

Statistica e calcolo delle probabilità

Prof. Agostino Tarsitano

Settore Secs-S/01 - 5 crediti



Introduzione alla probabilità

Questo è un ciclo di lezioni che coinvolge la Sorte, Ma ...

- Non sarà fornito alcun trucco per vincere al superenalotto, lotto, gratta-e-vinci, bingo e pesche varie
- Non verranno dati talismani o filtri per scongiurare eventi funesti
- Non saranno indicate formule capaci di attrarre su di noi e sui nostri cari la Buona Ventura



Statistica e calcolo delle probabilità

Obiettivi formativi

Il corso intende fornire le basi del calcolo delle probabilità e gli strumenti teorico-pratici necessari per affrontare i principali argomenti di inferenza statistica sviluppati nell'ambito di corsi successivi.

Programma del corso

Algebra degli eventi
Teoria generale della probabilità: assiomi e proprietà.
Calcolo combinatorio
Probabilità condizionata indipendenza e Teorema di Bayes.
Variabili aleatorie. Rappresentazione in (x, F) e in (p, Q) .
Trasformate di variabili aleatorie.
Momenti di una variabile aleatoria e loro proprietà.
Funzione generatrice dei momenti.
Quantili di una variabile aleatoria e loro proprietà.
Modelli probabilistici nel discreto,
Modelli probabilistici nel continuo
Variabili aleatorie multidimensionali.

Testo consigliato:

**A. Tarsitano - Statistica su
CD (Cap.6+Cap.7)**

Riflessione

Lo scopo è di illustrare il ruolo della Sorte nella conoscenza scientifica e nel sapere professionale

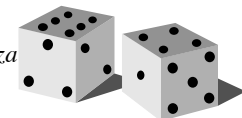
➡ L'umanità è progredita grazie alla conoscenza di leggi naturali sempre più numerose ed alla fiducia in esse riposta

Sappiamo che se si sospende un masso sul piede di qualcuno e poi lo si lascia cadere qualcuno non sarà contento

➡ Malgrado il progresso vi sono moltissimi eventi che non siamo in grado di prevedere.



*Tutto è incerto.
Questa è l'unica certezza*



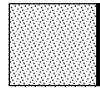
Esperimento deterministico

Ovunque si attivi un processo di osservazione e/o misurazione di un fenomeno soggetto a variazione c'è un esperimento

L'esito di un esperimento deterministico è prevedibile con certezza

ESEMPIO: area del quadrato:

$$Y = X^2$$



X=Lato

noto il lato, l'area del quadrato è univocamente determinata: $x=5 \rightarrow y=25$

Negli esperimenti di laboratorio relativi a molte leggi fisiche le relazioni sono "quasi-deterministiche" in cui gli errori sono imputabili a problemi di misurazione.



Esempio

Ci sono situazioni in cui l'incertezza è non è trascurabile ed altre in cui è dominante



L'ora, il luogo e le modalità con cui si verifica un incidente automobilistico dipendono da innumerevoli fattori ed una modifica in qualcuno potrebbe evitare il sinistro.

Non è possibile stabilire, tra tutti coloro che si metteranno in macchina domani, chi subirà un incidente, ma è praticamente certo che a qualcuno capiterà (si spera con solo lievi danni al mezzo).

Esperimento casuale



Un esperimento casuale è una prova che può essere riproposta -fisicamente o virtualmente- una, due, infinite volte nelle medesime condizioni senza che si possa stabilire quale sarà l'esito della prossima manifestazione.

Casualità ed incertezza

Decidere significa spesso stabilire un legame di CAUSALITA' tra un insieme "A" ed un insieme "B" in condizioni di incertezza.

ESEMPIO: i popoli primitivi, terrorizzati dagli eventi naturali, cercavano di placare gli dei con riti propiziatori

EVENTO: lampi e tuoni

CAUSA: ira degli dei



La valutazione del rapporto causa/effetto è legato alla CASUALITA'

Significato di “casuale”

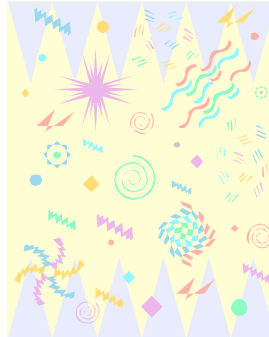
Ciò che è casuale è anche incerto ed in ogni incertezza potrebbe esserci un elemento di casualità

Lessicale: Accadimento involontario, fortuito imprevedibile, accidentale

Statistico: Riflessioni e valutazioni su di un fenomeno soggetto all'azione della pura Sorte.

E' impossibile stabilire a priori quale sarà la sua esatta manifestazione;

Stocastico, aleatorio, erratico,



La Sorte

E' una forza che agisce in tutto l'Universo

ESTRANEA

CAPRICCIOSA

CIECA

CINICA

INACCESSIBILE

INAPPELLABILE

INDIFFERENTE

NEUTRA

IMPREVEDIBILE

DESTRUTTURATA

La Sorte ignora tutto e trascura tutto e garantisce la *par condicio*

E' invocata per la sua trasparenza e per la sua equità.

E' temuta per l'abbandono di ogni discrezione.



Superstizioni e furbizie

Si è lanciata una moneta -fisicamente perfetta- per 50 volte e per 50 volte è uscito “testa”. Prima della 51ª prova vi viene proposto di scommettere 10'000 lire:

 *Esce testa e vinci 10'000
altrimenti perdi la puntata*

 *Esce croce e paghi 10'000
altrimenti incassi la puntata*



Una moneta perfetta non ha memoria dei lanci precedenti e quindi si deve essere “razionalmente” indifferenti alle due puntate.

Se siete convinti che dopo 50 “teste” sia più favorita la “croce” come vi spiegate che si comprano molti più biglietti nella ricevitoria in cui si è già vinto?

Percezione della casualità

**SCRIVETE, SENZA FARVI VEDERE E SENZA CONSULTARVI,
UN NUMERO TRA 1 E 4**

Riscontro nel corso



Quale di queste successioni è casuale?

A

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

B

$\{1, \dots\}$

C

$\{1, 5, 3, 4, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 6, 1, 4, 3, 6, 1, 5, 5, 6, 2, 3, 2, 5, 1, 5, 3, 4, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 6, 1, 4, 3, 6, 1, 5, \dots\}$

D

$\{3, 1, 4, 5, 2, 3, 1, 6, 4, 3, 5, 6, 4, 1, 5, 6, 3, 1, 5, 4, 3, 6, 1, 4, 1, 6, 4, 3, 5, 6, 4, 1, 5, 6, 3, 1, 5, 4, 3, 6, 1, 4, \dots\}$

E

$\{2, 1, 5, 3, 4, 5, 1, 4, 3, 6, 2, 6, 2, 5, 5, 1, 3, 5, 2, 3, 4, 3, 6, 2, 4, 2, 1, 6, 5, 1, 2, 6, 4, 3, 5, 4, 1, 2, 1, 3, 5, 6, \dots\}$

Non si deve parlare di un evento casuale, ma di una sequenza di eventi casuali.

La legge empirica del caso

Sia "S" il dominio di una variabile con un NUMERO FINITO di modalità

$$S = \{E_1, E_2, \dots, E_k\} \text{ con } k < \infty$$

Si supponga che l'esperimento sia ripetuto "n" volte

Modalità	Frequenza
E_1	n_1
E_2	n_2
$\vdots$	$\vdots$
E_k	n_k
$n = \sum_{i=1}^k n_i$	

E' un fatto che se si ripete la procedura, la frequenza relativa si stabilizza su un numero $P(E_i)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_i}{n} \right) = P(E_i) \text{ per } i = 1, 2, \dots, k$$

Anche se non si tratta di un limite nel senso matematico

Definizione algoritmica

Una successione è casuale se non può essere espressa da un algoritmo semplice.

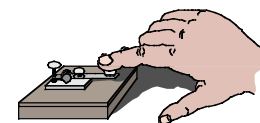
ESEMPIO

Dobbiamo trasmettere -per telegramma- il dominio dei valori possibili nel primo estratto di una ruota del gioco del lotto.

"conta da uno a novanta con incrementi unitari" quindi otto parole invece delle novanta necessarie a descrivere l'intera urna.

La semplificazione (1:90) è abbastanza forte per poter considerare la successione: $\{1, 2, \dots, 90\}$ non casuale.

Questa definizione chiarisce alcuni punti, ma ne confonde altri. Cosa si intende per "semplice"?



