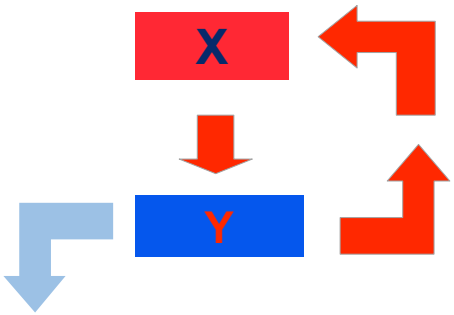
Studio delle relazioni statistiche (bivariate)



Problema_1: è possibile sapere che succede alla "Y" se varia la "X" (in modo spontaneo o indotto)?

Problema_2: si ritiene ci sia un legame tra la Y e la X. E' possibile dimostrare il contrario?

Dalla matrice dei dati alla tabella doppia

Operaio	Importo	Livello	Operaio	Importo	Livello	Operaio	Importo	Livello
1	133754	A	41	139637	B	81	156488	A
2	177321	D	42	196198	C	82	191405	A
3	198093	B	43	183375	B	83	117894	F
4	198951	F	44	148518	F	84	161926	A
5	128050	A	45	126191	B	85	102978	B
6	107152	B	46	148488	C	86	171470	A
7	168502	B	47	129230	B	87	131906	A
8	185872	C	48	193780	F	88	179658	C
9	174107	A	49	141154	B	89	146534	A
10	127670	F	50	100256	B	90	137011	B
11	171307	B	51	140573	A	91	112452	D
12	135016	A	52	191271	A	92	117509	A
13	116721	B	53	194093	B	93	185801	C
14	138590	E	54	109994	B	94	172984	A
15	122672	C	55	177444	A	95	103235	B
16	191676	D	56	100239	F	96	195622	B
17	174958	B	57	176015	B	97	127726	D
18	187423	D	58	170692	C	98	121094	A
19	111110	C	59	187677	E	99	193272	B
20	136503	E	60	199348	E	100	148265	B
21	120768	C	61	123781	B			
22	191648	D	62	179708	D			
23	101570	D	63	139825	A			
24	145044	A	64	148948	C			
25	102990	F	65	146901	D			
26	187028	E	66	136471	D			
27	124437	D	67	104697	A			
28	122079	C	68	152657	E			
29	163468	E	69	170503	B			
30	140935	A	70	135280	D			
31	146843	A	71	107743	B			
32	172497	C	72	171517	D			
33	122209	D	73	193946	C			
34	135783	D	74	170884	A			
35	150789	C	75	181407	B			
36	121587	A	76	124571	E			
37	133415	D	77	139906	A			
38	194731	F	78	142344	A			
39	176619	B	79	190776	A			
40	104960	A	80	141811	B			

Su n=100 operai è stato rilevato l'importo dello straordinario settimanale e la classe stipendiale.

In questa forma i dati non sono leggibili;

Organizziamo gli importi in classi:

Excel: Tabella pivot

Count of Operaio	Livello						
Imp.MGL	A	B	C	D	E	F	Grand Total
<120	3	7	1	2	0	3	16
120-140	8	5	3	7	3	1	27
140-160	7	3	3	1	1	1	16
>160	9	12	7	6	4	3	41
Grand Total	27	27	14	16	8	8	100

La tabella rivela che il 41% si colloca nella 4ª classe; che il 12% si trova nella combinazione (4,B) e che il livello "A" fa più straordinari (27%) rispetto a tutti gli altri.

Dipendenza statistica

Riguarda l'analisi della relazione tra due variabili

Se le variabili sono entrambe QUANTITATIVE lo studio dà origine alla analisi della CORRELAZIONE

Se almeno una delle due è QUALITATIVA è trattata come tale allora si parla di CONNESSIONE o ASSOCIAZIONE

Si parlerà di dipendenza statistica diversa da quella matematica se al modificarsi dell'una si modifica un aspetto della DISTRUBUIONE dell'altra

Trattazione generale

Partiamo dalla varaibile doppia: $(X_i, Y_i);\ i = 1,2,\ldots,n$

Supponiamo che siano state organizzate in una tabella con "r" modalità distinte per la variabile sulle righe (X) e "c" modalità per la variabile sulle colonne (Y)

	Y_1	Y_2	…	Y_c	
X_1	n_{11}	n_{12}		n_{1c}	$n_{1\cdot}$
X_2	n_{21}	n_{22}		n_{2c}	$n_{2\cdot}$
M					
X_r	n_{r1}	n_{r2}		n_{rc}	$n_{r\cdot}$
	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	…	$n_{\cdot c}$	n

Dove

$$n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{c} n_{ij} = n_{i1} + n_{i2} + \ldots + n_{ic} = totale\ \ di\ \ riga$$

$$n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij} = n_{j1} + n_{j2} + \ldots + n_{rj} = totale\ \ di\ \ colonna$$

$$n = \sum_{i=1}^{r} n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{c} n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} n_{ij}$$

il punto indica l'indice rispetto a cui si è sommato

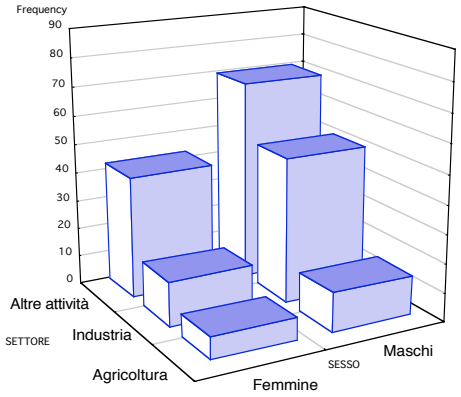
Esempio

Occupati per settori di attività economica (media annua). Dati in migliaia

	Sesso		
Settori	Maschi	Femmine	Totale
Agricoltura	1.485	812	2.297
Industria	5.270	1.626	6.896
Terziario	7.232	4.318	11.550
Totale	13.987	6.756	20.743

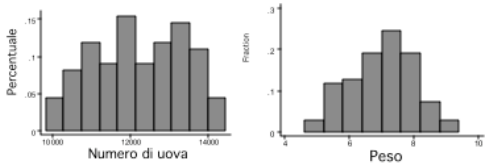
r=3; c=2; n=20'743

La diversa struttura delle due componenti è evidente dal grafico

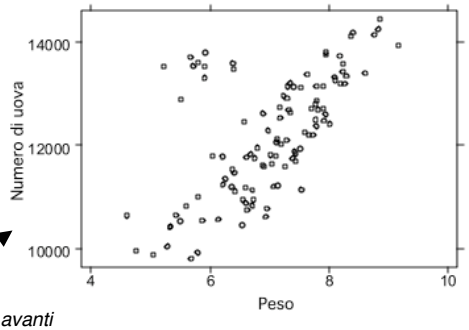


Effetti della multidimensionalità

La presentazione congiunta delle due variabili rivela aspetti che rimangono oscurati nella rappresentazione separata dei due aspetti.



Lo scatterplot indica la presenza di un gruppo di soggetti (in alto a sinistra) diversi dal resto.



Ripreso più avanti

Distribuzione congiunta di due variabili

Anche nella tabella doppia possiamo usare le frequenze relative:

	Y_1	Y_2	…	Y_c	
X_1	f_{11}	f_{12}		f_{1c}	$f_{1.}$
X_2	f_{21}	f_{22}		f_{2c}	$f_{2.}$
:					
X_r	f_{r1}	f_{r2}		f_{rc}	$f_{r.}$
	$f_{.1}$	$f_{.2}$	…	$f_{.c}$	1

$$0 \le f_{ij} \le 1$$

$$f_{i.} = \sum_{j=1}^{c} f_{ij}$$

$$f_{.j} = \sum_{i=1}^{r} f_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} f_{ij} = 1$$

Le f_{ij} sono dette frequenze relative congiunte;

Le "$f_{i.}$" e le "$f_{.j}$" sono le frequenze relative marginali.

L'insieme delle coppie (X_i, Y_i) e delle rispettive frequenze relative f_{ij} costituisce la distribuzione congiunta delle variabili X ed Y;

Essa associa ad ogni combinazione di modalità (X_i,Y_j) un numero in (0,1) e la cui somma è pari ad uno

Distribuzioni marginali

A partire dalla distribuzione congiunta si definiscono le distribuzioni per ciascuna delle variabili a prescindere dall'altra

$$f(X = x_i) = \sum_{j=1}^{c} f(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^{c} f_{ij} = f_{i.};\ i = 1,2,\ldots,r$$

$$f(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{r} f(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^{r} f_{ij} = f_{.j};\ j = 1,2,\ldots,c$$

Per ottenere la distribuzione marginale si somma rispetto alla variabile che NON interessa

Distribuzioni condizionate

Per studiare il comportamento della "Y" rispetto alla "X" dividiamo la distribuzione Congiunta in tante sottodistribuzioni

La distribuzione della Y CONDIZIONATA (PARZIALE) dal fatto che "X" è ad un dato livello è

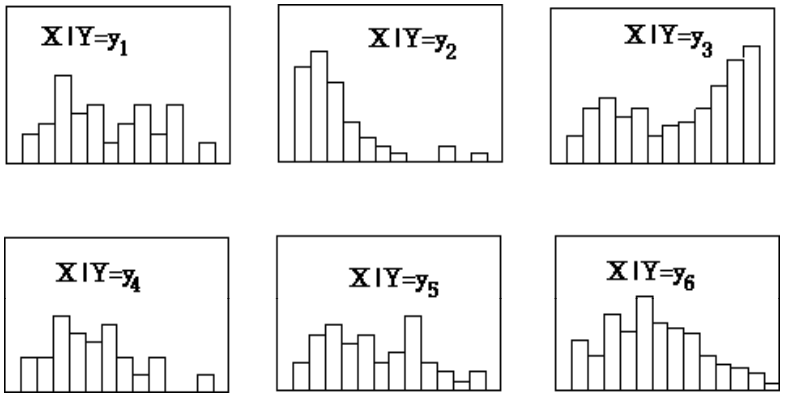
$$f\left(Y = y_j \middle| X = x_i\right) = \frac{f\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{f\left(Y = y_j\right)}; \quad j = 1,2,\ldots,c$$

cioè un riscalamento pro-quota delle righe della tabella per assicurare la somma unitaria

Analogamente, la distribuzione della X dato che Y è ad un livello prefissato è:

$$f\left(X = x_i \middle| Y = y_j\right) = \frac{f\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{f\left(X = x_i\right)}; \quad i = 1,2,\ldots,r$$

Multiplot



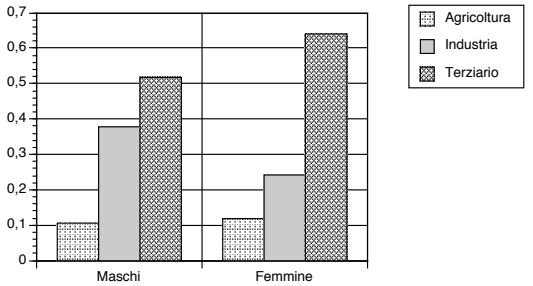
Per ogni modalità della Y è rappresentato il corrispondente l'istogramma della X CONDIZIONATO ai vari valori della Y

Ovviamente il ruolo delle variabili può essere scambiato

Esempio

Distribuzione congiunta

		Sesso	
Settori	Maschi	Femmine	Totale
Agricoltura	7,16%	3,91%	11,07%
Industria	25,41%	7,84%	33,24%
Terziario	34,86%	20,82%	55,68%
Totale	67,43%	32,57%	100,00%



Distribuzione marginale Donne

Settori	Femmine
Agricoltura	12,02%
Industria	24,07%
Terziario	63,91%
Totale	100,00%

Distribuzione marginale maschi

Settori	Maschi
Agricoltura	10,62%
Industria	37,68%
Terziario	51,71%
Totale	100,00%

Studio congiunto o separato

Perché abbia senso lo studio CONGIUNTO esso deve essere più informativo dello studio SEPARATO delle due componenti

Se la "X" assume valori in relazione ad eventi indipendenti da quelli che generano i valori della "Y" non esiste alcun legame statistico interessante

ESEMPIO

Lancio di due dadi di diverso colore
X: punteggio del dado rosso;
Y: punteggio del dado blù;

Sapere che lanciando i due dadi, X= 4 e, contemporaneamente, Y= 3 è come sapere che X=4 (ignorando "Y") e che Y=3 (ignorando "X")

Indipendenza in distribuzione

Se la condizionata di YIX non cambia al variare di X allora Y è INDIPENDENTE IN DISTRIBUZIONE da X.

$$f\left(X = x_i, \middle| Y = y_j\right) = f(X_i); \quad i = 1,2,\ldots,r; \quad j = 1,2,\ldots,c$$

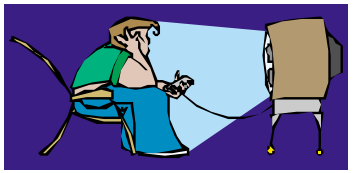
L'indipendenza è una relazione simmetria: Se X è indipendente da Y anche Y è indipendente da X

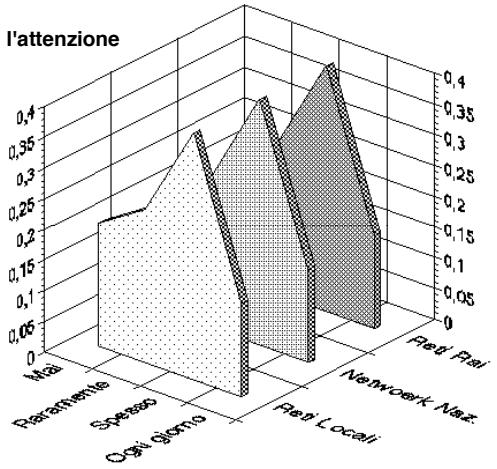
Se fra le due variabili c'è indipendenza, le frequenze assolute sono pari al prodotto delle frequenze marginali diviso per il totale frequenze:

$$f\left(X = x_i, \middle| Y = y_j\right) = f(X_i) \Rightarrow \frac{n_{ij}}{n_{.j}} = \frac{n_{i.}}{n} \Rightarrow \quad n_{ij} = \frac{n_{i.} * n_{.j}}{n} \quad = \frac{\left(\frac{n_{i.}}{n}\right)\left(\frac{n_{.j}}{n}\right)}{1} = f_{i.} * f_{.j}$$

Rappresentazione grafica

Campione di famiglie classificato per l'attenzione ai programmi televisivi





Indipendenza significa che si guardano con la stessa frequenza tutti i network ovvero la frequenza con cui si guarda la TV prescinde dal network

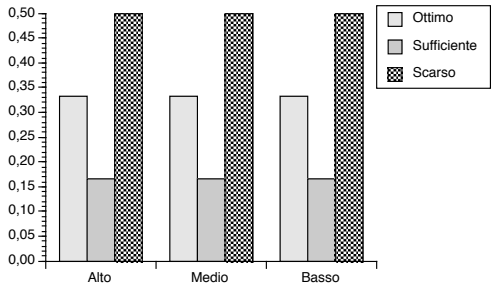
Esempio

Reddito familiare e rendimento scolastico

Rendimento	Alto	Medio	Basso	Totale
Ottimo	16	32	40	88
Sufficiente	8	16	20	44
Scarso	24	48	60	132
Totale	48	96	120	264

	Reddito familiare			
Rendimento	Alto	Medio	Basso	Totale
Ottimo	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333
Sufficiente	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667
Scarso	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
Totale	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Le frequenze assolute sono diverse, ma quelle relative coincidono per ogni distribuzione condizionata del rendimento.



