesimi di errore

Approssimazione

La Poisson, oltre ad essere importante di per sé, è molto utile per approssimare la distribuzione di probabilità della Binomiale.

Se X è una v.c. Binomiale con probabilità di successo "p" ed "n" è un numero molto grande si ha

$$P(X = x) = \binom{n}{x} (p)^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{(np)^x e^{-np}}{x!}$$

L'approssimazione è discreta se $n \geq 20$ e $p \leq 0.05$

E' ottima se $n \geq 100$ e $n \cdot p \leq 10$

Esercizio

Si supponga che il numero di incidenti in una centrale elettrica segua la Poisson con $\lambda=1$ ogni anno.

a) Qual'è il numero di incidenti atteso in 2 anni?

$$t=2 \text{ e } \lambda t=1 \cdot 2=2$$

b) Qual'è la probabilità che nel prossimo anno non ci siano incidenti?

$$t = 1; P(X = 0) = \frac{(1 \cdot 1)^0 e^{-1 \cdot 1}}{0!} = e^{-1} = 0.3679$$

c) Qual'è la probabilità che non ci siano incidenti nei prossimi 6 mesi?

$$t = \frac{1}{2}; P(X = 0) = \frac{\left(1 \cdot \frac{1}{2}\right)^0 e^{-1 \cdot \frac{1}{2}}}{0!} = e^{-\frac{1}{2}} = 0.6065$$

d) Qual'è la probabilità di più di un incidente nel prossimo anno?

$$t = 1; P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0.2642$$

Il Modello di Poisson

E' un modello probabilistico adoperato per rappresentare situazioni di conteggio del numero di occorrenze di certi eventi in una specificata unità di tempo

Perché sia applicabile è necessario che

1. Si conteggia il numero di ripetizioni di un certo evento in un definito e continuo intervallo di tempo;
2. il numero di ripetizioni in un intervallo è indipendente dalle ripetizioni in altri intervalli disgiunti;
3. La probabilità di ripetizione è la stessa in ogni intervallo;
4. La probabilità che nello stesso intervallo si verichino due ripetizioni è molto piccola in confronto con la probabiità di una sola occorrenza;
5. La distribuzione di probabilità del numero di successi in un dato intervallo dipende solo dalla lunghezza dell'intervallo

La funzione di ripartizione

Consideriamo ancora la V.C. del numero di prove necessarie per avere un successo

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1} p$$

In questo caso la funzione di ripartizione può essere espressa come:

$$F(i) = \sum_{j=1}^i P(X = j) = \sum_{j=1}^i (1 - p)^{j-1} p$$

la formula può essere semplificata come

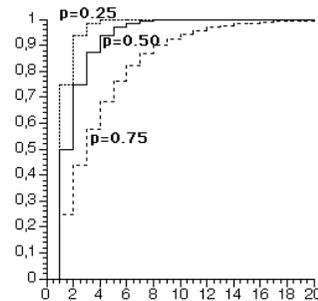
$$\sum_{j=1}^i (1 - p)^{j-1} p = p \sum_{j=1}^i (1 - p)^{j-1} = p \frac{1 - (1 - p)^i}{1 - (1 - p)}$$

Somma di una progressione geometrica

$$= 1 - (1 - p)^i$$

Esempio: Qual'è la probabilità che Agata trovi la sua maglietta con un numero di tentativi inferiore a 7?

$$P(X \leq 6) = 1 - \left(1 - \frac{50}{300}\right)^6 = 0.6651$$



La variabile casuale geometrica

Immaginiamo una serie di prove bernoulliane con probabilità di successo "p", ma invece di considerare il numero di successi ottenuti in queste prove, guardiamo al numero di prove necessarie per ottenere il primo successo.

Indichiamo con X tale numero. Ovviamente: X=1,2,..., fino ad infinito. Il problema è come assegnare la probabilità P(X=x).

Consideriamo ad esempio: X=4. L'evento che ci interessa è : IINIINS, una serie di tre "insuccessi" ed un "successo". Poiché le prove sono indipendenti e le probabilità costanti avremo:

$$P(X = 4) = P(IINIINS) = (1 - p)(1 - p)(1 - p)p = (1 - p)^3 p$$

Il risultato è facilmente generalizzabile: $P(X = x) = (1 - p)^{x-1} p$ $x = 1, 2, \dots$,

che esprime la probabilità che, in una successione di prove bernoulliane, il Successo arrivi alla x-esima prova.

Note sulla v.c. geometrica

Si dimostra che il valore atteso e la varianza della v.c. geometrica sono

$$E(X) = \frac{1}{p}; \quad \sigma^2(X) = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - 1 \right)$$

Quindi, prima di ottenere un successo, in media ci si aspetta di effettuare un numero di prove pari al reciproco della probabilità di successo

ESEMPIO:

Alla Rebecca Informatica S.r.l. il tasso di chiamata per consulenza è 0.2 telefonate al minuto. Sono le 17.20: qual'è la probabilità che arrivi una telefonata all'ultimo dei prossimi 5 minuti?