La legge empirica del caso/2

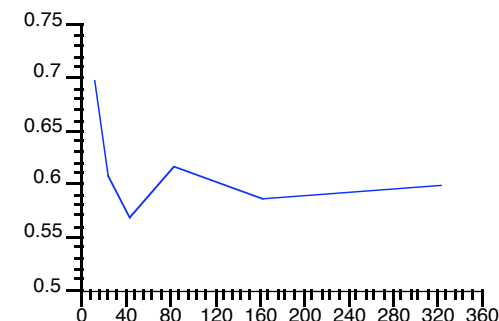
Esperimento del lancio di una puntina da disegno (Variabile binaria)

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la punta non è rivolta verso l'alto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Numerose verifiche sperimentali corroborano l'idea di convergenza delle frequenze relative.

Un esperimento replicato molte volte in condizioni simili, fa emergere una struttura stabile nelle frequenze relative

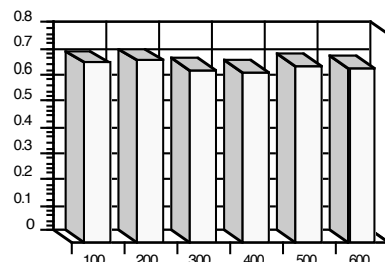


La legge empirica del caso/3

Estrazione con reimmissione di una biglia da un'urna contenente 6 biglie di colore diverso in proporzione 2:4



Dalla	alla	Estr.	Estr. Tot.	Fr.	Fr. tot.
1	100	69	69	0.69	0.690
101	200 ^a	70	139	0.70	0.695
201	300	59	198	0.59	0.660
301	400	63	261	0.63	0.653
401 ^a	500	76	337	0.76	0.674
501	600	64	401	0.64	0.668



L'esito di una singola sperimentazione non può essere previsto.

Siamo però abbastanza sicuri di ciò che succede nel complesso purché si possa disporre di una serie considerevole di repliche in condizioni stabili

Questo fatto è la legge empirica del caso.

E' una definizione? No

Poiché è impossibile condurre un numero infinito di esperimenti, la probabilità dell'evento viene approssimata con il valore della frequenza per n grande.

Tuttavia questo è solo un modo per assegnare le probabilità agli eventi.



Stabilisce però un requisito.

Nel caso di esperimenti casuali ripetibili moltissime volte, le probabilità da dare agli eventi debbono essere coerenti con il limite delle frequenze relative.

Ovvero, ogni scostamento da questa definizione dovrebbe essere adeguatamente motivato.

Un modello per le probabilità

La costruzione di modelli è importante in tutte le scienze per poter lavorare su una realtà più grande, complessa e mutevole.

Siamo alla ricerca di un modello che ci consenta di studiare la casualità dei fenomeni incerti

cioè una rappresentazione semplificata ed astratta delle osservazioni fatte su fenomeni soggetti alla Sorte.

La seguente terna è considerata molto utile per questi fini

$$\text{Modello di probabilità : } (S, W, P) \quad \text{dove} \quad \begin{cases} S = \text{dominio della prova} \\ W = \text{Insieme di insiemi di } S \\ P(.) = \text{funzione che misura la casualità} \end{cases}$$

La prova o esperimento

E' un esperimento -indotto o spontaneo- con esito casuale.

● Il valore di chiusura di un titolo di borsa

● Esito del lancio di un dado

● Livello di inquinamento da elettrosmog

● Esame di laurea



La PROVA o ESPERIMENTO è una situazione che può essere replicata (almeno in teoria) ed il cui esito è reso imprevedibile dall'azione della Sorte.

Le ripetizioni debbono essere tali da potersi dire repliche di uno stesso esperimento e non relative ad esperimenti diversi.

L'evento elementare

E' la descrizione di uno dei possibili risultati della prova. E' "elementare" perché non ulteriormente frazionabile

ESEMPIO: le possibili ragioni di ammanco di inventario sugli scaffali di un supermecato sono:

E_1 = Shoplifting; E_2 = Appropriazione indebita

E_3 = Errore di conteggio; E_4 = Fantasmi



Gli eventi della prova debbono essere ESAUSTIVI ED UNIVOCI:

- 1) Ogni risultato deve corrispondere ad un "evento"
- 2) Ogni risultato deve corrispondere ad un solo "evento"

Il formalismo di Kolmogorov

Nel 1933 Kolmogorov sviluppò una TEORIA DELLA PROBABILITA' sfruttando le analogie tra insiemi ed eventi.

L'idea guida del matematico russo è che sia possibile sviluppare la teoria della probabilità senza definire la probabilità.

Si stabiliscono solo le regole a cui deve sottostare la sua assegnazione e le entità a cui deve essere assegnata.

Le entità sono gli eventi e le regole sono i postulati.

L'approccio alla probabilità di Kolmogorov (detto assiomatico) ha il grande merito di considerare l'assegnazione della probabilità il risultato di una scelta che può quindi non essere unica o non essere esatta.

In questo modo restituisce alle applicazioni della probabilità, l'incertezza che sembra sparire con definizioni troppo esatte (in realtà è solo abilmente nascosta)

L'universo degli eventi

Ad ogni esperimento casuale è associato l'universo degli eventi S: una lista che elenca tutti e solo gli eventi elementari in una data prova.

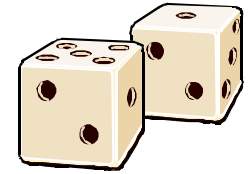
ESEMPIO: lancio di una moneta

Universo degli eventi $S=\{T,C\}$



ESEMPIO: lancio di due dadi

Universo degli eventi $S=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$



I giochi d'azzardo aiutano, come in un laboratorio, a sviluppare nozioni e tecniche utili in situazioni più complesse.

Eventi ed Insiemi

Per proseguire abbiamo bisogno dei concetti della TEORIA DEGLI INSIEMI applicata agli eventi

L'insieme più importante è l'UNIVERSO DEGLI EVENTI "S" i cui elementi sono gli eventi elementari della PROVA.

$$S = \{E_1, E_2, \dots, E_k\} \quad \text{con} \quad k < \infty$$

Gran parte dei concetti della insiemistica si estendono agli eventi.

Le illustrazioni usano i DIAGRAMMI DI VENN cioè figure geometriche disegnate sul piano.

Eventi ed Insiemi/2

L'insiemistica impone all'universo degli eventi una precisa struttura:

“S” è un modello della prova di cui riporta tutto e solo ciò che è rilevante.

La struttura però è vincolata. Devono essere eventi univoci ed esaustivi

➡ Eventi non separabili

Non sempre questo è possibile:

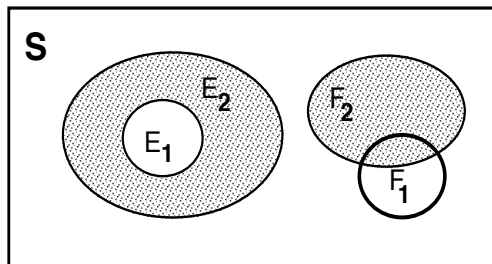
➡ Eventi sfocati

➡ Eventi frazionari

Gli aspetti negativi di eventuali forzature sono compensati dal vantaggio di una trattazione snella e rigorosa.

insiemi e sottoinsiemi

Un insieme “E” è un sottoinsieme di “F”, scritto $E \subset F$, se ogni evento elementare in “E” appartiene anche ad “F” e almeno un evento di “F” non è in “E”;



quindi “F” implica “E” perché questo si verifica ogni volta che si verifica “F”, ma l'opposto non è necessariamente vero

Nel diagramma E_1 è un sottoinsieme di E_2 , ma F_1 non lo è di F_2 dato che non vi è tutto incluso

Operazioni sugli eventi

Per gestire le operazioni con gli eventi adoperiamo le regole degli insiemi.

● INSIEMI E SOTTOINSIEMI

● OPERAZIONI BINARIE: coinvolgono due eventi

● UNIONE

● INTERSEZIONE

● OPERAZIONI UNARIE: coinvolgono un solo evento

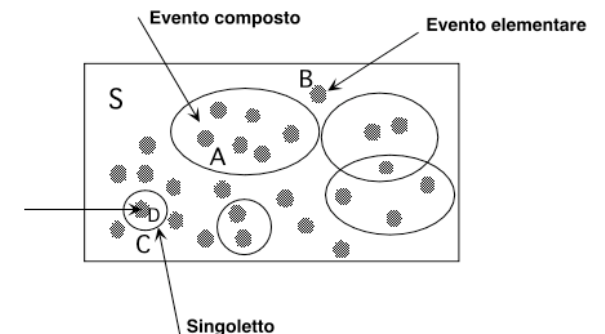
● NEGAZIONE O COMPLEMENTO

Eventi elementari ed eventi composti

L'evento elementare è un elemento non ulteriormente scomponibile dell'universo di una data prova

Per indicare che un evento elementare è incluso in un evento composto si scrive:

$$E \in C$$



L'evento composto è un insieme di eventi elementari che si verifica allorché si verifichi uno dei suoi eventi elementari

Si distingue tra l'evento composto C formato da un solo evento elementare D (singoleto) e lo stesso evento elementare.