Verifica:

$$40 = \frac{88 * 120}{264}; \; 16 = \frac{44 * 96}{264}$$

Conseguenza della definizione

Se fra le due variabili c'è indipendenza, la frequenze congiunta è pari al prodotto delle frequenze marginali diviso per il totale frequenze:

$$f\left(X = x_i, \middle| Y = y_j\right) = f(X_i) \Rightarrow \frac{n_{ij}}{n_{.j}} = \frac{n_{i.}}{n} \Rightarrow \quad n_{ij} = \frac{n_{i.} * n_{.j}}{n}$$

$$f_{ij} = \frac{\left(\frac{n_{i.}}{n}\right)\left(\frac{n_{.j}}{n}\right)}{1} = f_{i.} * f_{.j}$$

Questa relazione costituisce una definizione alternativa della relazione di indipendenza

Solo in caso di indipendenza statistica la frequenza congiunta è ricavabile dalla conoscenza delle frequenze marginali (è pari al loro prodotto)

Esempio

Verificare se fra Y ed X c'è indipendenza

	Y1	Y2	Y3	
X1	3	9	18	30
X2	2	6	12	20
X3	5	15	30	50
	10	30	60	100

$$n_{11} = \frac{n_{1.} * n_{.1}}{n} = \frac{30 * 10}{100} = 3$$

$$n_{21} = \frac{n_{2.} * n_{.1}}{n} = \frac{20 * 10}{100} = 2$$

$$n_{31} = \frac{n_{3.} * n_{.1}}{n} = \frac{50 * 10}{100} = 5$$

$$n_{13} = \frac{n_{1.} * n_{.3}}{n} = \frac{30 * 60}{100} = 18$$

$$n_{33} = \frac{n_{3.} * n_{.3}}{n} = \frac{50 * 60}{100} = 30$$

$$n_{12} = \frac{n_{1.} * n_{.2}}{n} = \frac{30 * 30}{100} = 9$$

$$n_{22} = \frac{n_{2.} * n_{.2}}{n} = \frac{20 * 30}{100} = 6$$

$$n_{32} = \frac{n_{3.} * n_{.2}}{n} = \frac{50 * 30}{100} = 15$$

$$n_{23} = \frac{n_{2.} * n_{.3}}{n} = \frac{20 * 60}{100} = 12$$

Le frequenze riportate sono identiche a quelle ottenibili in caso di indipendenza

Osservazioni

La condizione di indipendenza è molto stringente: è sufficiente che si verifichi discrasia in una sola celle (ad esempio uno zero) perché ci sia dipendenza.

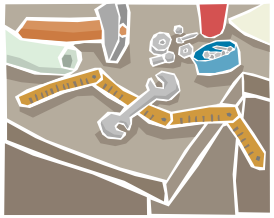
Infatti, è difficile trovare casi in cui si sia perfetta indipendenza, anche per variabili molto remote e logicamente non collegate

Ne consegue che nel valutare il grado di dipendenza dovremo guardarci dai disturbi dovuti a

Errori di misurazione

Fluttuazioni campionarie

e che non dipende da un nesso di causalità.



Le contingenze

La misura del grado di dipendenza si basa sullo scarto tra frequenza osservata in una cella e la frequenza teorica che si osserverebbe se fra le variabili ci fosse perfetta indipendenza

$$c_{ij} = n_{ij} - n'_{ij} \quad \text{dove} \quad n'_{ij} = \frac{n_{i.} * n_{.j}}{n}$$

che è detta CONTINGENZA (assoluta o relativa secondo le frequenze utilizzate)

In caso di indipendenza le contingenze sono tutte nulle per cui se si ha

$c_{ij} > 0$ **nella cella "i,j" si riscontra un addensamento di frequenze rispetto alla situazione di indipendenza dei due fenomeni.**

$c_{ij} < 0$ **nella cella "i,j" si riscontra una rarefazione di frequenze rispetto alla situazione di indipendenza dei due fenomeni.**

Esempio

Pazienti classificati per durata dello stato febbrile e per il tipo di trattamento subito

Frequenze osservate

	Durata della febbre (in gg)				
Trattam.	1-4	5-6	7-8	9-12	
A	45	27	20	12	104
B	25	10	9	10	54
C	56	47	30	18	151
	126	84	59	40	309

concidono i totali di colonna

concidono i totali di riga

Frequenze teoriche

	Durata della febbre (in gg)				
Trattam.	1-4	5-6	7-8	9-12	
A	42.41	28.27	19.86	13.46	104.00
B	22.02	14.68	10.31	6.99	54.00
C	61.57	41.05	28.83	19.55	151.00
	126.00	84.00	59.00	40.00	309.00

Esempio (continua)

Tabella delle contingenze

Trattam.	Durata della febbre (in gg) 1-4	5-6	7-8	9-12	
A	2.59	-1.27	0.14	-1.46	0.00
B	2.98	-4.68	-1.31	3.01	0.00
C	-5.57	5.95	1.17	-1.55	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

La somma per colonne delle contingenze è sempre nulla

La somma per righe delle contingenze è sempre nulla

Massimo scostamento negativo

Massimo scostamento positivo

Proprietà della tabella di contingenza

PROPRIETA': La somma delle contingenze di riga o di colonna è pari a zero.

Dimostrazione per le contingenze di riga

$$\sum_{i=1}^{r} c_{ij} = \sum_{i=1}^{r}\left(n_{ij} - \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}\right) = \sum_{i=1}^{r} n_{ij} - \sum_{i=1}^{r}\frac{n_{i.}n_{.j}}{n} = n_{.j} - \frac{n_{.j}}{n}\sum_{i=1}^{r} n_{i.} = n_{.j} - n_{.j} = 0$$

Dimostrazione per le contingenze di colonna

$$\sum_{i=1}^{r} c_{ij} = \sum_{j=1}^{c}\left(n_{ij} - \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}\right) = \sum_{j=1}^{c} n_{ij} - \sum_{j=1}^{c}\frac{n_{i.}n_{.j}}{n} = n_{i.} - \frac{n_{i.}}{n}\sum_{j=1}^{j} n_{.j} = n_{i.} - n_{i.} = 0$$

Connessione tra variabili

In questo ambito gli eventuali legami di dipendenza si riflettono esclusivamente nella classificazione delle unità.

Se si scambiano tra di loro le riche o le colonne, l'associazione non cambia

Una variabile è connessa ad un'altra se, al modificarsi delle sue modalità, cambia la proporzione con cui si verificano le modalità di quella condizionata.

La difformità della o delle parziali rispetto alla marginale può verificarsi per una sola modalità o per tutte; può inoltre essere di poco conto oppure di grande entità.

Esiste una gradualità della connessione che procede da un minimo (la condizione di indipendenza) ad un massimo.

Esempio

Un'impresa commercializza 4 bibite tipo cola in diverse aree geografiche

		Prodotto			
Area	**Moka-Cola**	**Neocafé**	**Arabeira**	**Decaf**	**Totale**
Sud	*72*	*8*	*12*	*23*	*115*
Nord	*7*	*10*	*14*	*19*	*50*
Centro	*26*	*10*	*16*	*33*	*85*
Totale	*105*	*28*	*42*	*75*	*250*

L'ufficio marketing si domanda se c'è un legame tra il tipo consumato e l'area di residenza del consumatore.

La tabella classifica le unità di assaggio - simultaneamente- per regione e per prodotto preferito.

La risposta deve essere data usando in modo efficace le informazioni così raccolte

Connessione massima

Tra Y ed X esiste la massima connessione se nota una qualsiasi modalità di X è univocamente determinata la modalità di Y ad essa corrispondente

Se la tabella è rettangolare non è possibile la reciprocità della <u>dipendenza massima</u>

r < s

	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	7	0	3	14	24
x_2	0	4	0	0	4
	7	4	3	14	28

Se si fissa la Y, diciamo al livello y_2, la modalità di X è necessariamente x_2. Ogni volta che si sceglie Y risulta subito scelta anche X. Il contrario non è vero.

r > s

	y_1	y_2	y_3	
x_1	6	0	0	6
x_2	0	0	9	9
x_3	0	4	0	4
x_4	2	0	0	2
	8	4	9	21

Analoga situazione, ma con ruoli invertiti. Una volta scelta X risulta automaticamente scelta anche Y, ma non viceversa.

Misure sintetiche della Connessione

La contingenza è un indicatore, in valore ed in segno, dello scostamento tra le frequenze osservate e quelle attese nel caso di indipendenza delle due variabili.

Possiamo considerare i rapporti di contingenza

$$\delta_{ij} = \frac{\left(f_{ij} - f_{ij}^{'}\right)}{f_{ij}^{'}} = \frac{\frac{n_{ij}}{n} - \frac{n_{i.}n_{.j}}{n^2}}{\frac{n_{i.}n_{.j}}{n^2}} = \frac{n_{ij} - \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}}{\frac{n_{i.}n_{.j}}{n}}$$

che misurano lo scarto percentuale delle frequenze (assolute o relative) osservate rispetto alle teoriche

Per misurare il grado di connessione useremo medie aritmetiche dei rapporti di contingenza.

Statistica del Mortara

E' una media ponderata dei rapporti di contingenza presi in valore assoluto

$$M = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left|\frac{f_{ij} - f_{i.}f_{.j}}{f_{i.}f_{.j}}\right| f_{i.}f_{.j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left|C_{ij}\right|$$

e corrisponde alla media aritmetica semplice delle contingenze in valore assoluto

L'indice del Mortara è normalizzato: 0≤M≤2.

$$M = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left|\frac{f_{ij} - f_{i.}f_{.j}}{f_{i.}f_{.j}}\right| f_{i.}f_{.j} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left|f_{ij} - f_{i.}f_{.j}\right| \le \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left|f_{ij} + f_{i.}f_{.j}\right| \le \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{i.}f_{.j} = 2$$

Ha valore nullo se e solo se le contingenze sono tutte nulle ovvero se c'è perfetta indipendenza.

Ha valore massimo in caso di perfetta dipendenza (che di solito è <2)

Esempio di calcolo di M

	Y1	Y2	Y3	Y4	
X1	8	2	10	10	30
X2	5	4	6	5	20
	13	6	16	15	50

Frequenze attese in caso di indipendenza

	Y1	Y2	Y3	Y4	
X1	2.6	3.6	9.6	9.0	30
X2	5.2	2.4	6.4	6.0	20
	13.0	6.0	16.0	15.0	50

Valore assoluto delle contingenze

	Y1	Y2	Y3	Y4	
X1	5.4	1.6	0.4	1.0	8.4
X2	0.2	1.6	0.4	1.0	3.2
	5.6	3.2	0.8	2.0	11.6

$$M = \frac{11.6}{50} = 0.232$$

Statistica $\chi 2$ (chi quadrato)

Questo indice si basa sulla media ponderata dei rapporti di contingenza al quadrato

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{f_{ij} - f_{i.}f_{.j}}{f_{i.}f_{.j}}\right)^2 f_{i.}f_{.j} = \left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{f_{ij}^2}{f_{i.}f_{.j}}\right)\right] - 1 = n\left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{n_{ij}^2}{n_{i.}n_{.j}}\right) - 1\right]$$

Il chi-quadro è nullo se e solo se c'è perfetta indipendenza tra le due variabili.

Aumenta se aumenta la differenza tra frequenze teoriche ed osservate.

L'indice, per come è definito, può un valore valori arbitrariamente grandi.

Valori estremi del $\chi 2$

Se le variabili fossero indipendenti allora $f_{ij}=(f_{i.})(f_{.j})$ e quindi

$$\chi^2 = \left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{f_{ij}^2}{f_{i.}f_{.j}}\right)\right] - 1 = \left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{(f_{i.}f_{.j})^2}{f_{i.}f_{.j}}\right)\right] - 1 = \left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{i.}f_{.j}\right] - 1$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{r} f_{i.}\right)\left(\sum_{j=1}^{s} f_{.j}\right) - 1 = (1)(1) - 1 = 0$$

In caso di perfetta dipendenza sarebbero nulle tutte le celle fuori diagonale.

$$\chi^2 = n\begin{cases} \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{n_{ii}^2}{n_{i.}n_{.i}}\right) + \sum_{j=r+1}^{s}\left(\frac{n_{(j-r)j}^2}{n_{(j-r).}n_{.j}}\right) - 1 \quad se \quad r \le s \\ \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{n_{jj}^2}{n_{j.}n_{.j}}\right) + \sum_{i=s+1}^{r}\left(\frac{n_{i(i-s)}^2}{n_{i.}n_{.(i-s)}}\right) - 1 \quad se \quad r \ge s \end{cases}$$

Il massimo cambia da tabella a tabella.