Perché l'evento si verifichi si debbono avere 4 "insuccessi" cioè 4 minuti senza arrivo di telefonate seguiti da un "successo".

$$P(X = 5) = (1 - 0.02)^4 (0.02) = 0.08192$$

Il numero medio di minuti prima che intervenga una chiamata e la varianza sono:

$$E(X) = \frac{1}{0.02} = 50; \quad \sigma^2(X) = \frac{1}{0.02} \left(\frac{1}{0.02} - 1 \right) = 2475$$

Esempio

Rosa affronta un test che si compone di quiz del tipo VERO/FALSO. Il test si supera se non si commettono errori prima della quarta domanda. Qual'è la probabilità che Rosa superi il test rispondendo a caso?

Ogni quiz è una prova bernoulliana (con $p=1/2$) in cui il "successo" è "Rosa sbaglia". Ne consegue che Rosa supererà il test se il "successo" si verificherà dopo la terza prova.

Posto $X=$ "numero di prove necessarie prima di ottenere il successo", il problema chiede di calcolare

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) = 1 - [P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)] \\ &= 1 - [(1-p)^0 p + (1-p)^1 p + (1-p)^2 p] = 1 - [0.5 + 0.25 + 0.125] \\ &= 0.125 \end{aligned}$$

La Binomiale negativa

La struttura generale è quella di una successione di prove bernoulliane, ma qui la variabile casuale è il numero di prove per avere un certo numero di successi.

$$P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}; \quad x = r, r+1, \dots, \quad \text{per } r=1 \text{ è la geometrica}$$

dove:

p =probabilità di successo nella singola prova bernoulliana;

x = numero di prove che precedono l' r -esimo successo

Per i due parametri fondamentali abbiamo

$$E(X) = \frac{r}{p}; \quad \sigma^2(X) = r \left(\frac{1-p}{p^2} \right)$$

Esercizi

Nel gioco del Lotto molti trovano interessante giocare sul primo estratto di una certa ruota contando sui ritardi eventualmente accumulati.

a) Qual'è il numero medio di settimane di ritardo considerato "normale" per un dato numero?

$$X \sim \text{Geometrica con } p = 1/90 \Rightarrow E(X) = \frac{1}{1/90} = 90$$

b) Se si considera "utile" giocare il numero ritardatario solo se la probabilità che il numero di ritardi accumulato abbia probabilità inferiore ad $1/1000$ dopo quante settimane di non uscita deve cominciare a giocare?

$$P(X > s) \leq 0.001 \Rightarrow P(X \leq s) \geq 0.999 \Rightarrow 1 - \left(1 - \frac{1}{90}\right)^s \geq 0.999$$

risolvendo la disequazione per "s"

$$\left(1 - \frac{1}{90}\right)^s \leq 0.001 \Rightarrow s \leq \frac{\ln(0.001)}{\ln(0.989)} \Rightarrow s \leq 624.5 \approx 625$$

comincia a giocare dopo 6 anni di ritardi

Binomiale negativa/2

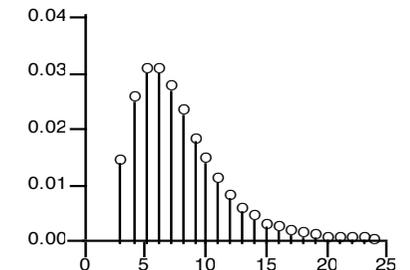
Alla Rebecca informatica S.r.l. la probabilità di una chiamata per il servizio di consulenza è $p=0.4$ telefonate al minuto.

Tre tecniche aspettano impazienti una telefonata così da poter uscire dall'ufficio.

Qual'è la probabilità che arrivino le telefonate di richiesta nei prossimi 3, 4, 5, ... minuti?

$$P(X = x) = \binom{x-1}{2} 0.40^3 (0.60)^{x-3}, \quad x = 3, 4, 5, \dots$$

La binomiale negativa modella fenomeni (atmosferici, spaziali, sociali, sanitari) troppo eterogenei per essere compatibili con la Poisson.



Esempio

Un siero deve essere testato su delle cavia, ma con probabilità $p=0.40$ può indurre una reazione fatale.

Un modo di procedere è di sottoporre un campione di $n=10$ cavia accertando il numero di quelle che muoiono. L'informazione è preziosa, ma costosa, soprattutto per i poveri animali.

In alternativa si possono effettuare delle singole prove ed interrompere la sperimentazione non appena si verificano tre insuccessi.

Qual'è la probabilità che sia necessario testare meno di 10 cavia?

$$\sum_{i=3}^{10} \binom{i-1}{2} (0.4)^3 (0.6)^{i-3} = 0.8327$$

C'è quindi la probabilità dell'80% di salvare qualche cavia.

Esercizio

Le riserve di sangue del gruppo AB nella clinica "Vivi & Sani" debbono essere integrate ed è necessario che arrivino 5 donatori con questo gruppo.