Tutte le operazioni sono applicate ad eventi composti

Esempi

1) Nella tris di Cesena corrono

$S = \{\text{Golden Tango, Bernadette, Can Can, Mon Amour, King, Mambo, Jolly, D'Artagnan, Piripicchio, Butterfly, Soldatino, Antonello da Messina}\}.$

L'amico Mandrake, su richiesta della fidanzata Gabriella, dovrebbe giocare $M = \{\text{King, Soldatino, D'Artagnan}\}$; M è un evento composto con gli eventi elementari di S .



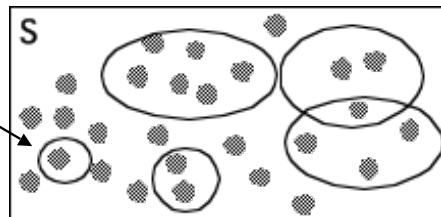
2) L'insieme - e quindi l'evento- può essere specificato stabilendo la sua regola di composizione interna e cioè una proprietà che tutti e solo i suoi elementi verificano:

$$F = \{x \mid x \text{ è una regione italiana}\}$$

Se $X = \text{Molise}$ allora la proprietà è soddisfatta;
se $X = \text{Brescia}$ la proprietà non è soddisfatta.

Singoletto

E' l'evento composto descritto da un singolo evento elementare.



Il termine "evento" dovrebbe essere attribuito solo a quello composto, anche in forma di singoletto, evitando la locuzione "evento elementare" anche se questa è ormai radicata nell'uso.

La nozione di singoletto consente di applicare le operazioni dell'insiemistica a tutti e solo eventi composti.

Eventi composti/2

L'evento composto deriva da una asserzione logica relativa agli eventi elementari di una prova.

Se E_1, E_2, E_3, E_4 sono eventi elementari allora

$$F_1 = \{E_1, E_2\} \text{ e } F_2 = \{E_1, E_3, E_4\}$$

sono eventi composti.

Per indicare lo stato di appartenenza di un evento elementare ad un particolare evento composto si utilizza la simbologia:

$$E_i \in F_j \text{ se } E_i \text{ è un esito incluso in } F_j$$

$$E_i \notin F_j \text{ se } E_i \text{ non è un esito incluso in } F_j$$

Evento certo ed evento impossibile

L'universo degli eventi cambia da prova a prova. Ma due eventi sono sempre presenti.

L'EVENTO CERTO: si verifica sempre è indicato con S)

E' un evento composto formato da TUTTI gli eventi elementari di S

Nel lancio di un dado esce un numero da uno a sei

L'EVENTO IMPOSSIBILE: non si verifica mai (è indicato con $\emptyset$)

E' un evento composto formato da NESSUN evento elementare di S

In una gara con dieci concorrenti arrivare undicesimo

Uguaglianza di insiemi e di eventi

Due eventi si dicono uguali se, contemporaneamente "E" è un sottoinsieme di "F" e questo è un sottoinsieme di "E".

$$E = F \text{ se } E \subset F \text{ e } F \subset E$$

Esempio:

In uno studio sugli effetti di uno stimolante sul rendimento scolastico si considerano i soggetti a prescindere dal loro sesso per cui gli eventi:

e "una pastiglia ha provocato l'effetto su Immacolata"
e "una pastiglia ha provocato l'effetto su Calogero"
sono uguali.

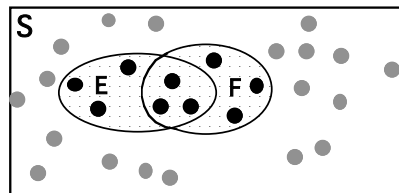
L'evento unione

Dati due eventi "A" e "B". L'evento unione, "C", si verifica se si verifica o l'uno o l'altro o entrambi gli eventi considerati

$$A = (E \cup F) = \{x | x \in E \text{ oppure } x \in F\}$$

ESEMPIO: la mano di poker in 4
I giocatori sono: NORD, SUD, OVEST, EST

Poniamo A: Nord ha un tris;
B: Est ha un full (tris+coppia)



L'evento unione "C" si verifica se Nord ha il tris oppure se Est ha un full, ma si verifica pure se, contemporaneamente, Nord ha il tris ed Est il full (con buona pace di Nord)

Quiz: quando si verifica l'evento: "A oppure B, ma non entrambi" ?

L'evento negazione

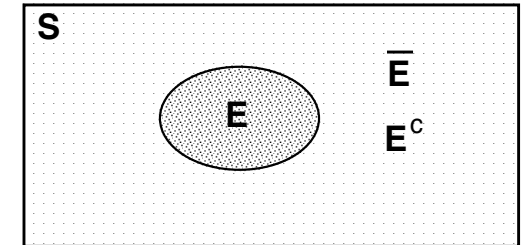
Unione ed intersezione si riferiscono ai singoli eventi, la negazione si riferisce all'intera prova.

L'evento negazione o evento complementare di un evento "A", indicato con A^c cioè "non A" si verifica quando non si verifica "A".

ESEMPIO: previsioni economiche

A= inflazione al di sopra del 2%;

Perché si verifichi A^c è sufficiente che l'inflazione sia minore o uguale al 2%.



L'Evento negazione si indica anche con A' o con $\bar{A}$

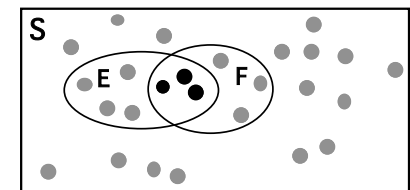
L'evento intersezione

Dati due eventi "A" e "B". L'evento intersezione, "D", si verifica se accadono entrambi gli eventi considerati

$$A = (E \cap F) = \{x | x \in E \text{ e } x \in F\}$$

ESEMPIO: Età della donna in anni compiuti
all'atto del matrimonio

Poniamo A: $28 \leq X \leq 45$; B: $20 \leq Y \leq 40$



L'evento intersezione si verificherà se, contemporaneamente, la donna ha più di 28 anni, ma meno di 40

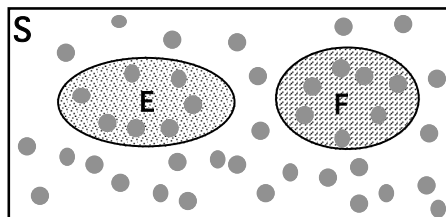
Eventi mutualmente incompatibili

Due eventi che non possono presentarsi insieme sono **MUTUALMENTE INCOMPATIBILI** (a due a due).

In ogni prova se ne può verificare uno solo e quindi essi non hanno elementi in comune

ESEMPIO: nomina del Presidente in un comitato di cinque membri: M1, M2, M3, M4, M5.

A: Presidente è M1
B: Presidente è M2



L'intersezione di due eventi incompatibili è un evento impossibile

$$E \cap F = \emptyset$$

Le coperture

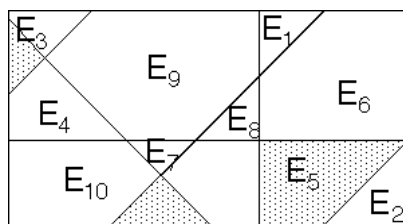
Un insieme di eventi

$$E_1, E_2, \dots, E_k$$

costituisce una copertura dell'universo degli eventi se

$$\bigcup_{i=1}^k E_i = S \quad \text{"unione per } i \text{ che va da uno a } k \text{ di } e \text{ con } i"$$

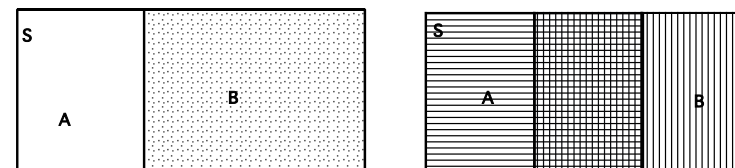
Insieme formano l'evento certo



Eventi necessari

Se, in una prova, due eventi sono tali che almeno uno dei due si verifica, si dicono **NECESSARI**.