Esempio

Produzione di palloni di cuoio. Per il controllo della qualità i prodotti sono classificati rispetto a: X=pressione interna e Y=superficie esterna.

Y/X	Rifiutati	Imperfetti	Standard	
Rifiutati	12	23	89	124
Imperfetti	8	12	62	82
Standard	21	30	119	170
	41	65	270	376

Y/X	R.	I.	S.	
R.	$\frac{14=124*41}{376}$	21	89	124
I.	9	14	59	82
S.	18	30	122	170
	41	65	270	376

$$\chi^2_{oss} = \frac{(12-14)^2}{14} + \frac{(23-21)^2}{21} + \ldots + \frac{(119-122)^2}{122} = 1.599$$

Il valore dell'indice sembra basso, ma è abbastanza basso?

Esempio

Un'indagine ha classificato i ridenditori di hardware di una regione secondo il tipo di società ed il tipo di collocazione

	Tipologia società			
Negozio	Persone	Cooperativa	Impresa	Totale
Autonomo	34	16	4	54
Supermercato	4	2	3	9
Misto proprio	17	21	32	70
Misto altri	13	5	6	24
Totale	68	44	45	157

$$M = \frac{55.8471}{157} = 0.3557, \quad \chi^2 = 1.1771$$

Dovremo ricorrere all'inferenza statistica per stabilire se ci troviamo di fronte ad una associazione significativa

Esercizio (Excel)

Indagine sulla mobilità di voto. Uso dello strumento PivotTable

Soggetto	Ha votato	Voterà			
Adua	Centro	Destra	Iris	Centro	Centro
Aida	Sinistra	Sinistra	Irma	Destra	Destra
Alda	Destra	Destra	Jula	Sinistra	Centro
Alea	Centro	Centro	Kara	Sinistra	Destra
Alfa	Destra	Centro	Lara	Destra	Sinistra
Anna	Sinistra	Sinistra	Leda	Centro	Centro
Asia	Centro	Destra	Lena	Sinistra	Sinistra
Atte	Sinistra	Centro	Lisa	Centro	Centro
Beba	Sinistra	Sinistra	Lory	Sinistra	Centro
Bice	Centro	Destra	Mara	Centro	Destra
Cira	Centro	Sinistra	Mena	Centro	Sinistra
Cleo	Destra	Destra	Mina	Sinistra	Sinistra
Cora	Sinistra	Destra	Mira	Sinistra	Sinistra
Demi	Centro	Destra	Olga	Centro	Destra
Dina	Centro	Centro	Pina	Centro	Centro
Dora	Destra	Destra	Rina	Destra	Centro
Edda	Centro	Destra	Rita	Destra	Destra
Elsa	Destra	Sinistra	Rosa	Sinistra	Sinistra
Emma	Sinistra	Sinistra	Sara	Destra	Destra
Enza	Centro	Destra	Teti	Centro	Destra
Etta	Centro	Centro	Tina	Sinistra	Sinistra
Fede	Destra	Destra	Vega	Sinistra	Sinistra
Gina	Sinistra	Centro	Vera	Centro	Destra
Gisa	Centro	Destra	Zita	Destra	Destra
Ines	Destra	Destra	Zora	Centro	Centro

Count	Voterà			
Ha votato	Centro	Destra	Sinistra	Totale
Centro	8	11	2	21
Destra	2	9	2	13
Sinistra	4	2	10	16
Totale	14	22	14	50

	5.88	9.24	5.88	21 =I3*$F$6/$I$6
	3.64	5.72	3.64	13
	4.48	7.04	4.48	16
	14	22	14	50
	0.764	0.335	2.560	3.660 =(F3-F8)^2/F8
	0.739	1.881	0.739	3.359
	0.051	3.608	6.801	10.461
	C hi-quadrato			17.480
			Gdl	4 =(3-1)(3-1)
			p-Value	0.0016 =Distrib.Chi(I16;I17)

Chiarite più avanti

Rapporto di verosimiglianza

Sono coinvolti i logaritmi naturali delle frequenze osservate e teoriche

$$G^2 = 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} n_{ij} Log\left(\frac{n_{ij}}{n_{ij}'}\right)$$

Il G-quadro è nullo se e solo se c'è perfetta indipendenza tra le due variabili.

Aumenta se aumenta la differenza tra frequenze teoriche ed osservate.

L'indice, per come è definito, può un valore valori arbitrariamente grandi.

Esempio

		Otite			
		Peggio	Uguale	Meglio	
Brochite	Peggio	13	5	6	24
	Uguale	1	19	4	24
	Meglio	4	0	8	12
		18	24	18	60

		Otite			
		Peggio	Uguale	Meglio	
Brochite	Peggio	7,2	9,6	7,2	24
	Uguale	7,2	9,6	7,2	24
	Meglio	3,6	4,8	3,6	12
		18	24	18	60

		Otite			
		Peggio	Uguale	Meglio	
Brochite	Peggio	7,6813	-3,2616	-1,0939	3,3257
	Uguale	-1,9741	12,9708	-2,3511	8,6456
	Meglio	0,4214	0,0000	6,3881	6,8095
					37,5617

Rilevazione dell'effetto di un antibiotico su pazienti affetti sia da bronchite che da otite dell'orecchio medio

Il valore dell'indice sembra elevato, ma lo è abbastanza per concludere sul doppio spettro del farmaco?

Esercizio

Una ricerca sulla disponibilità ad andare in vacanza da sole per un campione di donne ha prodotto i seguenti risultati

	Certo che no	Forse no	Non sa	Forse si	Certo che si	**Totale**
Laureata	52	79	124	342	226	**823**
Semilaureata	62	153	136	417	262	**1030**
Diplomata	53	213	184	629	375	**1454**
Scuola sup.	54	231	221	571	244	**1321**
Lic.Media	43	175	319	439	190	**1166**
	264	**851**	**984**	**2398**	**1297**	**5794**

Calcolare il Mortara, il χ^2 ed il rapporto di verosimiglianza.

Analisi della media

Questo tipo di studio si attiva se una delle variabili è metrica ed un'altra è qualitativa oppure quantitativa, ma con modalità non metriche

Costo di un appartamento e zona di residenza

Quantità di principio attivo e stadio della malattia

Si parlerà di dipendenza o indipendenza in media facendo riferimento a modifiche più o meno rilevanti della media di una variabile se l'altra subisce delle variazioni (indotte o spontanee)

Valore atteso della marginale

Le distribuzioni marginali sono delle vere e proprie distribuzioni univariate.

In particolare, ci interessa il valore atteso (o media aritmetica) della variabile metrica. Supponiamo sia la "Y"

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{c} Y_j f_{.j} = \mu_y$$

Esempio

Y/X	A	B	C	
1	$4/20$	$2/20$	$4/20$	$10/20$
3	$4/20$	$1/20$	$5/20$	$10/20$
	$8/20$	$3/20$	$9/20$	1

$$\mu_y = 1\left(\frac{10}{20}\right) + 3\left(\frac{10}{20}\right) = \frac{40}{20} = 2$$

La scala della "X" è tale da non consentire il calcolo logico della media aritmetica

Valore atteso delle condizionate

Anche le distribuzioni condizonate sono delle distribuzioni univariate.

Per calcolare il valore atteso della variabile metrica, fissata la modalità della variabile di controllo, abbiamo

$$E(Y|X = x_i) = \sum_{j=1}^{c} Y_j \frac{f_{ij}}{f_{i.}} = \mu_y(x_i)$$

Esempio

C'è una media di Y per ogni fissata X

Y/X	A	B	C	
1	$4/20$	$2/20$	$4/20$	$10/20$
3	$4/20$	$1/20$	$5/20$	$10/20$
	$8/20$	$3/20$	$9/20$	1

$$\mu_y(A) = 1\left(\frac{4}{8}\right) + 3\left(\frac{4}{8}\right) = \frac{20}{8} = 2.5$$

$$\mu_y(B) = 1\left(\frac{2}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3} = 0.667$$

$$\mu_y(C) = 1\left(\frac{4}{9}\right) + 3\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{24}{9} = 2.667$$

Relazione tra i valori attesi

Al variare della variabile condizionante la condizionata assume un certo valore atteso. Quindi

$$E(Y|X) = funzione(x)$$

Il valor atteso della Y è una funzione delle modalità della X.

Qual'è la media della Y se vogliamo prescindere dai valori della X?

$$\sum_{i=1}^{r} E(Y|X = x_i) * f_{i.} = \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{c} Y_j \frac{f_{ij}}{f_{i.}}\right) * f_{i.} = \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{c} Y_j f_{ij}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{c} Y_j\left(\sum_{j=1}^{c} f_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{c} Y_j f_{.j} = E(Y)$$

La marginale dellla Y coincide con la media ponderata delle medie parziali della stessa Y.

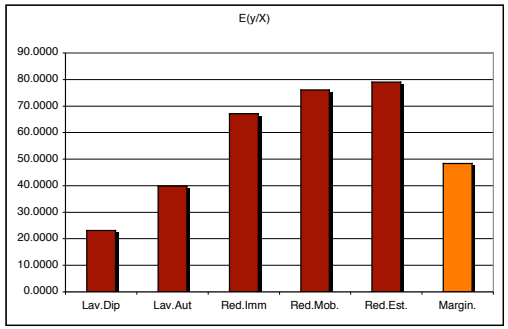
Esempio

Campione di contribuenti classificato per livello di reddito e tipologia di reddito.

Calcolo di medie condizionate e media marginale

	Yi <18	18-24	24-32	32-48	49-81	>81	
	Ci 12	20	29	50	70	100	Totale
Lav.Dip	140	120	20	18	12	10	320
Lav.Aut	90	75	60	55	50	43	373
Red.Imm	5	12	19	26	35	58	155
Red.Mob.	2	3	11	27	56	78	177
Red.Est.	0	1	6	16	34	54	111
	249	231	145	192	257	343	1136

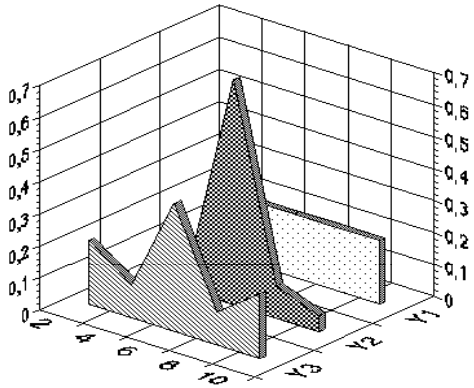
Categ.	E(y/X)	fx	E(yIX)*fx
Lav.Dip	23.1250	320	7400
Lav.Aut	39.8660	373	14870
Red.Imm	67.1032	155	10401
Red.Mob.	76.1186	177	13473
Red.Est.	79.0450	111	8774
Margin.		1136	48.3433



Indipendenza in media

Una variabile è indipendente in media da un'altra se le sue medie condizionali sono tutte uguali alla media marginale.

In questo caso non ci interessa se al variare di un carattere si modifichi o resti constante l'intera distribuzione. La nostra attenzione è limitata alla media.



Tre diverse distribuzioni parziali che hanno la stessa media

	Y1	Y2	Y3
2	0,20	0.00	0.20
4	0.20	0.15	0.10
6	0.20	0.70	0.40
8	0.20	0.15	0.10
10	0.20	0.00	0.20
	1.00	1.00	1.00

l'indipendenza in media non implica l'indipendenza distributiva

Considerazioni aggiuntive

1) L'indipendenza in media non necessariamente è simmetrica, cioè se la "Y" è indipendente in media dalla "X" nulla si può affermare sulla dipendenza in media della X rispetto alla Y

2) L'indipendenza in distribuzione implica l'indipendenza in media ovvero se fra la "Y" e la "X" si riscontra indipendenza assoluta allora ci sarà anche indipendenza in media.

3) L'indipendenza in media non può implicare l'indipendenza assoluta dato che lo stessa media può essere associata a distribuzioni molto diverse per altri aspetti

Sintesi delle medie condizionali

Le medie condizionali "Y/x_i" e le frequenze marginali $f_{i.}$ formano una distribuzione di frequenza:

Modalità	*Frequenza*
$\mu_y(x_1)$	$f_{1.}$
$\mu_y(x_2)$	$f_{2.}$
…	…
$\mu_y(x_i)$	$f_{i.}$
…	…
$\mu_y(x_r)$	$f_{r.}$
	1

Per la quale possiamo calcolare gli usuali indicatori di sintesi: media e varianza in particolare.

$$E\left[\mu_Y(X)\right] = \mu_Y$$

Ad esempio la media di questa distribuzione è data dalla media della marginale della Y che non dipende più dalla X.

Varianza delle medie condizionali

$$Var\Big[E(y|X)\Big] = \sum_{i=1}^{r}\Big[\mu_y(x_i) - \mu_y\Big]^2 f_{i.}$$

Esprime il valore medio dello scarto al quadrato tra le medie condizionali e quella marginale.