La probabilità che un donatore abbia sangue di tipo AB è del 5%. La disponibilità di cassa della clinica permettono di pagare 50 donatori. Basteranno?

$$P(x \leq 45) = \sum_{x=0}^{45} \binom{x+4}{x} 0.05^5 0.95^x = 2.5\%$$

La probabilità che si trovino 5 donatori con gruppo AB nei primi 50 (un massimo di 45 donatori non appartenenti al gruppo AB) è solo del 2.5%.

Le speranze di colmare la lacuna sono esigue anche se il rischio per la cassa è quasi nullo.

Esempio

Il conteggio degli incidenti o delle imperfezioni in un manufatto è l'essenza del monitoraggio delle linee di produzione.

Immaginate un articolo in plastica in cui la presenza di un'asperità o di un buco sia un difetto.

Un'ipotesi frequente è che sia all'opera un meccanismo che aggredisce il prodotto finché non provoca il difetto; ottenuto il risultato si rimette all'opera per causarne un altro.

Il modello adatto è quello di Pascal:

$$p_i = \begin{cases} p^k & \text{se } i = 0 \\ \frac{p^k k(k+1)(k+2)\dots(k+i-1)}{i!} (1-p)^i & \text{se } i \geq 1 \end{cases}$$

Esempi

Sebbene i modelli siano infiniti le scelte effettive sono pochissime

Tra i più diffusi ricordiamo:

Binomiale : $f_i = \binom{n}{i} \theta^i (1-\theta)^{n-i}$; $0 < \theta < 1$; $i = 0, 1, 2, \dots, n$

Ipergeometrica : $f_i = \binom{n}{i} \binom{N-n}{k-i} / \binom{N}{k}$; $i = 0, 1, 2, \dots, k$

Pascal : $f_i = \binom{r+i-1}{i} \theta^r (1-\theta)^i$; $0 < \theta < 1$; $i = r, r+1, \dots$

Uniforme : $f_i = \frac{1}{n}$; $i = 1, 2, \dots, n$

Ipergeometrica negativa : $f_i = \binom{i-1}{k-1} \binom{N-i}{n-k} / \binom{N}{n}$; $i = k, k+1, \dots, n$

Poisson : $f_i = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$; $\lambda > 0$; $i = 0, 1, 2, \dots$

Geometrica : $f_i = (1-\theta)^{i-1} \theta$; $0 < \theta < 1$; $i = 1, 2, \dots$

Logaritmica : $f_i = \frac{\theta^i}{i \text{Ln}(1-\theta)}$; $0 < \theta < 1$; $i = 0, 1, 2, \dots$

Iperbolica : $f_i = \frac{K}{i(n+i)}$; $i = 1, 2, \dots$, $K = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$

Zeta : $f_i = \frac{\zeta(1+a)}{i^{1+a}}$; $i = 1, 2, \dots$, $\zeta(1+a) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+a}}$ (funzione Z di Riemann)

Scelta del modello discreto

Ogni modello ha dietro una evoluzione ed esprime un processo astratto di osservazione.

I presupposti e le limitazioni debbono trovare puntuale rispondenza nel fenomeno rappresentato in modo da non sembrarne una inutile e pericolosa caricatura.

Esempio:

Per modellare le distribuzioni spaziali in ecologia ci si basa sul rapporto tra la varianza e la media aritmetica: $ID = \sigma^2 / \mu$.

$ID = 1$ --> diffusione erratica. Si usa Poisson;

$ID > 1$ --> presenza di addensamenti. Si usa Pascal

$ID < 1$ --> diffusione uniforme. Si usa la uniforme discreta.

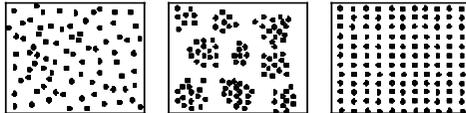
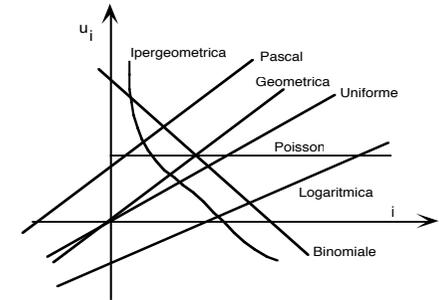


Grafico di Ord

Ascisse= intero naturale "i"

Ordinate=
$$u_i = i \frac{p_i}{p_{i-1}}; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$



Se i punti sembrano allinearsi lungo una retta con inclinazione negativa allora è adatto un modello binomiale.

Se l'inclinazione è positiva è adatto il Pascal purché l'intercetta sia positiva, altrimenti si sceglie il modello logaritmico (intercetta negativa) o quello geometrico (intercetta nulla).

Se è parallela all'asse delle ascisse allora è più appropriato il Poisson;

Se invece la retta passa per l'origine ed ha inclinazione uno si usa la uniforme.

L'ipergeometrica si riconosce per un andamento discendente quadratico.