L'essere necessari vuol dire che, insieme, i due eventi costituiscono l'evento certo



Esempio: *eventi necessari e incompatibili*. Esempio: *eventi necessari, ma compatibili*

Una classe di 24 studenti consiste di 14 matricole e 10 del 2° anno.

Il censimento delle persone distingue tra presenti e residenti (uno status non esclude del tutto l'altro)

A: Si sceglie una matricola
B: Si sceglie un 2° anno

A: La persona è presente
B: La persona è residente

La partizione

Un insieme di eventi

$$E_1, E_2, \dots, E_k$$

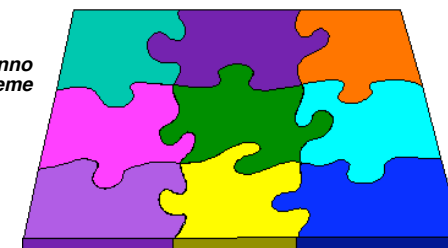
costituisce una **PARTIZIONE** dell'universo degli eventi se

1) $E_i \cap E_j = \emptyset$ Per ogni " $i \neq j$ " (sono incompatibili a coppie)

2) $\bigcup_{i=1}^k E_i = I$ Insieme formano l'evento certo

"unione per i che va da uno a k di e con i "

I pezzi del puzzle non hanno parti in comune, ma insieme formano il disegno



Proprietà delle operazioni

Molte peculiarità dell'insiemistica si applicano all'algebra degli eventi

<i>Legge commutativa:</i>	$E \cup F = F \cup E$	$E \cap F = F \cap E$
<i>Legge associativa</i>	$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap G$	$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup G$
<i>Legge distributiva</i>	$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$	$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$
<i>Idempotenza</i>	$E \cup E = E$	$E \cap E = E$
<i>Monotonia:</i> $E \subset F$	$E \cup F = F$	$E \cap F = E$
<i>Convoluzione</i>	$(E^c)^c = E$	

Fra i due eventi estremi valgono le relazioni: $S^c = \emptyset$; $\emptyset^c = S$

Applicazione: evento sottrazione

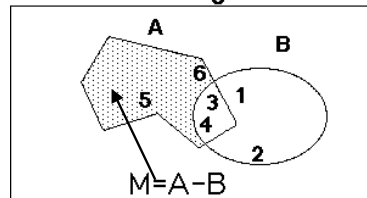
Dati due eventi "A" e "B". L'evento sottrazione, "M = A - B", si verifica se si verificano gli eventi di "A" che non siano anche in "B"

ESEMPIO: lancio di due dadi di colore diverso

L'universo degli eventi è formato dagli interi {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A: Dado rosso > 2
B: Dado blu < 5

Universo degli eventi



L'evento sottrazione "M" si verificherà se esce un numero più grande di "2", ma che NON sia più piccolo di "5"

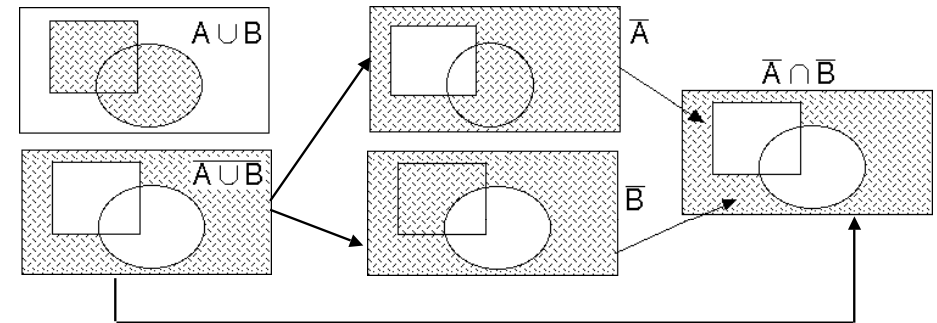
E' facile controllare che: $A - B = A \cap \bar{B}$

Leggi di De Morgan

L'algebra degli eventi non richiede in realtà che due operazioni: la terza può essere ricavata dalle altre due in base alle leggi di De Morgan sugli insiemi

1) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ Complemento ed unione definiscono l'intersezione

2) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ Complemento ed intersezione definiscono l'unione



Le algebre

Con "S" e con l'insiemistica si possono formare tanti altri insiemi;

Tutti questi insiemi formano a loro volta un insieme i cui elementi sono degli insiemi.

Ci interessa un particolare tipo di questi insiemi di insiemi: l'algebra, indicata con W che ha le seguenti caratteristiche:

1. Se $E \in W$ e $F \in W \Rightarrow (E \cup F) \in W$;
- 1bis. Se $E \in W$ e $F \in W \Rightarrow (E \cap F) \in W$;
2. Se $E \in W \Rightarrow E^c \in W$;

Un'algebra non contiene eventi elementari, ma solo eventi composti, anche da un solo evento elementare (SINGOLETTO)

Le condizioni 1 e 1bis sono alternative visto che usarle entrambe porterebbe ad una ridondanza di cui non si ha bisogno.

Le algebre/2

Dato il dominio "S" possiamo costruire una algebra attivando un numero finito di operazioni di unione e negazione o di intersezione e negazione.

Se "S" contiene "k" eventi elementari possiamo costruire sottoinsiemi che contengono un solo elemento, che ne contengono due, tre e così via

Il totale degli eventi composti è: 2^k se k è il numero di eventi elementari

In realtà se ne trattano molti di meno, ma lo schema di Kolmogorov si estende a tutto ciò che è coerente con i postulati e non solo a ciò che interessa.

Teoria elementare della probabilità

Esistono diverse presentazioni della probabilità. Noi seguiamo la teoria assiomatica di KOLMOGOROV



Introduzione dei CONCETTI PRIMITIVI:
(PROVA, EVENTO, PROBABILITA')



In base a questi si stabiliscono i
POSTULATI cioè le regole per ragionare
sulle probabilità



Da questi e solo da questi segue il
CALCOLO DELLE PROBABILITA'



La funzione di insieme

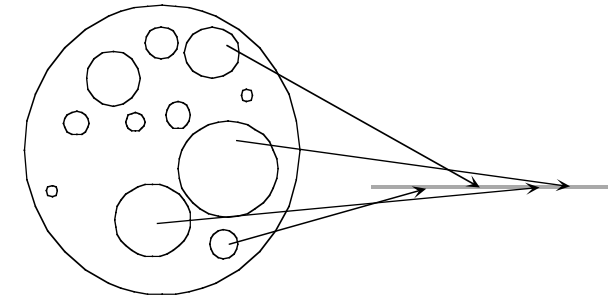
La funzione $f(x)$ è una legge che associa ad ogni punto di un insieme (DOMINIO) uno ed un solo punto di un altro insieme (CODOMINIO o IMMAGINE)

La nozione si estende al caso in cui il dominio è costituito da INSIEMI.

$$y = f(x)$$

FUNZIONE DI INSIEME: l'argomento "X" è un insieme.

*Esempio: dominio
dei cerchi nel piano
con associata la
circonferenza*



L'approccio di Kolmogorov

Perché la teoria non sia una mera raccolta di concatenazioni logiche, ma sia "scienza" i postulati sono attinti dalla realtà osservabile.

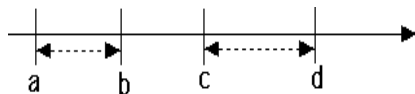
In particolare debbono essere:

- **COERENTI:** non devono generare contraddizioni interne
- **UTILI:** devono essere subito operativi
- **NON RIDONDANTI:** non devono poter essere dedotti da altri postulati

L'approccio di Kolmogorov/2

Un vantaggio dei postulati di Kolmogorov è che essi derivano in modo diretto dall'esperienza.

In fondo, quello che ha fatto Kolmogorov altro non è che allargare agli eventi la misura di una grandezza fisica.



Le lunghezze (b-a) e (d-c) sono sempre non negative.

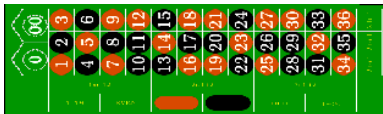
La lunghezza congiunta dei due intervalli è (b-a)+(d-c) perché non ci siano punti in comune,

LA NON NEGATIVITA' E L' ADDITIVITA' ricorrono nei postulati sulla probabilità.