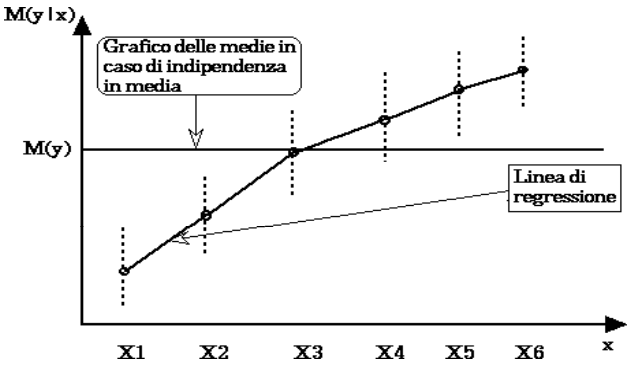
Misura la distanza tra le medie condizionali osservate ed il valore (costante) che esse avrebbero in caso di indipendenza in media

La varianza delle medie condizionali è nulla se fra i caratteri c'è indipendenza in distribuzione. Infatti si ha

$$\mu_y(x_i) - \mu_y = 0 \quad per \;\; i = 1,2,\ldots,r$$

Rappresentazione grafica

Questo tipo di grafico può subito suggerire l'esistenza o meno della dipendenza in media tra le due variabili



Ancora sul valore atteso condizionale

il valore atteso della distribuzione condizionale è in genere funzione della variabile che condiziona.

$$P(X_1,X_2) = \frac{X_1+2X_2}{18}; \quad \text{per} \;\; X_1,X_2 = 1,2. \qquad \textbf{con} \qquad P(X_1) = \frac{2X_1+6}{18} \quad \text{per} \;\; X_1 = 1,2;$$

Ne consegue che $$P(X_2|X_1) = \frac{P(X_1,X_2)}{P(X_1)} = \frac{\frac{X_1+2X_2}{18}}{\frac{2X_1+6}{18}} = \frac{X_1+2X_2}{2X_1+6}$$

Vediamo il valore atteso delle distribuzioni condizionali

$$E(X_2|X_1) = \sum_{X_2=1}^{2} X_2 * \frac{X_1+2X_2}{2X_1+6} = \frac{X_1+1}{2X_1+6} + \frac{2X_1+4}{2X_1+6} = \frac{3X_1+5}{2X_1+6}$$

Che, come si vede, è funzione del valore di X_1: cambiando quest'ultimo si altera la distribuzione condizionale e perciò dovrebbe cambiarne il valore atteso.

Se questo non succede c'è INDIPENDENZA IN MEDIA.

Misura della dipendenza in media

La misura più ovvia è la VARIANZA delle medie parziali.

Si annulla solo nel caso di indipendenza in media ed aumenta all'aumentare del grado di dipendenza in media.

E' massima se fissata una qualunque della condizionante si può risalire con certezza alla media della condizionata.

Questo succede solo quando per ogni riga o colonna della tabella doppia entrata c'è una sola cella diversa da zero.

	y_1	y_2	y_3	
x_1	6	0	0	6
x_2	0	0	9	9
x_3	0	4	0	4
x_4	2	0	0	2
	8	4	9	21

La parziale di Y|x coincide con la modalità di Y corrispondente ad x.

La varianza delle medie condizionali coincide con la varianza marginale della Y

Il rapporto di correlazione di K. Pearson

$$\eta_{y/x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{r}\left[\mu_y(x_i) - \mu_y\right]^2 f_{i.}}{\sum_{i=1}^{r}\left[y_i - \mu_y\right]^2 f_{i.}}}$$

Il deponente segnala che l'indice è costruito per la Y dato che è la X a condizionare

L'indice eta mette a confronto la variabilità tra le medie condizionali con la variabilità marginale del carattere condizionato.

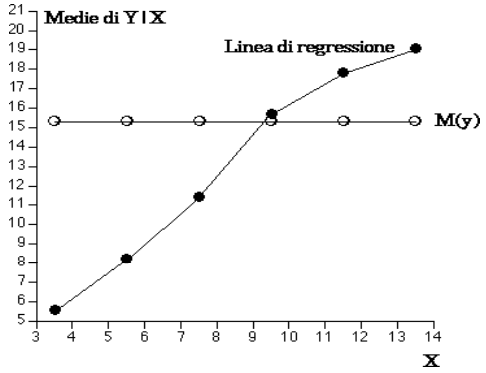
Poichè eta è costruito come rapporto di una quantità positiva al suo massimo avrà valori compresi nell'intervallo [0, 1]

L'indice è invariante rispetto a trasformazioni lineari della variabile condizionata

Esempio

Scolarità e reddito in un campione di soggetti

Scolarità	Reddito	
x	M(y|x)	f(y|x)
3.5	5.5000	0.0165
5.5	8.1667	0.0744
7.5	11.3947	0.1570
9.5	15.6622	0.3058
11.5	17.7609	0.3802
13.5	19.0000	0.0661
m.margin.	15.2851	1.0000



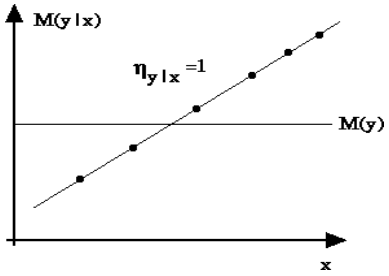
$$Var\left[E(y|x)\right] = 11.0143, \quad Var(y) = 23.2596$$

$$\eta_{y/x} = \sqrt{\frac{11.0143}{23.2596}} = 0.6881$$

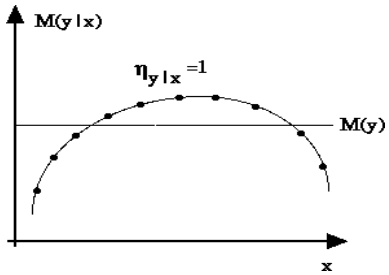
Esiste una dipendenza in media di tipo diretto: all'aumentare della X aumenta, in media, anche la y.

Senza ulteriori sviluppi inferenziali non possiamo stabilire fino a che punto ciò che si è riscontrato nel campione sia vero per l'intera popolazione

Casi particolari



All'aumentare della x il livello medio della y cresce in modo lineare esatto



All'aumentare della x il livello medio della y ha un andamento parabolico: cresce fino ad un certo livello per poi diminuire

Esercizio

Percentuale di incremento degli incentivi per un un campione di lavoratori a "progetto" classificati in base al livello di specializzazione

	5	10	15	20	
L_1	16	10	8	6	40
L_2	10	13	17	23	63
L_3	20	12	11	7	50
L_4	22	9	5	2	38
L_5	18	14	11	9	52
L_6	14	12	6	3	35
	100	70	58	52	280

Calcolare il rapporto di correlazione.

Due variabili metriche

Entrambe le variabili rilevate sulle unità sono misurate con scala metrica

Sebbene sia possibile effettuare lo studio della connessione o quello della dipendenza in media questo è sconsigliato.

Nel primo caso si perdono tutte le informazioni relative alle modalità delle variabili.

Nel secondo si trascura gran parte delle informazioni contenute nelle modalità della variabile condizionante.

Questo spreco è inopportuno, a meno che le misurazioni sulla condizionante o su entrambe le variabili non siano tanto contaminate da errori da costringere ad ignorare la loro scala.

Diagramma di dispersione (Scatterplot)

Su due assi coordinati ed in scala opportuna si riportano i valori delle due variabili ed ogni combinazione (X,Y) è rappresentata da un punto.

Per ogni combinazione (X,Y) si visualizza la frequenza relativa ad essa assegnata dalla distribuzione congiunta con cerchi di raggio ad essa proporzionali

Questo è il grafico più noto ed è di realizza-zione e lettura molto semplice evidenziando La tendenza ad abbinarsi delle due variabili.

Una lettura attenta permette anche di stabilire, con buona approssimazione, il Tipo di legame tra la Y e la X.

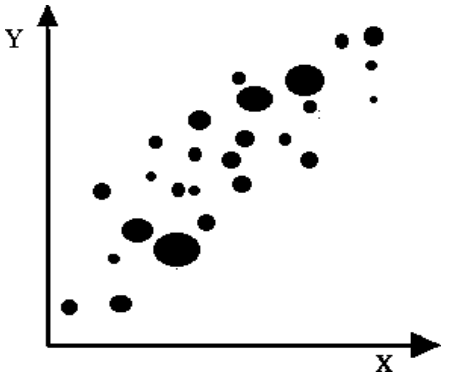


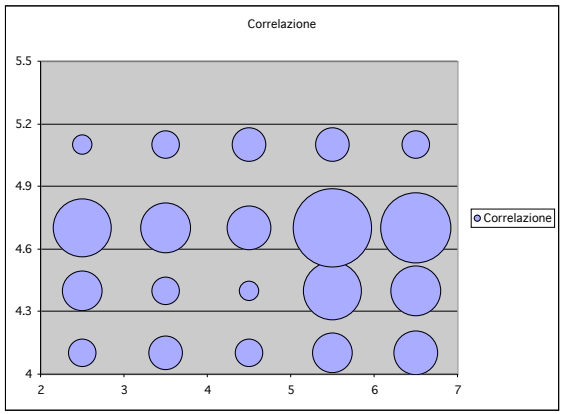
Tabella a doppia entrata

	4.1	4.4	4.7	5.1
2.5	2	4	8	1
3.5	3	2	6	2
4.5	2	1	5	3
5.5	4	8	15	3
6.5	5	6	12	2

Sviluppo in coppie di valori

X	Y	frequenze
2.5	4.1	2
2.5	4.4	4
2.5	4.7	8
2.5	5.1	1
3.5	4.1	3
3.5	4.4	2
3.5	4.7	6
3.5	5.1	2
4.5	4.1	2
4.5	4.4	1
4.5	4.7	5
4.5	5.1	3
5.5	4.1	4
5.5	4.4	8
5.5	4.7	15
5.5	5.1	3
6.5	4.1	5
6.5	4.4	6
6.5	4.7	12
6.5	5.1	2

Esempio- Excel



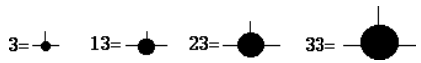
Esercizio

(scatterplot)

Ampiezza famiglia	Numero di percettori di reddito 1	2	3	4	5	
1	5	–	–	–	–	5
2	12	3	–	–	–	15
3	15	9	2	–	–	26
4	18	12	7	3	–	40
5	20	19	14	5	4	62
6	13	28	20	12	3	76
7	6	24	27	18	8	83
8	–	16	32	21	12	81
	89	111	102	59	27	388

Costruite lo scatterplot

NB: per la rappresentazione grafica adoperate una combinazione del grafico a girasole (per le unità) e dei cerchi di raggio proporzionale (per le decine)



Valore atteso delle marginali

In quersto caso possiamo considerare il valore atteso di entrambe le variabili

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} X_i f_{i,} = \mu_x \;; \qquad E(Y) = \sum_{j=1}^{c} Y_j f_{.j} = \mu_y$$

Esempio

Y/X	2	4	6	
1	$4/20$	$2/20$	$4/20$	$10/20$
3	$4/20$	$1/20$	$5/20$	$10/20$
	$8/20$	$3/20$	$9/20$	1

$$\mu_x = 2\left(\frac{8}{20}\right) + 4\left(\frac{3}{20}\right) + 6\left(\frac{9}{20}\right) = \frac{82}{20} = 4.1$$

$$\mu_y = 1\left(\frac{10}{20}\right) + 3\left(\frac{10}{20}\right) = \frac{40}{20} = 2$$

Valori attesi nelle distribuzioni doppie

Nel caso di variabili quantitative metriche siamo interessati anche al …

Media o valore atteso della somma

$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}(X_i + Y_j) f_{ij}$$

Media o valore atteso del prodotto

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}(X_i Y_j) f_{ij}$$

Media o valore atteso della somma

$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} X_i f_{ij} + \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r} Y_j f_{ij} = \sum_{i=1}^{r} X_i \sum_{j=1}^{c} f_{ij} + \sum_{j=1}^{c} Y_j \sum_{i=1}^{r} f_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} X_i f_{i} + \sum_{j=1}^{c} Y_j f_{.j} = \mu_x + \mu_y$$

Esempio

Y/X	2	4	6	
1	$4/20$	$2/20$	$4/20$	$10/20$
3	$4/20$	$1/20$	$5/20$	$10/20$
	$8/20$	$3/20$	$9/20$	1

$$E(X+Y) = (2+1)\left(\frac{4}{20}\right) + (4+1)\left(\frac{2}{20}\right) + (6+1)\left(\frac{4}{20}\right) +$$
$$(2+3)\left(\frac{4}{20}\right) + (4+3)\left(\frac{1}{20}\right) + (6+3)\left(\frac{5}{20}\right)$$
$$= \frac{12+10+28+20+7+45}{20} = \frac{122}{20} = 6.1$$

$$\mu_x + \mu_y = 4.1 + 2 = 6.1$$

Media o valore atteso del prodotto

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} X_i Y_j f_{ij}$$

Esempio

Y/X	2	4	6	
1	$4/20$	$2/20$	$4/20$	$10/20$
3	$4/20$	$1/20$	$5/20$	$10/20$
	$8/20$	$3/20$	$9/20$	1

$$E(XY) = (2)\left(\frac{4}{20}\right) + (4)\left(\frac{2}{20}\right) + (6)\left(\frac{4}{20}\right) +$$
$$(6)\left(\frac{4}{20}\right) + (12)\left(\frac{1}{20}\right) + (18)\left(\frac{5}{20}\right)$$
$$= \frac{8+8+24+24+12+90}{20} = 8.3$$

E(XY) in caso di indipendenza

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} X_i Y_j f_{i.} f_{.j} = \sum_{i=1}^{r} X_i f_{i.} \sum_{j=1}^{c} Y_j f_{.j} = \mu_x \mu_y$$

$$f_{ij} = f_{i.} f_{.j}$$

In questo caso, la media dei prodotti è pari al prodotto delle medie.