Esempi

Roulette

(36 numeri + "0" e/o "00")



Combinazione	Possibilità	vincita
Numero pieno	1 su 37	35
Cavallo (due numeri contigui)	2 su 37	17
Pieno e cavalli (numero e contigui)	dipende	dipende
Terzina (tre numeri in orizzontale)	1 su 12	11
Carré (4 numeri in quadrato)	1 su 9	8
Sestina (due terzine)	1 su 6	5
Colonna (12 numeri in verticale)	1 su 3	2
Dozzina (12 numeri progressivi)	1 su 2	2
Rosso e nero	1 su 2	1
Pari e dispari	1 su 2	1
Manque e passe (1-18,19-36)	1 su 2	1

Mano	36 carte	32 carte
Coppia vestita	8	4
Doppia coppia	21	10
Tris	47	23
Scala	254	62
Full	694	218
Colore	508	785
Poker	4165	1310
Scala reale	65000	16000
Progetto scala bilaterale	28	12
Progetto colore	23	27



Poker

Mazzo francese tranne le carte più piccole

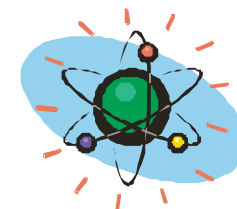
Postulato_0: gli eventi formano un' algebra

Dall'universo degli eventi "S" si possono ricavare tanti sottoinsiemi, incluso l'evento certo ed impossibile.

Indichiamo con "W" l'insieme di tutti gli insiemi comunque derivati da "S"

Tale insieme è detto algebra se:

1. $S \subseteq W$;
2. Se $A \in W \Rightarrow \bar{A} \in W$
3. Se $A_1 \in W$ e $A_2 \in W \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in W$
4. Se $A_1 \in W$ e $A_2 \in W \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in W$



ciò che l'unione FINITA e la negazione di eventi in W (e quindi anche le altre operazioni) generano altri eventi che ricadono pure nell'algebra W

Postulati_1,2: limiti della probabilità

Secondo Kolmogorov ad ogni evento $A \in W$ si può associare un numero reale $P(A)$ variabile in un intervallo limitato



La probabilità di un evento "A" è maggiore o uguale a zero

$$P(A) \geq 0$$



La probabilità dell'evento certo "S" è pari ad uno

$$P(S) = 1$$

Postulato_3: additività

La probabilità dell'evento unione di due o più eventi incompatibili è data dalla somma delle probabilità degli eventi.

$$\text{Se } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ per } i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k P(E_i)$$

per ogni serie, FINITA di eventi.

La probabilità $P()$ è una funzione di insieme NON NEGATIVA, ADDITIVA E LIMITATA

La probabilità può essere espressa come decimale: 0.25, percentuale 25%, frazione: 1/4: casi contro e a favore 1:3 (1 a 3)



Esempi

Impostare il calcolo della probabilità di avere una carta rossa (cuori o quadri) in una mano di poker

$$\begin{aligned} \text{Probabilità}\{ \text{carta rossa} \} &= \text{Probabilità}\{ \text{cuori o quadri} \} \\ &= \text{Probabilità}\{ \text{cuori} \} + \text{Probabilità}\{ \text{quadri} \} \end{aligned}$$

Impostare il calcolo della probabilità di avere una figura ("J", "Q", "K") in una mano di poker

$$\begin{aligned} \text{Probabilità}\{ \text{figura} \} &= \text{Probabilità}\{ \text{"J", "Q", "K"} \} \\ &= \text{Probabilità}\{ \text{"J"} \} + \text{Probabilità}\{ \text{"Q"} \} + \text{Probabilità}\{ \text{"K"} \} \end{aligned}$$



Probabilità di eventi elementari e composti

Consideriamo solo universi formati da un numero finito di eventi elementari.

In questo caso basta assegnare la probabilità ai singoli eventi elementari e poi sfruttare il 3° postulato per assegnare la probabilità agli eventi composti

Sia F un evento composto $F = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$

La sua probabilità è pari alla somma delle probabilità degli eventi elementari che in esso ricadono.

$$P(F) = \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

Se F si verifica ogni volta che si verifica E_1 , ogni volta che si verifica E_2 e così via e se eventi elementari non hanno niente in comune è intuitivo pensare che la probabilità di F sia la somma delle probabilità dei componenti

L'evento impossibile ha probabilità zero

Dal fatto che $S \cup \emptyset = S$ e $S \cap \emptyset = \emptyset$

Consegue che $P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset) = 1 + P(\emptyset)$

Tuttavia $P(S \cup \emptyset) = P(S) = 1$

E quindi $P(\emptyset) = 0$

Una parte su un milione di miliardi del bicchiere di un ottimo vino è mortale. Berreste?

Probabilità zero implica l'evento impossibile?

Non sempre: lo zero può essere l'approssimazione di un numero talmente non distinguibile dallo zero, ma positivo.



La probabilità dell'evento negazione

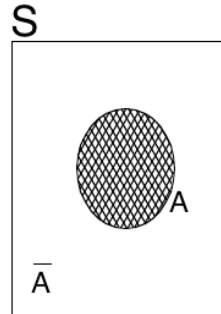
è il complemento ad uno della probabilità dell'evento che si nega

Dal fatto che: $A \cup \bar{A} = S$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$

consegue che: $P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1$

ma anche che: $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$

Quindi $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$



Le due scommesse
10,000 che esce il 27 sulla ruota di Napoli al 10%
10,000 Non esce il 27 su Napoli al 90%

Devono risultare indifferenti

Esempio

In un processo produttivo si sceglie a caso un item. Indichiamo con

➡ A: L'item è difettoso sul peso $P(A)=0.38$

➡ B: L'item è difettoso nella forma $P(B)=0.33$

➡ A « B L'item è difettoso sia nella forma che nel peso $P(A \cap B)=0.26$

La probabilità che l'item sia difettoso per uno o entrambi i motivi è

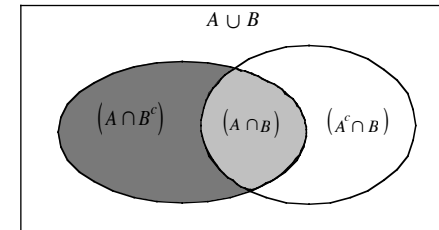
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = 0.38 + 0.33 - 0.26 = 0.45$$

Legge additiva

L'evento certo può essere espresso come l'unione di due eventi necessari
 $S=(A \cup A^c)$ e $S=(B \cup B^c)$.

$$A = A \cap S = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

$$B = B \cap S = B \cap (A \cup A^c) = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$



$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A) \cup (B \cap A^c) \\ = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

L'unione è espressa come insieme composto da tre eventi mutualmente incompatibili

$$P(A \cup B) = P[(A \cap B^c)] + P[(A \cap B)] + P[(B \cap A^c)] + P[(B \cap A)] - P[(B \cap A)] \\ = P(A) + P(B) - P[(B \cap A)]$$

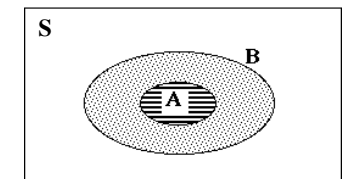
Probabilità di un sottoinsieme

Se A è un sottoinsieme di B allora

$$P(B) \geq P(A)$$

Scriviamo l'evento "B" come

$$B = A \cup (B \cap \bar{A}) \text{ con } A \cap (B \cap \bar{A}) = \emptyset$$



Richiamando il postulato degli eventi incompatibili avremo

$$P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \geq P(A)$$

poiché la probabilità è non negativa.

Conseguenza

$$0 \leq P(A) \leq P(S) \leq 1$$

Misura della probabilità

Esiste una classe di eventi per la quale possiamo assegnare le probabilità in base ai soli postulati

Assumiamo che gli eventi $E_1, E_2, \dots, E_k$ siano una partizione

$$1) E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$2) \bigcup_{i=1}^k E_i = I$$

Teorema:

se gli eventi sono equiprobabili, la loro probabilità è data dal reciproco del numero di eventi.

$$1 = P\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k P(E_i)$$

Eventi equiprobabili significa che $P(E_i) = \alpha \quad \forall i$ e quindi $1 = \sum_{i=1}^k \alpha = k\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{k}$

In questo la probabilità, ma questa è la conseguenza automatica della SIMMETRIA degli eventi e dei postulati

Prove e sottoprove

L'evento può risultare da più sottoprove anche con dominio diverso

Comunque si produce una n-tupla che può essere:

$$\text{Non ordinata : } E = \{x_1 \in S_1, x_2 \in S_2, \dots, x_n \in S_n\}$$

$$\text{Ordinata : } E = (x_1 \in S_1, x_2 \in S_2, \dots, x_n \in S_n)$$

Nella prima ogni alterazione dell'ordine genera un evento distinto

Nella seconda dove, per avere un evento diverso, è necessario modificare almeno un elemento.

Perché il calcolo combinatorio

Basato sulle idee primitive di distinzione e di classificazione, stabilisce in quanti modi diversi si possono combinare degli oggetti e torna molto utile nell'enumerazione dei casi possibili di una prova

ESEMPIO:

Indagine sul consumo di caffè



Miscela $\{A, C, M\}$

Confezione $\{B, S\}$

Formato $\{S, D, F, B\}$

ABS	ABD	ABF	ABB
ASS	ASD	ASF	ASB
CBS	CBD	CBF	CBB
CSS	CSD	CSF	CSB
MBS	MBD	MBF	MBB
MSS	MSD	MSF	MSB

Ogni terna è un possibile soggetto di studio

Non sempre è facile catalogare le possibilità. C'è bisogno di una regola generale

Scelta con e senza ripetizione



Con ripetizione. Uno stesso elemento può essere ripetuto più volte nella stessa n-tupla

Esempio: nella roulette esce il 12 e poi riesce il 12



Senza ripetizione (o in blocco). Gli elementi della n-tupla sono tutti distinti

Sulla ruota di Venezia esce il 12 al 1° estratto, ma lo stesso 12 non può uscire nelle altre estrazioni

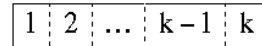
La moltiplicazione combinatorica

Nell'esempio, l'entità è formata da tre "caselle": la 1^a può variare in 3 modi, la 2^a in 2 e la 3^a in 4. Il numero totale di entità è quindi

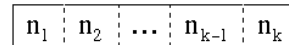
$$N = 3 * 2 * 4 = 24$$

Supponiamo che

1) l'entità sia formata dall'accostamento di "k" categorie:



2) Ogni categoria abbia un numero definito di livelli:

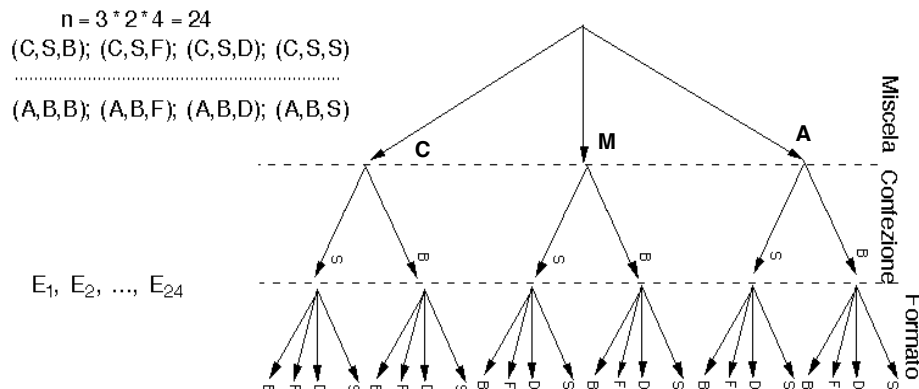


Le possibilità saranno in tutto: $n = n_1 * n_2 * \dots * n_k = \prod_{i=1}^k n_i$

Questa è una regola fondamentale del calcolo combinatorio e permette di stabilire il numero di possibilità risultanti dalla interazione di scelte diverse.

Esempio

indagine sul consumo di caffè



L'albero degli abbinamenti

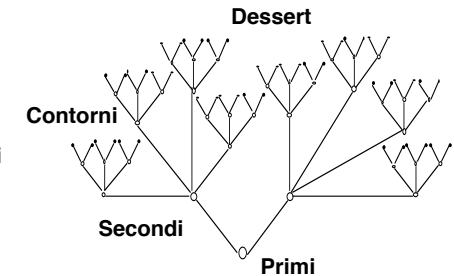
E' una utile rappresentazione: da una radice comune partono tanti rami per quante sono le categorie della prima variabile classificatoria

Il ramo termina con un nodo e da ognuno di questi partirà un nuovo ramo per ogni categoria della seconda variabile e così via

Esempio:

Un menù prevede due soli tipi di primi, quattro tipi di secondo, tre sole scelte per il contorno e due dessert. Quanti menu diversi è possibile richiedere?

La risposta si può ottenere contando i rami terminali: 48.



Disposizioni senza ripetizione

Un'urna prevede N bussolotti. L'esperimento consista nell'estrarne -senza reimmissione- "n".

L'evento elementare è una n-tupla di elementi.

Si ammette che l'ordine sia importante e cioè che {A, B} è diverso da {B,A} anche se ha gli stessi elementi.

ESEMPIO: $S = \{A, E, C, N\}$ Se $n=1$ le scelte sono 4: (1), (2), (3), (4)

Scelte possibili per $n=2$

AE	AC	AN	EC	EN	CN
EA	CA	NA	CE	NE	NC

12

Scelte possibili per $n=3$

AEC	EAC	CAE	NAE	NCE	ECN
ACE	ECA	CEA	NEA	NEC	ENC
AEN	EAN	CEN	NAC	CAN	ACN
ANE	ENA	CNE	NCA	CNA	AEC

24

Disposizioni senza ripetizione/2

Scelte possibili con $n=4$:

AECN	AENC	ANEC	ANCE	ACEN	ACNE
EACN	EANC	ENAC	ECAN	ENCA	ECNA
CEAN	CENA	CNEA	CNAE	CANE	CAEN
NACE	NAEC	NECA	NEAC	NCAE	NCEA

24

DISPOSIZIONI SENZA RIPETIZIONE DI "N" OGGETTI PRESI "n" ALLA VOLTA

$$D_{sr}(N, n)$$

l'evento è formato da n caselle:

1	2	...	n
---	---	-----	---

Nella prima casella possiamo porre uno qualsiasi degli "n" oggetti; nella seconda uno dei restanti cioè "(N-1)" perché il primo non si può ripetere; nella terza "(N-2)" perché le prime due sono già impegnate e così via.

$$D_{sr}(N, n) = N * (N - 1) * (N - 2) * \dots * (N - n + 1)$$

Disposizioni con ripetizione

Trattiamo ora il caso in cui sia permessa la ripetizione degli oggetti. Quello che cambia è che, qualunque sia la casella, ci sono sempre "N" possibilità

$$D_{cr}(N, n) = N * N * \dots * N = N^n$$

Avendo "N" biglie da collocare in "n" celle (in modo che ogni cella possa contenere anche più di una biglia) le disposizioni con ripetizione esprimono il numero possibile di scelte

ESEMPIO: $S = \{A, E, C, N\}$

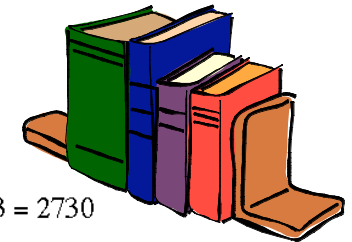
Disposizioni con ripetizione di 4 oggetti presi a 2 alla volta

$$D_{cr}(4, 2) = 4^2 = 16$$

AA	AE	AC	AN
EA	EE	EC	EN
CA	CE	CC	CN
NA	NE	NC	NN

Esempi

I volumi numerati di un'opera in $N=15$ tomi sono riposti a caso su di uno scaffale. In quanti modi i primi tre posti possono accogliere i volumi?



$$D_{15,3} = 15 * (15 - 1) * (15 - 3 + 1) = 15 * 14 * 13 = 2730$$

$$13 = 15 - 3 + 1$$

In quanti modi possono venir ordinatamente estratti i 5 numeri della ruota di Roma fra gli $N=90$ disponibili del gioco del lotto

$$D_{90,5} = 90 * 89 * 88 * 87 * 86 = 5,273,912,160$$

$$NB: 86 = 90 - 5 + 1$$

Esempi



Nel codice ASCII un carattere è rappresentato da una disposizione di 8 bit ognuno dei quali può assumere valore "0" oppure "1". Quanti sono i possibili codici:

$$\overbrace{2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2}^{8 \text{ volte}} = 2^8 = 256$$

Nei concorsi TOTIP si ottiene la vincita massima indovinando $n=14$ risultati legati ad altrettanti concorsi ippici.

Ogni risultato può essere: "1", "X", "2" quante sono le possibili colonne?

$$3^{14} = 4 \ 782 \ 969$$



Le permutazioni

Quante sono le scelte possibili se un diverso ordinamento delle unità genera una scelta diversa?