Esempio

Y/X	2	4	6	
1	3/20	3/20	6/20	12/20
3	2/20	2/20	4/20	8/20
	5/20	5/20	10/20	1

$$E(XY) = (2)\left(\frac{3}{20}\right) + (4)\left(\frac{3}{20}\right) + (6)\left(\frac{6}{20}\right) + (6)\left(\frac{2}{20}\right) + (12)\left(\frac{2}{20}\right) + (18)\left(\frac{4}{20}\right) = \frac{6+12+36+12+24+72}{20} = 8.1$$

$$\mu_x = (2)\left(\frac{5}{20}\right) + (4)\left(\frac{5}{20}\right) + (6)\left(\frac{10}{20}\right) = 4.5$$

$$\mu_y = (1)\left(\frac{12}{20}\right) + (3)\left(\frac{8}{20}\right) = 1.8; \quad \mu_x\mu_y = 4.5 * 1.8 = 8.1$$

Esempio

Se non sono dipendenti si ha E(X*Y)≠E(X)*E(Y)

		Variabile Y			
		2	4	6	
Var.	1	3/20	2/20	4/20	9/20
X	3	4/20	1/20	6/20	11/20
		7/20	3/20	10/20	1

$$[1*2]*\left(\frac{3}{20}\right) + [1*4]*\left(\frac{2}{20}\right) + [1*6]*\left(\frac{4}{20}\right) + [3*2]*\left(\frac{4}{20}\right) + [3*4]*\left(\frac{1}{20}\right) + [3*6]*\left(\frac{6}{20}\right) = \frac{182}{20}$$

E(y*X)=9.1

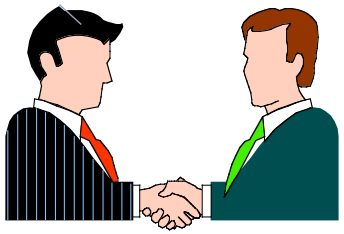
$$E(y) = 2*\left(\frac{7}{20}\right) + 4*\left(\frac{3}{20}\right) + 6*\left(\frac{10}{20}\right) = \frac{86}{20} \qquad E(y)*E(x) = \frac{86}{20}*\frac{42}{20} = 9.03$$

$$E(x) = 1*\left(\frac{9}{20}\right) + 3*\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{42}{20}$$

Molto vicina, ma comunque diversa

La concordanza

Un aspetto essenziale della dipendenza tra due variabili su scala almeno intervallare è la concordanza, cioè la ricerca della direzione della dipendenza tra Y ed X.



Ci si chiede se valori inferiori (superiori) alla media si accompagnino con valori inferiori (superiori) alla media nell'altra

Per ognuna delle combinazione di possibili valori si può averne una indicazione dagli SCARTI MISTI:

$$S_{ij} = (X_i - \mu_x)(Y_j - \mu_y)$$

Significato della concordanza

Il segno degli scarti è utile per sapere se, per la combinazione dei valori "X_i" e "Y_i" l'andamento delle due variabili è concorde oppure discorde:

CONCORDANZA

$$S_{ij} > 0 \Rightarrow (X_i > \mu_x) \; e \; (Y_j > \mu_y) \quad oppure \quad (X_i < \mu_x) \; e \; (Y_j < \mu_y)$$

DISCORDANZA

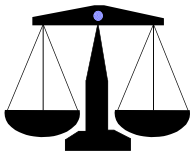
$$S_{ij} > 0 \Rightarrow (X_i > \mu_x) \; e \; (Y_j < \mu_y) \quad oppure \quad (X_i < \mu_x) \; e \; (Y_j > \mu_y)$$

E' difficile cogliere il senso della concordanza analizzando uno per uno TUTTI gli scarti misti.

La covarianza

La sintesi più semplice di tutti gli scarti misti è il loro valore atteso che costituisce la covarianza tra Y ed X

$$Cov(X,Y) = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}(X_i - \mu_x)(Y_j - \mu_y)f_{ij}$$



Se Cov(Y,X)>0; Predominano gli scarti di segno concorde. Ci si aspetta X e Y tendano a cambiare nella stessa direzione

Se Cov(Y,X)<0; Predominano gli scarti di segno discorde. Ci si aspetta X e Y tendano a cambiare in direzioni opposte

Se Cov(Y,X)=0; le forze di discordanza e di concordanza sono bilanciate e le due variabili si dicono INCORRELATE

Esempio di calcolo della covarianza

Y/X	2	4	6	
1	1/9	3/9	1/9	5/9
3	2/9	1/9	1/9	4/9
	3/9	4/9	2/9	1

Medie marginali

$$\mu_x = 2*\frac{3}{9}+4*\frac{4}{9}+6*\frac{2}{9}=\frac{34}{9}=3.78$$

$$\mu_y = 1*\frac{5}{9}+3*\frac{4}{9}=\frac{17}{9}=1.89$$

$(y-\mu_y)/(y-\mu_x)$	-1.78	0.22	2.22
-0.89	1/9	3/9	1/9
1.11	2/9	1/9	1/9

$$Cov(x,y) = -1.78*(-0.89)*\frac{1}{9}+0.22*(-0.89)*\frac{3}{9}+2.22*(-0.89)*\frac{1}{9}+$$
$$-1.78*1.11*\frac{2}{9}+0.22*1.11*\frac{1}{9}+2.22*1.11*\frac{1}{9}$$

$$Cov(x,y) = \mathbf{-0.2469}$$

Dominano gli scarti discordi

Esempio per dati in classi

	1 - 3	3 - 5	5 - 7	
0 - 2	0	1	4	5
2 - 4	2	1	2	5
4 - 6	4	3	0	7
6 - 10	5	3	0	8
	11	8	6	25

	2	4	6
1	0.00	-0.62	-14.98
3	-1.41	0.18	2.11
5	-15.62	2.93	0.00
8	-43.52	6.53	0.00
	-58.54	13.01	-6.86
E(X)	2.56	Cov(X,Y)=	-2.10
E(Y)=	3.60		

In questi casi si utilizzano i valori centrali delle classi, ma con risultati più approssimati

Formula semplificata per la covarianza

Usando le proprietà delle sommatorie si ottiene

$$Cov(X,Y) = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}(X_i-\mu_x)(Y_j-\mu_y)f_{ij} = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}(X_i-\mu_x)Y_jf_{ij} - \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}(X_i-\mu_x)\mu_yf_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{c}Y_j\left[\sum_{i=1}^{r}(X_i-\mu_x)f_{ij}\right] - \mu_y\sum_{j=1}^{c}\left[\sum_{i=1}^{r}(X_i-\mu_x)f_{ij}\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}X_iY_jf_{ij} - \mu_x\sum_{j=1}^{c}Y_jf_{.j} = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}X_iY_jf_{ij} - \mu_x\mu_y = E(XY) - \mu_x\mu_y$$

che semplifica il calcolo e soprattutto l'interpretazione della covarianza

Se c'è indipendenza la covarianza è zero dato che in questo caso si ha $E(XY)=\mu_x\mu_y$

Esempio

Supponiamo che due variabili abbiano frequenze congiunte date da

$$f(X_1,X_2)=\frac{X_1+2X_2}{18};\quad \text{per}\quad X_1,X_2=1,2.$$

Con distribuzioni marginali

$$f(X_1)=\frac{2X_1+6}{18}\quad \text{per}\quad X_1=1,2;\qquad f(X_2)=\frac{3+4X_2}{18}\quad \text{per}\quad X_2=1,2;$$

che hanno medie: $E(X_1)=\frac{14}{9};\quad E(X_2)=\frac{29}{18}$

La covarianza è: $Cov(X_1,X_2)=\left(\sum_{x_1=1}^{2}\sum_{x_2=1}^{2}X_1X_2\frac{X_1+2X_2}{18}\right)-\frac{14}{9}*\frac{29}{18}=$

$$=\left(1*1*\frac{3}{18}+2*1*\frac{4}{18}+1*2*\frac{5}{18}+2*2*\frac{6}{18}\right)-\frac{406}{162}$$

In medie le due variabil sono discordi

$$=\frac{45}{18}-\frac{406}{162}=-\frac{1}{162}$$

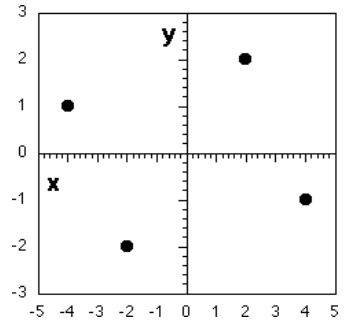
Esempio/2

Supponiamo che le frequenze congiunte siano date da

$$f(X,Y)=\begin{cases}1/4 & \text{per } (x,y)\in\{(-4,1);(4,-1);(2,2);(-2,-2)\}\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

Dato che si possono presentare solo le quattro coppie cui è associata una frequenza positiva la X e la Y sono dipendenti in senso funzionale

Noto che X=4 solo Y=-1 è possibile (frequenza positiva)



D'altra parte si ha

$$E(X)=-4*\frac{1}{4}+4*\frac{1}{4}-2*\frac{1}{4}+2*\frac{1}{4}=0;$$

$$E(Y)=1*\frac{1}{4}-1*\frac{1}{4}+2*\frac{1}{4}-2*\frac{1}{4}=0;\qquad E(XY)=E(X)*E(Y)$$

$$E(XY)=-4*\frac{1}{4}-4*\frac{1}{4}+4*\frac{1}{4}+4*\frac{1}{4}=0;$$

Quindi, le due variabili pur essendo dipendenti (in senso funzionale) risultano incorrelate

Esercizi

A partire dalla seguente tabella

Y/X	–1	0	–1	
–2	1/8	1/8	0	2/8
0	1/8	0	2/8	3/8
–2	1/8	1/8	1/8	3/8
	3/8	2/8	3/8	1

Calcolare

1. E(X), E(Y);
2. Var(X), Var(Y);
3. E(X*Y)
4. E(X+Y)
5. Cov(X,Y)

A partire dalla seguente distribuzione doppia

$$P(X_1,X_2)=\frac{X_1+X_2}{32};\quad X_1=1,2;\quad X_2=1,2,3,4.$$

Ripetere gli stessi calcoli dell'esercizio precedente

Covarianza e trasformazioni lineari

$$W_i=a+bX_i;\quad Z_j=c+dY_j$$

$$Cov(W,Z)=\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}W_iZ_jf_{ij}-\mu_w\mu_z=\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}\left(a+bX_i\right)\left(c+dY_j\right)f_{ij}-\left[a+b\mu_x\right]\left[c+d\mu_y\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}\left[ac+bcX_i+adY_j+bdX_iY_j\right]f_{ij}-\left[ac+ad\mu_y+bc\mu_x+bd\mu_x\mu_y\right]$$

$$=ac\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}[1]f_{ij}+bc\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}[X_i]f_{ij}+ad\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}[Y_j]f_{ij}+bd\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}[X_iY_j]f_{ij}$$
$$-ac-ad\mu_y-bc\mu_x-bd\mu_x\mu_y$$

$$=ac+bc\mu_x+ad\mu_y+bd\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}[X_iY_j]f_{ij}-ac-ad\mu_y-bc\mu_x-bd\mu_x\mu_y$$

$$=bd\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}[X_iY_j]f_{ij}-bd\mu_x\mu_y=bdCov(X,Y)$$

i parametri additivi "a" e "c" sono scomparsi, quelli moltiplicativi sono dei fattori

Disuguaglianza Cauchy-Schwartz

Consideriamo una relazione che lega linearmente gli scarti medi di Y agli scarti medi di X

$$\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}\left[\left(Y_j-\mu_y\right)-b\left(X_i-\mu_x\right)\right]^2 f_{ij}=\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}\left[\left(Y_j-\mu_y\right)^2+b^2\left(X_i-\mu_x\right)^2-2b\left(Y_j-\mu_y\right)\left(X_i-\mu_x\right)\right]f_{ij}\geq 0$$

$$=Var(Y)+b^2Var\left(X\right)-2bCov(X,Y)\geq 0$$

Perchè tale disequazione di 2° grado in "b" sia sempre soddisfatta, il discriminante NON deve essere positivo e cioè:

$$\left[2Cov(X,Y)\right]^2-4Var(Y)Var\left(X\right)\leq 0\Rightarrow\left[Cov(X,Y)\right]^2\leq Var(Y)Var\left(X\right)$$

La covarianza, al quadrato, è inferiore o uguale al prodotto delle varianze delle distribuzioni marginali

Limiti della Covarianza

La covarianza ha tutti i difetti delle misure di variabilità assoluta (dipendenza dall'unità di misura, mancanza di limiti predefiniti, etc.)

$$\left|Cov(X,Y)\right|\leq\sigma(Y)\sigma\left(X\right)$$

E' però legata alla variabilità dei due caratteri nel senso che non può superare, in valore assoluto, il prodotto degli SQM di Y e X.

Per ottenere un indice normalizzato e standardizzato covarianza è calcolata sulle variabili standardizzate. L'indice risultante si chiama coefficiente di correlazione

$$Cov(X^*,Y^*)=\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{X_i-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{Y_i-\mu_y}{\sigma_y}\right)f_{ij}$$

Coefficiente di correlazione

- **E' normalizzzato cioè compreso tra -1 e +1 perché espresso come rapporto la covarianza al suo massimo (in valore assoluto)**

$$r(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)*Var(Y)}}$$

- **E' standardizzato. Se una o entrambe le variabili subiscono una trasformazione lineare il coefficiente rimane lo stesso:**

r(a+bX,c+dY) = r(X,Y)

- **E' simmetrico rispetto alle due variabili: r(Y,X)=r(X,Y)**

- **E' uguale a zero se c'è indipendenza tra le due variabili (il numeratore in questo caso è infatti zero)**

Coefficiente di correlazione/2

Assume i valori estremi solo in caso di relazione lineare esatta

$$Cov(X,a+bX)=\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}\left[X_i\left(a+bX_j\right)-\mu_x\left(a+b\mu_x\right)\right]f_{ij}=\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}aX_jf_{ij}+b\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}X_iX_jf_{ij}-a\mu_x-b\mu_x^2$$

$$=\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}aX_jf_{ij}+b\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}X_iX_jf_{ij}-a\mu_x-b\mu_x^2\quad=a\mu_x-a\mu_x+b\left[Var(x)\right]$$

$$=a\sum_{j=1}^{c}\mu_xf_{.j}+b\sum_{j=1}^{c}X_j^2f_{.j}-a\mu_x-b\mu_x^2=bVar(X)$$

Y_j=0 se I≠j

Ne consegue che

$$r(X,a+bX)=\frac{bVar(x)}{\sqrt{Var\left(x\right)Var\left(a+bx\right)}}=\frac{bVar(x)}{\sqrt{Var\left(x\right)b^2Var\left(x\right)}}=\frac{b}{|b|}=\begin{cases}-1 & se\quad b<0\\ +1 & se\quad b>0\end{cases}$$

il coefficiente di correlazione misura, quindi, l'intensità del legame lineare che sussiste tra le due variabili.

Esempio

Consideriamo la distribuzione congiunta: $f(X_1,X_2)=\frac{X_1+2X_2}{18}; \quad \text{per} \quad X_1,X_2=1,2$

Con $E(X_1)=\frac{14}{9}; \quad E(X_2)=\frac{29}{18}; \quad \sigma^2(X_1)=\frac{20}{81}; \quad \sigma^2(X_2)=\frac{77}{324}; \quad Cov(X_1,X_2)=-\frac{1}{162};$

il coefficiente di correlazione è $r(X_1,X_2)=\frac{-\frac{1}{162}}{\sqrt{\frac{20}{81}*\frac{77}{324}}}=-\frac{1}{\sqrt{1540}}=-0.025$

Che un qualche legame di dipendenza ci fosse era chiaro dal fatto che

$$f(X_1,X_2)\neq f(X_1)*f(X_2)$$

il valore di r(X_1 , X_2) conferma che è i valori delle variabili sono discordi e il legame lineare è molto tenue

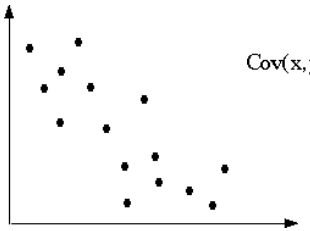
Semplificazioni per coppie di valori

Non sempre è opportuno e conveniente organizzare la variabile doppia in una tabella soprattutto se le coppie hanno la stessa probabilità.

Quando per le due v.c. siano osservabili "n" coppie di valori, ciascuna con frequenza pari a (1/n)

$$X_i,Y_i, \quad i=1,2,\ldots,n \quad \text{con} \quad p_{ij}=\frac{1}{n}$$

In questo caso le formule si semplificano ed in particolare sparisce una sommatoria



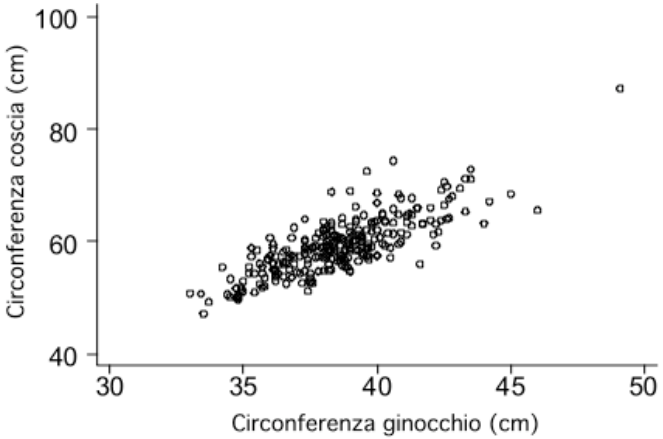
$$Cov(x,y)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n}-\mu_x\mu_y$$

$$\mu_x=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}; \quad \mu_y=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}$$

$$\sigma_x=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\mu_x^2;\sigma_y=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}{n}-\mu_y^2;$$

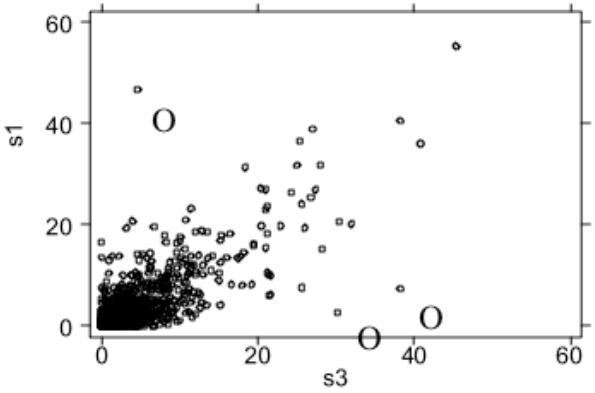
Scatterplot (valori singoli)

Su due assi coordinati ed in scala opportuna si riportano i valori delle due variabili ed ogni combinazione (X,Y) è rappresentata da un punto.



Scatterplot/2

Lo scatterplot offre una comoda rappresentazione delle possibili relazioni tra due variabili quantitative.

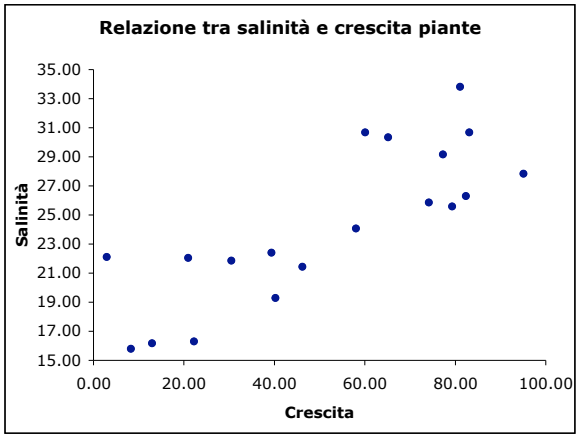


Il grafico evidenzia il gradiente dei dati, l'intensità del legame nonché i possibili valori anomali (outliers) cioè osservazioni lontane, a prima vista, dal centro della relazione.

Esempio

C'e una relazione tra il tasso di crescita delle mangrovie e la salinità del suolo?

Prelievi	Salinity	Crescita
1	2.90	22.12
2	40.25	19.29
3	60.05	30.69
4	8.24	15.80
5	58.05	24.08
6	95.07	27.85
7	79.31	25.58
8	8.35	14.59
9	12.93	16.17
10	22.21	16.31
11	77.23	29.17
12	74.11	25.87
13	20.91	22.05
14	83.08	30.68
15	81.02	33.82
16	82.31	26.30
17	46.19	21.45
18	65.12	30.34
19	30.46	21.86
20	39.31	22.42



Appare evidente una relazione diretta

Calcolo di r(x,y) per coppie di valori

il calcolo è molto semplice purché opportunamente organizzato.

X	Y	X2	Y2	XY
0	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
2	1	4	1	2
Σ= 6	3	8	3	4

$$\mu_x = \frac{6}{6} = 1; \quad \mu_y = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\sigma^2(X) = \frac{8}{6} - 1^2 = \frac{1}{3}; \quad \sigma^2(Y) = \frac{3}{6} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4};$$

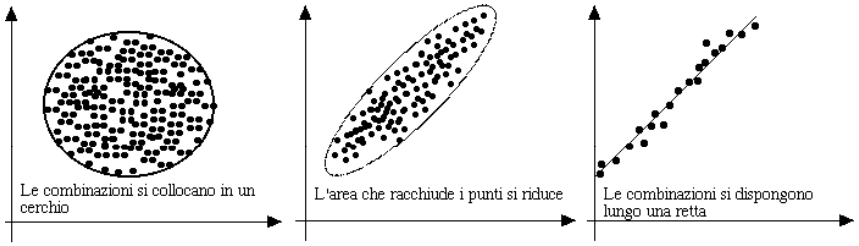
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{4}{6} - 1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{6}; \quad r(X,Y) = 0.5773$$

Le due variabili presentano una correlazione positiva tendendo a presentare insieme i valori più grandi

Scatterplot e correlazione

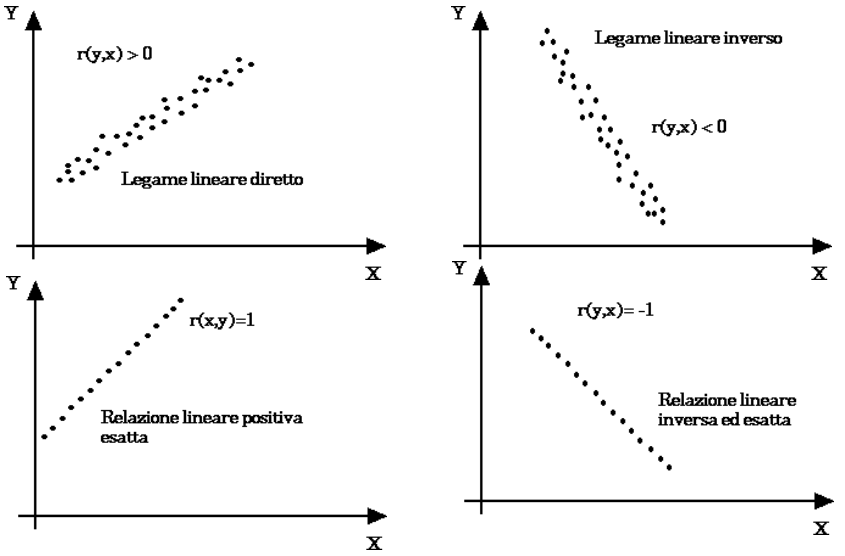
Lo scatterplot fornisce una idea immediata della intensità del legame che vige tra le due variabili

Si realizza riportando -in scala opportuna- le combinazioni osservate dei valori

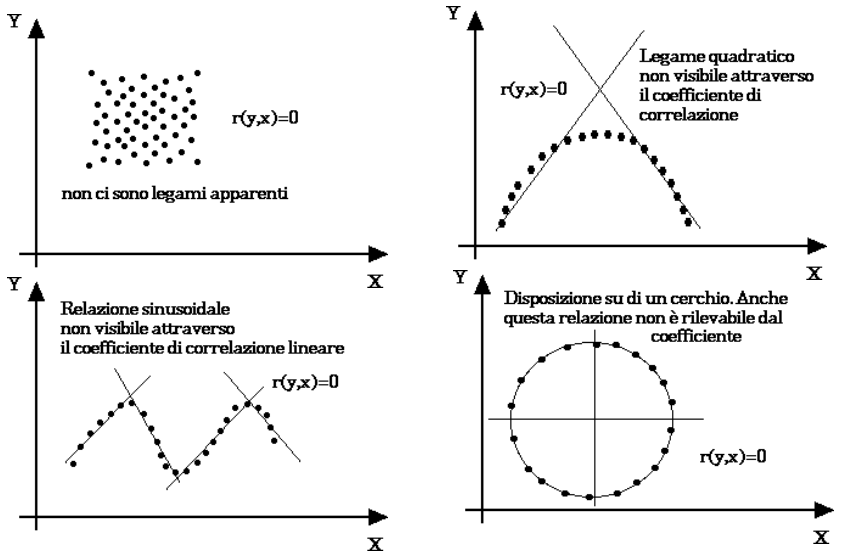


La relazione tra due variabili tende a divenire più stretta ma mano che la nube di punti passa dalla forma circolare, alla ellisse ed alla retta

Scatterplot e correlazione/2



Assenza di legami lineari



Significato di r(x,y)

Quanto più i suoi valori si avvicinano, in modulo, ad uno tanto più i valori delle variabili risultano collegabili con una retta.

D'altra parte, quanto più "r" è vicino a "±1" tanto più la conoscenza di una delle variabili permette, attraverso la relazione lineare, di conoscere l'altra.

In questo senso "r" è una misura del grado di concordanza tra i valori della variabile doppia (X,Y)

In termini di variabili standardizzate r(x,y) misura anche la somiglianza/distanza tra i due fenomeni.

- **INTENSITA' DEL LEGAME LINEARE**
- **PREVEDIBILITA' DI UNA VARIABIULE CONOSCENDO L'ALtra**
- **GRADO DI CONCORDANZA**
- **SOMIGLIANZA TRA LE DUE VARIABILI**

Correlazione e somiglianza

Correlazione unitaria non significa identità tra le due variabili

$$r(X,Y) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[Z_{x,i} - Z_{y,i}\right]^2}{2n} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}\right) - \left(\frac{x_i-\mu_y}{\sigma_y}\right)\right]^2}{2n}$$

$$= 1 - \frac{1}{2n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right] - \frac{1}{2n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right] + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}\right) = r(X,Y)$$

Se i punteggi Z della Y si sovrappongo a quelli della X allora il coefficiente di correlazione è pari ad uno.

Se Invence ne sono l'opposto allora r(X,Y)=-1

Se sono incorrelate allora Cov(X,y)=0 e r(X,Y)=1-(1+1)/2=0.

Correlazione e causa-effetto

L'esistenza di correlazione, per quanto intensa, non implica una relazione di causa ed effetto.

LEGAME PLAUSIBILE

Il tasso di criminalità è fortemente legato al tasso di disoccupazione.

LEGAME SPURIO

Nei bambini, la misura delle scarpe è molto correlata con la capacità di lettura.

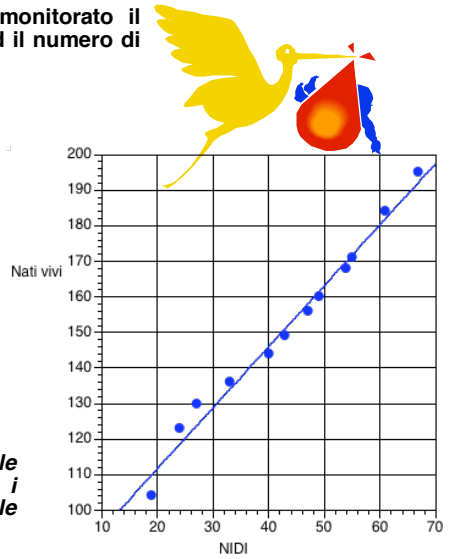
La correlazione indica solo che l'andamento di una variabile tende a disporsi secondo una retta se rappresentato insieme all'altra. I "perchè?" di questa tendenza vanno cercati al di fuori della statistica.

Il coefficiente di correlazione misura solo la co-variazione tra valori standardizzati

Esempio

In una zona del Nord Europa è stato monitorato il numero di nidi costruiti dalle cicogne ed il numero di nati vivi nel loro periodo di permanenza.

Anno	Nidi di cicogne	Nati vivi
1972	19	104
1973	24	123
1974	27	130
1975	33	136
1976	40	144
1977	43	149
1978	47	156
1979	49	160
1980	54	168
1981	55	171
1982	61	184
1983	67	195

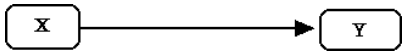


Dal punto di vista della correlazione le ipotesi che siano le cicogne a portare i bambini o che siano i bambini a portare le cicogne sono equivalenti.