La risposta è data dal numero di disposizioni senza ripetizione per tutte le "n" posizioni

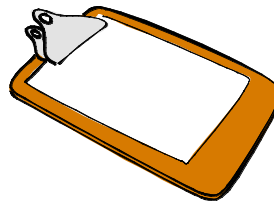
$$P_{sr}(n, n) = n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * 2 * 1 = n! \text{ (fattoriale di "n")}$$

detta anche PERMUTAZIONE senza ripetizione degli "n" oggetti

ESEMPIO:

Un ordine del giorno è stato circoscritto a n=7 argomenti. Quante sequenze di discussione sono possibili?

$$P_{sr}(7) = 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 5040$$



Formula di Stirling

Uno strumento di grande importanza analitica per il trattamento dei fattoriali è la formula di Stirling

$$n! \cong \sqrt{2\pi} * n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

dove il simbolo $\cong$ indica che il rapporto tra i due membri tende ad uno quando "n" diventa grande

n	n!	Stirling
1	1.	0.922
2	2.	1.919
3	6.	5.836
4	24.	23.506
5	120.	118.019
6	720.	710.078
7	5'040.	4'980.396
8	40'320.	39'902.395
9	362'880.	359'536.873
10	3'628'800.	3'598'695.619

Questa formula ha molte applicazioni teoriche, ma fornisce anche delle buone approssimazioni.

Anche se la differenza tra le due colonne aumenta il rapporto si avvicina sempre più ad uno

Digressione sui fattoriali

Per ogni intero positivo "n" il simbolo "n!" indica il fattoriale di "n" cioè il prodotto dei primi "n" interi naturali.

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 * 2 * 3 * \dots * (n - 1) * n$$

Da notare che $n! = n * (n - 1)!$

Perché questa valga anche per n=1 si pone convenzionalmente

$$0! \equiv 1$$

Per avere un'idea della rapidità con cui cresce il fattoriale di un numero si consideri la seguente tabella:

n	n!	n	n!	n	n!
1	1	6	720	11	39,916,800
2	2	7	5,040	12	479,001,600
3	6	8	40,320	13	6,227,020,800
4	24	9	362,880	14	871,782,291,200
5	120	10	3,628,800	15	1,307,674,368,000

Permutazioni e Disposizioni S.R.

Tra permutazioni e disposizioni S.R. esiste un legame che torna molto utile

$$N! = [N * (N - 1) * (N - 2) * \dots * (N - n + 1)] * [(N - n) * (N - n - 1) * \dots * 2 * 1] = D_{SR}(N, n) * (N - n)!$$

il senso è che ogni disposizione S.R. di "N" oggetti presi "n" alla volta" può essere abbinata alla permutazione dei restanti (N-n) oggetti

il numero di disposizioni S.R. si può ricavare dal numero di permutazioni:

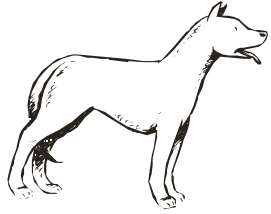
$$D_{SR}(N, n) = \frac{N!}{(N - n)!} = \frac{D_{SR}(N, N)}{D_{SR}(N - n, N - n)}$$

ESEMPLI:

$$D_{SR}(6, 3) = \frac{6!}{(6 - 3)!} = \frac{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{3 * 2 * 1} = \frac{6 * 5 * 4}{1} = 120$$

$$D_{SR}(7, 5) = \frac{7!}{(7 - 5)!} = \frac{7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{2 * 1} = \frac{7 * 6 * 5 * 4 * 3}{1} = 2520$$

Esempi



Alle corse dei cavalli o dei cani, una scommessa sulla *exacta* significa scegliere due dei concorrenti che arriveranno -nell'ordine- al primo e al secondo posto.

Si supponga che la corsa preveda 12 partecipanti. Quante alternative esistono?

$$\frac{12!}{10!} = 12 * 11 = 132$$

La giuria di un film-festival deve scegliere i primi tre classificati tra 18 opere concorrenti. Quante sono le possibili terne di finalisti?

$$\frac{18!}{15!} = 18 * 17 * 16 = 4896$$



Combinazioni

Un modo frequente di costruire "S" è la scelta in blocco di "n" oggetti tra "N" disponibili senza badare all'ordine (Combinazioni)

ESEMPIO:

$P=\{E, N, O, S\}$ che implica: $\{E,N\}, \{E,O\}, \{E,S\}, \{N,O\}, \{N,S\}, \{O,S\}$

Le scelte $\{O,S\}$ e $\{S,O\}$ coincidono e contano per una

Le disposizioni sarebbero : $D_{sr}(N, n) = N! / (N - n)!$

ma per ogni disposizione ve ne sono n! identiche che contano come se fossero una sola perciò:

$$C(N, n) = \frac{D_{sr}(N, n)}{n!} = \frac{N!}{(N - n)! n!} = \frac{N!}{n! (N - n)!}$$

Esempi

Da N persone si deve formare un comitato di n membri tra cui sarà nominato il presidente. Quante sono le opportunità di scelta se $N=15$ e $n=6$?

$$C(N, n) * C(n, 1) = \frac{N!}{(N - n)! n!} * \frac{n!}{1! (n - 1)!} = \frac{N!}{(N - n)! (n - 1)!}$$

prima si forma il comitato e poi, ad ogni comitato, si abbina la nomina del presidente:

Al superenalotto si vince indovinando 6 numeri sui 90 possibili in qualsiasi ordine si presentino. Le possibilità di uscita sono:

$$C(90, 6) = \frac{90!}{6! 84!} = \frac{90 * 86 * 88 * 87 * 86 * 85}{6 * 5 * 4 * 3 * 2} = 622' 614' 630$$

Esempio

Nel solito caso: $S = \{A, E, C, N\}$ consideriamo

Disposizioni senza ripetizione

$\{A, E\}$	$\{A, C\}$	$\{A, N\}$	$\{E, C\}$	$\{E, N\}$	$\{C, N\}$
$\{E, A\}$	$\{C, A\}$	$\{N, A\}$	$\{C, E\}$	$\{N, E\}$	$\{N, C\}$

Combinazioni: $\{A, E\} \{A, C\} \{A, N\} \{E, C\} \{E, N\} \{C, N\}$

$$C(4, 2) = \frac{4!}{2! (4 - 2)!} = \frac{4 * 3 * 2 * 1}{2 * 1 * 2 * 1} = 6$$

i coefficienti binomiali

il numero di combinazioni ha un altro simbolo:

$$C(N, n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

detto coefficiente binomiale.

Ecco alcune sue proprietà importanti

$$a) \binom{N}{N} = 1; \quad b) \binom{N}{0} = 1; \quad c) \binom{N}{n} = \binom{N}{N-n}$$

a) e b) affermano che c'è un solo modo di scegliere tutti gli elementi e c'è pure un solo modo di non scegliere alcun elemento: lasciare intatto l'insieme di base.

c) Discende dal fatto che ogni scelta di "n" implica una scelta di (N-n)

Coefficienti binomiali generalizzati.

La capacità di sintesi dell'espressione binomiale è tale da poter includere anche il caso di scelta non intero: ad esempio nella scelta tra "α" unità convenzionali espresse con frazioni

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\alpha+i-1}{i} \right)$$

Nulla impedisce di utilizzare la formula con un α negativo:

$$\binom{-\alpha}{n} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{-\alpha+i-1}{i} \right) = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)}{n!} = (-1)^n \binom{n+\alpha-1}{n}$$

A parte il fattore (-1)ⁿ è ancora possibile interpretare l'espressione come il conteggio delle alternative di scelta tra unità frazionarie.

Teorema del binomio

In molte occasioni ricorre la seguente uguaglianza:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Poichè $(a+b)^n = \overbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot \dots \cdot (a+b)}^{n \text{ volte}}$

il termine a^n non può che essere ottenuto prendendo il fattore "a" da tutti i binomi e questo può essere fatto in un solo modo $\binom{n}{0} = 1$

il successivo $a^{n-1}b$ si ottiene prendendo il fattore "a" in (n-1) binomi e "b" nel restante e ciò può farsi in $\binom{n}{1}$ modi diversi

il termine generico $a^{n-i}b^i$ può aversi scegliendo "a" in "(n-i)" binomi e "b" negli altri "i" e questo si farà in $\binom{n}{i}$ modi.

Esempio

In una città operano 4 medici specialisti: Rossi, Bianchi, Verdi, Neri.

Durante un'epidemia 12 ammalati cercano uno specialista.

Se ognuno di loro scegliesse a caso, qual'è la probabilità che i pazienti si distribuiscano equamente tra i medici?