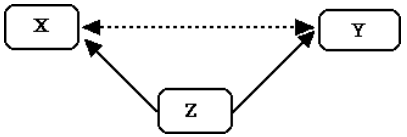
Correlazione spuria

Spesso, il valore di r(y,x) altro non è che l'apparenza di un legame la cui sostanza è invece dovuta a fenomeni esterni.

La situazione di causalità tra X e Y:



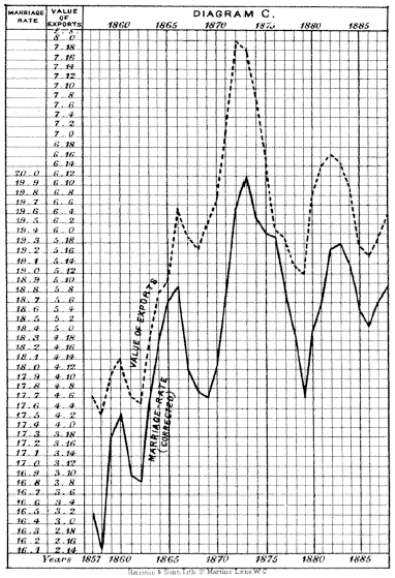
Non è distinguibile dal legame spurio che fra di esse si pone a causa della comune dipendenza da una terza variabile Z



L'apprendimento di nuove parole non rende i piedi più grandi ovvero avere piedi più grandi non aiuta a conoscere nuove parole.
C'è un terzo fattore nascosto dietro la correlazione: l'età

Questo si verifica spesso a causa dell'esistenza di fenomeni tendenziali di lungo periodo che incidono allo stesso modo su variabili diverse

Esempio (vintage)



Prezzo del grano e tasso di matrimonialità.

E' evidente un andamento sincrono che induce una correlazione molto elevata.

La spiegazione è semplice: un comune fattore esterno

Ci si sposa quando le condizioni economiche sono brillanti: c'è un aumento degli scambi e quindi delle importazioni

Se le importazioni aumentano tendono ad aumentare I noli ed I dazi.

Questo si riflette sui prezzi del grano che tendono aumentare (Ogle, 1890).

Dipendenza dei ranghi

Riguarda le variabili riportate in scala quantitativa ordinale.

> Perché non esiste una vera misura, ma solo un punteggio o valutazione

> Perché le misurazioni su sono imprecise o viziate da errore

> Perché sono presenti dei valori remoti

Le modalità sono poste in corrispondenza con dei numeri naturali (ranghi)

Per ogni unità si osserva una coppia di modalità che si trasforma poi in una coppia di ranghi

$$(X_i, Y_i) \longleftrightarrow (r_i, s_i)$$

Esempio

Un gruppo di clienti di una banca classificato per reddito e per importo del prestito. Convertiamo i valori osservati in ranghi.

Cliente	Reddito (x)	Rango (x)	Prestito (y)	Rango (y)
A	25 600	6	8 600	5
B	17 800	9	8 800	4
C	167 200	1	500	8
D	44 200	3	6 600	6
E	36 400	4	10 500	3
F	27 400	5	74 400	1
G	83 600	2	0	9
H	18 600	8	6 300	7
I	24 500	7	12 100	2

E' evidente la perdita di informazione. Lo scarto tra i ranghi in X per i clienti H ed I è 9-7=3 e sarebbe questo per qualunque coppia di valori compresi tra 18'600 e 24'500.

In breve, conoscere i ranghi poco ci dice sui valori originari

Table 2: unweighted rank correlations

Name	Formula
Spearman	$r_1 = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(i-s_i)^2}{n^3-n}$
Gini	$r_2 = 2^{\frac{\sum_{i=1}^{n}\lvert i-s_i^*\rvert - \sum_{i=1}^{n}\lvert i-s_i\rvert}{k_n}};\ k_n = n \mod 2$
Hamming distance	$r_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} h(s_i^*=i) - \sum_{i=1}^{n} h(s_i=i)}{n-k_n}$
Kendall	$r_4 = \frac{2\sum_{i<j} sgn(s_j-s_i)}{n(n-1)}$
Gideon-Hollister	$r_5 = \frac{\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{i} h(s_j^*>i) - \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{i} h(s_j>i)}{n-k_n}$
MacMahon	$r_6 = 1 - \frac{12\sum_{i=1}^{n-1} i^2 h(s_i > s_{i+1})}{2(n-1)^3 3(n-1)^2+n-1}$
Fechner	$r_7 = \frac{\sum_{i=2}^{n} sgn(s_i - s_{i-1})}{n-1}$
Salvemini	$r_8 = \frac{s_n - s_1}{\sum_{i=2}^{n}\lvert s_i - s_{i-1}\rvert}$
Quadrant association	$r_9 = \frac{n_1+n_2}{\lambda_n-\gamma_n}$
Dallal-Hartigan	$r_{10} = \frac{n-1}{\sum_{i<j}\left(\frac{s_j-s_i}{j-i}\right)}$
Average slope	$r_{11} = 2\frac{\sum_{i<j}\left(\frac{s_j-s_i}{j-i}\right)}{n(n-1)}$
Median slope	$r_{12} = median\left\{b_{ij}\lvert b_{ij} = \frac{s_j-s_i}{j-i}, 1\le i<j\le n\right\}$
Inversion table	$r_{13} = 1 - 2\sqrt{\frac{6\sum_{i=1}^{n} b_i^2}{2(n-1)^3+3(n-1)^2+(n-1)}}$
Spearman's footrule	$r_{14} = 1 - \frac{4\sum_{i=1}^{n}\lvert i-s_i\rvert}{(n^2-k_n)}$
Gordon	$r_{15} = 2\left(\frac{\lambda_n-1}{n-1}\right) - 1$

Misura della dipendenza nei ranghi

Organizziamo le coppie di ranghi in modo che la prima si trovi in ordine naturale

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n-1 & n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_i & \cdots & s_{n-1} & s_n \end{array}$$

Le misure di correlazione di rango esprimono il grado di concordanza o discordanza tra due graduatorie

La prima è usata come riferimento per la seconda

I valori dovrebbero variare tra -1 e 1 con lo zero ottenuto in caso di assenza di associazione tra le due graduatorie

rho di Spearman

La misura forse più popolare della dipendenza tra i ranghi è la seguente

$$r_S = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(r_i - \frac{n+1}{2}\right)\left(s_i - \frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(r_i - \frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(s_i - \frac{n+1}{2}\right)^2}}$$

detto rho di Spearman

Caso delle n coppie di valori senza posizioni di parità.

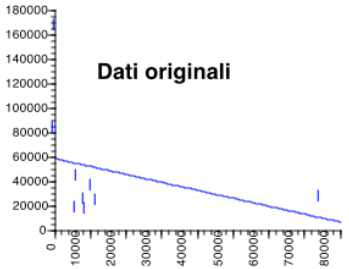
La definizione di r_S è la stessa del coefficiente di correlazione. Comunque il particolare tipo di dati coinvolti consente delle semplificazioni

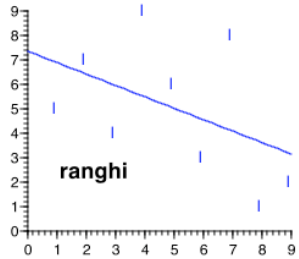
$$r_S = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(r_i - s_i)^2}{n\left(n^2-1\right)}$$

Esempio

Cliente	Reddito	r_i	Prestito	s_i	$(r_i - s_i)^2$
A	25600	6	8600	5	1
B	17800	9	8800	4	25
C	167200	1	500	8	49
D	44200	3	6600	6	9
E	36400	4	10500	3	1
F	27400	5	74400	1	16
G	83600	2	0	9	49
H	18600	8	6300	7	1
I	24500	7	12100	2	25
					176

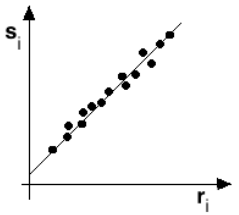
$$r_S = 1 - \frac{6*176}{9*(81-1)} = -0.4667$$

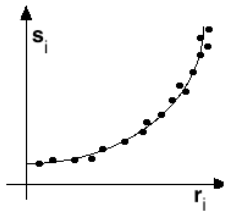




Considerazione sul rho di Spearman

- Per costruzione l'indice rho varia tra -1 ed 1
- Misura la dipendenza monotonica tra le due variabili. Assume il valore massimo (minimo) quando gli ordinamenti sono perfettamente concordi (discordi)





$r_S = \pm 1$ se tra la Y e X esiste una relazione monotona, crescente o decrescente, senza vincolo di linearità

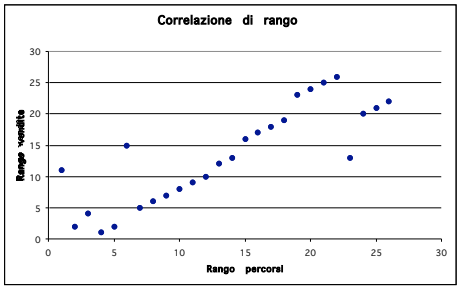
- Rho mette tutte le osservazioni sullo stesso piano (considera solo l'ordine) e perciò annulla l'effetto dei valori remoti
- L'indice rimane invariato se una o entrambe le variabili subiscono una trasformazione monotona, ad esempio Y'=Log(Y)e/o X'=exp(X)

Esempio

Unità	X Percorsi	Y Vendite	Rank(X)	Rank(Y)
A	121.5	373	21	25
B	151.5	314	25	21
C	146.2	301	24	20
D	106.7	263	16	17
E	98.9	204	11	9
F	95.1	176	9	7
G	90.1	138	4	1
H	115.5	329	19	23
I	71.7	225	1	11
J	111.7	300	18	19
K	93.6	164	7	5
L	109.6	284	17	18
M	105.3	252	15	16
N	125.0	400	22	26
O	91.7	239	6	15
P	88.7	161	3	4
Q	101.9	226	13	12
R	162.3	322	26	22
S	96.4	185	10	8
T	90.7	143	5	2
U	100.0	212	12	10
V	102.6	232	14	13
X	94.5	171	8	6
Y	88.6	143	2	2
W	119.4	358	20	24
Z	142.9	232	23	13

rho=	0.850084703
gdl=	25
tc=	7.907679188
p-Value	2.90161E-08

Venditori porta-a-porta per vendite e km percorsi



La correlazione è elevata sebbene si notino diversi disturbi

Rilevazione diretta dei ranghi

Un certo insieme di *n* oggetti o situazioni sono ordinate secondo il grado con cui presentano una certa caratteristica X.

Supponiamo …

Che la caratteristica sia un *mix* di immaterialità graduabile, ma non misurabile.

Che le valutazioni siano espresse con i voti {1,2,…,n} così ottenendo la permutazione $\{s_1, s_2,\ldots,s_n\}$

Ripetiamo la rilevazione per una *Y* rilevata allo stesso modo e che produce la permutazione: $\{r_1, r_2,\ldots,r_n\}$

Condizione di ansia e stress
Prima e dopo una separazione

Il rho di Spearman cerca di quantificare l'intensità del legame tra i due insiemi di giudizi

Esempio: giudizi degli esperti

Ad un esperto è stato chiesto di pronunciarsi sulla posizione che le 20 squadre di un campionato di calcio occuperanno alla fine: $\{s_1, s_2,\ldots,s_{20}\}$.

Alla fine della stagione i giudizi sono comparati con le posizioni reali: $\{r_1, r_2,\ldots,r_{20}\}$.

Per semplificare il calcolo possiamo disporre le due serie di posizioni secondo l'ordine crescente della prima

Squadra	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	Totale
Prima	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	210
Dopo	9	2	4	7	5	1	3	8	6	11	13	10	14	18	15	12	16	20	17	19	210

ρ=0.87 (p-value 0.000001). L'esperto ha dato un buon giudizio sebbene sembri più in grado di indovinare le squadre che avranno una cattiva stagione rispetto a quelle che l'avranno buona

Esercizio

Ad un campione di consumatori è stato chiesto di giudicare la qualità di un servizio con un voto da 0 a 12.

E' anche stato chiesto di valutare con un voto da 0 a 12 la reputazione dell'azienda che forniva il servizio

Azienda	Rating servizio	Reputazione azienda
Alfa01	8	9
Alfa02	9	12
Alfa03	2	0
Alfa04	5	10
Alfa05	6	6
Alfa06	4	11
Alfa07	7	4
Alfa08	10	3
Alfa09	3	5
Alfa10	1	2
Alfa11	0	1
Alfa12	12	7
Alfa13	11	8

Vi sembra che ci sia un legame tra le due valutazioni?

Rho-Spearman=	0.4890
Tc=	1.8593
p-value	0.0899

tau di Kendall

E' una misura alternativa di dipendenza lineare tra ranghi

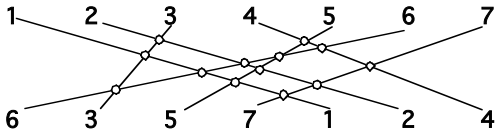
$$\begin{matrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_i & \cdots & r_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_i & \cdots & s_n \end{matrix}$$

$$\tau = 1 - \frac{4C}{n(n-1)} \quad con \quad -1 \le \tau \le 1$$

"C" è il numero minimo di scambi necessari per trasformare una graduatoria nell'altra. Gli estremi sono interpretabili come nel rho di Spearman

ESEMPIO

Calcolo con il netodo di Holmes (1920)

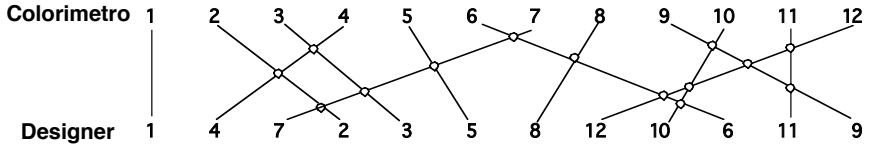


Le linee che congiungono I ranghi nelle due graduatorie si incrociano C volte

$$\tau = 1 - \frac{4(13)}{7(6)} = 1 - 1.2381 = -0.2381$$

Esempio

N=12 dischi hanno nuance del blu disposte secondo un colorimetro ed una candidata designer è chiamata a ricostruire la graduatoria



$$\tau = 1 - \frac{4(14)}{12(11)} = 1 - 0.4242 = 0.5758$$

Secondo il colorimetro c'è correlazione positiva ed abbastanza grande, ma che sia significativa dovrà essere stabilito con l'inferenza

Presenza di valori uguali

Se ci sono degli ex-aequo sorge il problema di assegnare il rango ai valori uguali

In genere si assegna a ciascun elemento di un gruppo di parità, la media dei ranghi che sarebbero loro spettati se fossero stati distinti.