Indichiamo con A_j la scelta del paziente cioè $A_j \in \{R, B, V, N\}$;

l'evento elementare è la scelta $\{A_1, A_2, \dots, A_{12}\}$ in cui ognuna ha 4 possibilità. I casi possibili sono pertanto 4^{12} e i casi favorevoli sono il numero di partizioni di 12 elementi in tre gruppi di 4.

$$\frac{\binom{12}{4, 4, 4}}{4^{12}} = \frac{12!}{(3!)^4 4^{12}} = 0.022$$

Permutazioni con ripetizione

Sono le permutazioni in cui uno o più oggetti sono uguali. E' chiaro che il loro numero è minore di quello ottenibile con oggetti diversi dato che alcune scelte sono identiche

Consideriamo l'aggettivo $CO_1MBI_1NATO_2RI_2O_3$ in cui sono numerate le ripetizioni

Se tutti gli elementi fossero distinti si avrebbero $12! = 479,001,600$ permutazioni

Tuttavia, permutazioni come $CO_1MBI_1NATO_2RI_2O_3$ e $CO_3MBI_2NATO_1RI_1O_2$ sono uguali anche se le lettere sono scambiate di posto.

Quanti sono gli scambi che producono uguali permutazioni? $2!=2$ per la "I" e $3!=6$ per la "O". Quindi le permutazioni effettivamente diverse sono:

$$\frac{479,001,600}{\frac{2}{6}} = 39,916,800$$

Esempio

Una nave deve inviare dei messaggi con bandiere di 3 colori diversi: Rosso, Giallo, Blu;

ogni messaggio è costituito da un allineamento di 12 bandiere:

R,R,R,G,G,G, B,B,B

potrebbe significare perdita di carburante.

Quanti sono i messaggi diversi?

$$P(3,3,3) = \frac{9!}{3!3!3!} = 1680$$



Permutazioni con ripetizione/2

Supponiamo che ogni oggetto si possa ripetere n_i volte

$$n_1, n_2, \dots, n_k \text{ con } n = \sum_{i=1}^k n_i$$

Se $n_i=1$ allora l'oggetto i non si ripete.

Il numero di permutazioni distinte è dato da

Coefficiente
Multinomiale

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Combinazione con ripetizione

ESEMPIO: $P=\{a, b, c, d, e\}$. Supponiamo che $n=3$. Le combinazioni S.R. sono

$$\begin{matrix} (a, b, c) & (a, b, d) & (a, b, e) \\ (a, c, d) & (a, c, e) & (a, d, e) \\ (b, c, d) & (b, c, e) & (b, d, e) \end{matrix} \quad (c, d, e)$$

Se possono ripetersi occorre aggiungere le terne in cui compaiono "a a" (4) e la terna "a a a" e questo anche per le altre unità. In tutto si arriva a $10 + 5 + 5 \cdot 4 = 35$

Sebbene non sia semplice dimostrarlo, il numero di combinazioni con ripetizione ha una formula semplice:

$$\binom{N+n-1}{n} = \frac{(N+n-1)!}{n!(N-1)!}$$

Esempio

La password di una rete è formata da 5 caratteri scelti tra le 26 lettere dell'alfabeto inglese e le 10 cifre arabe.

Le lettere possono ripetersi.

L'ordine non è influente.

Quante sono le possibili password?



$$\binom{36+5-1}{5} = \frac{36 * 37 * 38 * 39 * 40}{5!} = 658008$$



Lo schema ipergeometrico

Separazione di “N” oggetti in due gruppi

uno con N_1 elementi “speciali” perché hanno una certa proprietà

un altro di $(N-N_1)$ elementi “comuni” per i quali la proprietà non è vera.

L'esperimento consiste nella scelta casuale senza reimmissione di “n” elementi di cui n_1 speciali ed i restanti $(n-n_1)$ comuni.

Qual'è la probabilità che la scelta contenga proprio n_1 speciali?

La scelta di questi può avvenire in $C(N_1, n_1)$ modi diversi. Ognuna delle combinazioni di speciali può abbinarsi con le combinazioni di $(N-N_1)$ comuni presi a blocchi di $(n-n_1)$ e quindi i casi favorevoli sono:

$C(N_1, n_1) * C(N-N_1, n-n_1)$ con $C(N, n)$ casi possibili.

Quindi

$$P(n_1) = \frac{\binom{N_1}{n_1} \binom{N-N_1}{n-n_1}}{\binom{N}{n}}; \quad n_1 = 1, 2, \dots, n$$

Partizioni

Un'urna contiene “N” biglie di “m” colori diversi: $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$.

Dall'urna si scelgono “n” biglie. Quante sono le scelte che hanno r_1 del primo colore, r_2 del secondo e così via?

$$\prod_{i=1}^m \binom{n_i}{r_i} = \binom{n_1}{r_1} \binom{n_2}{r_2} \dots \binom{n_m}{r_m} = \frac{n_1! n_2! \dots n_m!}{r_1! r_2! \dots r_m!} \left[\frac{1}{(n_1 - r_1)! (n_2 - r_2)! \dots (n_m - r_m)!} \right]$$

ESEMPIO:

Un lotto da sottoporre ad ispezione contiene 20 prodotti di cui 14 buoni 4 mediocri e 2 difettosi. Se si scelgono 6 prodotti quante sono le possibilità che vi compaiano 2 mediocri e due difettosi?

$$\binom{20}{2} \binom{4}{3} \binom{2}{1} = \frac{20! 4! 2!}{2! 3! 1!} \frac{1}{17! 1! 1!} = 27\,360$$

Esercizio

Da una lista di N persone si deve formare un comitato di “n” membri tra cui sarà nominato un presidente. Quante sono le opportunità di scelta se $N=15$ e $n=6$?

$$C(N, n) * C(n, 1) = \frac{N!}{(N-n)! * n!} * \frac{n!}{1! * (n-1)!} = \frac{N!}{(N-n)! * (n-1)!}$$

prima si formare il comitato e poi, ad ogni comitato, si abbina la nomina del presidente:

Esempio

E' in corso il gioco delle coppie. I nomi di 6 ragazzi e di 6 ragazze sono scritti su dei bigliettini ben piegati e riposti in un cappello.

Dopo una energica mescolatura si scelgono a caso 4 biglietti ed i nomi di coloro che sono estratti dovranno organizzarsi in coppie, anche di membri dello stesso genere

1. Qual'è la probabilità che siano scelti due ragazze e due ragazzi?

$$P(D=2, U=2) = \frac{\binom{6}{2}\binom{6}{2}}{\binom{12}{4}} = 0.4546$$

2. Qual'è la probabilità che siano scelte più ragazze che ragazzi?

$$P(D > U) = P(D=3, U=1) + P(D=4, U=0) = \frac{\binom{6}{3}\binom{6}{1}}{\binom{12}{4}} + \frac{\binom{6}{4}\binom{6}{0}}{\binom{12}{4}} = 0.2727$$



Applicazioni

Calcolo combinatorio ed equiprobabilità sono al centro di gran parte delle applicazioni del nostro corso

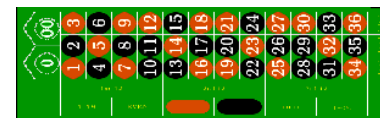
Poiché la formula per stabilire la probabilità di un evento composto è

$$P(E) = \frac{\text{Numero eventi elementari in } E}{\text{Numero di eventi nell'Universo degli eventi}}$$

Basterà conoscere quanti e quali sono gli eventi elementari pertinenti ad E per determinarne la probabilità

Esempio: Probabilità di un carré

$$P(E) = \frac{4}{36} \quad \text{ovvero } 1:8$$



Il famoso caso del Cavalier De Méré

Quale evento è più probabile

Ottenere almeno un "1" nel lancio di 4 dadi

Ottenere un doppio "1" in 24 lanci di 2 dadi?

Nel 1° i casi possibili sono $6^4=1'296$. Per i favorevoli definiamo prima

$A_i = \{\text{esce un 1 in } i \text{ dadi e non negli altri}\}$ la cui cardinalità è:

$$n(A_i) = \binom{4}{i} 5^i; \quad i = 1, 2, 3, 4$$

L'evento che interessa è $E = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

$$P(E) = \frac{500 + 150 + 20 + 1}{1'216} = \frac{621}{1216} = 0.5107$$

De Méré/2

Ottenere un doppio "1" in 24 lanci di 2 dadi?

i casi possibili sono 3624.

I casi sfavorevoli sono le serie di 24 lanci di due dadi in cui non si verifica un doppio "1" che ha cardinalità 3524 .

Se

$A_i = \{\text{escono due "1" nel lancio } i\text{-esimo}\}$

interessa

$$E = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_{24})$$

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914$$