Esempio

intensità	101	108	108	117	117	117	141	142	154	154	154	154	154	173
ranghi teorici	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
medie		(2+3)/2=2.5		(4+5+6)/3=5					(9+10+11+12+13)/5 = 11					
ranghi reali	1	2.5	2.5	5	5	5	7	8	11	11	11	11	11	14

Ai fini del calcolo nulla è cambiato se non la perdita delle semplificazioni possibili solo in caso di assenza di parità

Formula di rho in caso di parità

$$\rho_S = \frac{\left(n^3-3\right) - 6\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{n_x}\left[\left(t_j^x\right)^3 - \left(t_j^x\right)\right] + \sum_{j=1}^{n_y}\left[\left(t_j^y\right)^3 - \left(t_j^y\right)\right]\right\}}{\sqrt{\left[\left(n^3-3\right) - \sum_{j=1}^{n_x}\left[\left(t_j^x\right)^3 - \left(t_j^x\right)\right]\right]\left[\left(n^3-3\right) - \sum_{j=1}^{n_y}\left[\left(t_j^y\right)^3 - \left(t_j^y\right)\right]\right]}}$$

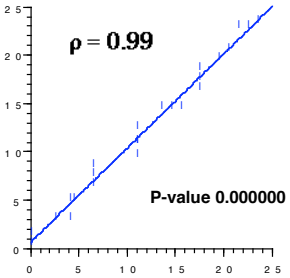
$$dove \quad \begin{cases} n_x = numero\ di\ gruppi\ di\ X\ con\ parità \\ t_j^x = numero\ di\ valori\ uguali\ per\ la\ j-esima\ parità\ in\ X \\ n_y = numero\ di\ gruppi\ di\ Y\ con\ parità \\ t_j^y = numero\ di\ valori\ uguali\ per\ la\ j-esima\ parità\ in\ Y \end{cases}$$

Esempio

E	E-or	r_E	B	B-or	r_B	$(r_E)^2$	$(r_B)^2$	$r_E * r_B$
10.3	9.2	0.5	-1.3	-1.8	1	0.25	1	0.5
9.9	9.2	0.5	-1.1	-1.6	2	0.25	4	1
10.3	9.3	3.0	1.3	-1.5	3.5	9	12.25	10.5
9.7	9.4	4.5	0.5	-1.5	3.5	20.25	12.25	15.75
9.6	9.4	4.5	1.8	-1.3	5.5	20.25	30.25	24.75
9.5	9.5	5.0	-0.4	-1.3	5.5	25	30.25	27.5
10.8	9.6	7.0	-1.6	-1.1	7	49	49	49
9.7	9.6	7.0	-1.8	-0.8	8	49	64	56
9.4	9.6	7.0	1.0	-0.7	9	49	81	63
10.1	9.7	11.5	-1.5	-0.5	10	132.25	100	115
9.4	9.7	11.5	-0.8	-0.4	11.5	132.25	132.25	132.25
10.4	9.7	11.5	-1.3	-0.4	11.5	132.25	132.25	132.25
9.6	9.7	11.5	-0.7	-0.2	13	132.25	169	149.5
9.7	9.8	14.0	-0.4	0.5	15	196	225	210
10.6	9.9	15.0	0.5	0.5	15	225	225	225
9.3	10.1	16.0	1.3	0.5	15	256	225	240
10.5	10.3	18.0	1.1	0.7	17	324	289	306
10.7	10.3	18.0	0.9	0.8	18	324	324	324
9.2	10.3	18.0	0.5	0.9	19	324	361	342
9.7	10.4	20.0	0.8	1.0	20	400	400	400
9.2	10.5	21.0	-1.5	1.1	21	441	441	441
9.6	10.6	22.0	-0.2	1.3	23.5	484	552.25	517
9.8	10.7	23.0	0.7	1.3	23.5	529	552.25	540.5
10.3	10.8	24.0	-0.5	1.8	24	576	576	576
						4830	4988	4898.5

Accertamento di una relazione d'ordine tra il tasso di interesse effettivo "E" dei BOT trimestrali e l'indice di borsa "B"

$$r_S = \frac{\frac{4898.5}{24} - \frac{(25)^2}{4}}{\sqrt{\left[\frac{4830}{24} - \frac{(25)^2}{4}\right] * \left[\frac{4988}{24} - \frac{(25)^2}{4}\right]}}$$



Esempio

Distanza da un punto inquinante e concentrazione dell'agente nell'aria

Distanza (X)	Concen. (Y)	ranghi(X)	ranghi (Y)	d(x,y)
0	510	1	12	121
50	380	2	9	49
300	450	3.5	10	42.25
300	480	3.5	11	56.25
800	300	5	7.5	6.25
900	300	6	7.5	2.25
1000	170	7	6	1
1500	94	9	3.5	30.25
1500	94	9	3.5	30.25
1500	108	9	5	16
2000	45	11	1	100
5000	89	12	2	100
				554.5

$$\rho_S = \frac{1725 - 3327 - 0.5\left\{\left[(8-2)+(27-3)\right]+\left[(8-2)+(8-2)\right]\right\}}{\sqrt{\left[1725-30\right]\left[1725-12\right]}} = -0.95$$

Esercizio

Voti in due discipline per un campione di studenti.

C'è un legame tra i due voti?

rho-Spearman	0.7836
Tc	7.5669
p-value	0.0000

Matricola	Disciplina A	Disciplina B
50825	18	18
64506	18	18
64289	18	18
31136	18	18
81016	20	19
91817	20	19
42720	20	19
92614	21	20
33491	21	20
31947	21	21
56554	21	21
83355	22	21
95516	22	21
44659	22	22
93637	22	22
70350	22	22
53806	23	24
44509	23	24
92149	23	24
86848	23	24
35750	24	24
95748	24	25
76681	25	25
70776	25	25
43071	26	26
42950	26	26
45653	26	26
56123	28	27
53240	28	27
91805	28	27
69069	28	27
77209	29	27
84099	29	27
55360	30	29
48820	30	29
76747	30	30
92951	30	30
66366	30	30

Formula di tau in caso di parità

$$\tau_b = \frac{S}{\sqrt{\left[\binom{n}{2} - \sum_{j=1}^{n_x}\binom{t_j^x}{2}\right]\left[\binom{n}{2} - \sum_{j=1}^{n_y}\binom{t_j^y}{2}\right]}}$$

$$\text{dove} \quad \begin{cases} n_x = \text{numero di gruppi di } X \text{ con parità} \\ t_j^x = \text{numero di valori uguali per la } j-\text{esima parità in } X \\ n_y = \text{numero di gruppi di } Y \text{ con parità} \\ t_j^y = \text{numero di valori uguali per la } j-\text{esima parità in } Y \\ s = \text{numero minimo di interscambi che trasforma } X \text{ in } Y \end{cases}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}\text{sgn}\left(r_i - r_j\right)\text{sgn}\left(s_i - s_j\right) \quad \text{dove} \quad \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -1 & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Calcolo del tau-b di Kendall

Una delle graduatorie è disposta in ordine ascendente (con eventuali parità). L'altra segue per abbinamento.

Per ogni rango del secondo si contano quanti, tra quelli alla sua destra, ne sono superiori

Il totale di questi conteggi darà il valore di "S" nel numeratore del tau.

ESEMPIO

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	4.5	4.5	4.5	4.5	8	8	8	10
1	2.5	2.5	4.5	4.5	6.5	6.5	8	9.5	9.5

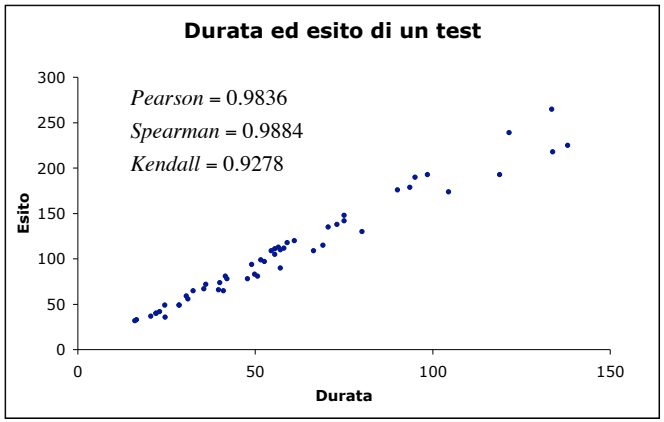
SIGN($B2-A2)*SIGN($B3-A3)

1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
	0	1	1	1	1	1	1	1	7
		0	0	0	1	1	1	1	4
			0	0	1	1	1	1	4
				0	1	1	1	1	4
					0	1	1	1	3
						0	0	1	1
							0	1	1
								0	0
									33

$$\tau_b = \frac{33}{\sqrt{\left[45-(6+3)\right]\left[45-(1+1+1+1)\right]}} = \frac{33}{\sqrt{41*36}} = 0.859$$

Esempio

Esito test	Durata		
134	265	53	97
122	239	49	94
138	225	57	90
134	218	50	83
119	193	42	81
99	193	51	81
95	190	42	78
94	179	48	78
90	176	40	74
104	174	36	72
75	148	36	67
75	142	40	66
73	138	41	65
71	135	33	65
80	130	31	59
61	120	31	56
59	118	25	49
69	115	29	49
57	113	29	49
58	112	23	42
56	111	22	40
57	110	22	40
66	109	21	37
55	109	25	36
56	105	17	33
52	99	16	32



Esercizio

Qualità e costo dei servizi di un resort secondo il giudizio concorde della coppia più facoltosa.

Riesprimete I giudizi in ranghi

b) Calcolate il tau di Kendall

Qualita'	Costo
3	7
3	7
3	6
1	4
3	5
4	3
2	3
2	3
6	7
6	1
6	8
7	9
9	7
8	6
5	2

Tabelle doppie ed ordinamenti

Quando la rilevazione di graduatorie si ripete per un numero elevato di casi i valori sono raccolti in una tabella a doppia entrata con modalità ordinate

ESEMPIO: capacità visiva

	Occhio sinistro				
Occhio destro	1° grado	2° grado	3° grado	Inferiore	
1° grado	821	112	85	35	1053
2° grado	116	494	145	27	782
3° grado	72	151	583	87	893
Inferiore	43	34	106	331	514
	1052	791	919	480	3242

Ai fini del numeratore S del tau-b avremo contributi positivi da celle che stanno sotto e a destra di quella considerata

Inoltre, avremo contributi negativi da celle che stanno sotto e a sinistra di quella considerata

$$112(145+27+583+87+106+331-116-72-43)=112*1048=117376$$

Esempio-Continua

	Occhio sinistro						
Occhio destro	1° grado	2° grado	3° grado	Inferiore			
1° grado	821	112	85	35	1053	**553878**	
2° grado	116	494	145	27	782	**305371**	
3° grado	72	151	583	87	893	**398278**	
Inferiore	43	34	106	331	514	**131841**	
	1052	791	919	480	3242	**5253661**	**3864293**
	552826	**312445**	**421821**	**114960**	**5253661**		
						3851609	
	1607518	117376	-39525	-61040			
	149872	490048	17110	-26703		0.64288695	
	33912	59494	148082	-15921			
					2480223		

Per il denominatore i contributi verranno da

$$\frac{(3242)3241}{2}-\frac{(1053)1052}{2}-\frac{(782)781}{2}-\frac{(893)892}{2}-\frac{(514)513}{2}=3864293$$

$$\frac{(3242)3241}{2}-\frac{(1052)1051}{2}-\frac{(791)790}{2}-\frac{(919)918}{2}-\frac{(480)479}{2}=3864293$$

$$\tau_b=\frac{2480223}{\sqrt{(3864293)3851609}}=0.643$$

Tau-c

Il tau-b ha il difetto di non raggiungere il valore massimo se la tabella è rettangolare.

In questi casi Kendall propone di usare

$$\tau_c=\frac{2S}{n^2\frac{(m-1)}{m}} \quad dove \quad m=Min(r,s)$$

ESEMPIO: Competenza e stipendio

	Classe stipendiale						
Competenza	1°	2°	3°	4°			
1	99	84	44	40	267	**35511**	
2	47	20	10	26	103	**5253**	
3	59	60	55	9	183	**16653**	
	205	164	109	75	553	**152628**	**95211**
	20910	**13366**	**5886**	**2775**	**152628**		
						109691	
	17820	-504	-6644	-10040	Tau-b	0.0092	
	5828	100	-1100	-4524	Tau-c	0.0122	
					936		
	r=	2	m=	2			
	s=	4					

Entrambi gli indici riscontrano assenza di legame.

Non vi preoccupate.
E' un esempio ipotetico

Goodmam-Kruskal

E' un indice in grado di raggiugere il valore massimo anche per tabelle rettangolari

$$\gamma = \frac{N_c - N_d}{N_c + N_d} \quad dove \quad \begin{cases} N_c & contributi \quad positivi \\ N_d & contributi \quad negativi \end{cases}$$

Per costruzione

$$-1 \le \gamma \le 1$$

	Occhio sinistro				
Occhio destro	1° grado	2° grado	3° grado	Inferiore	
1° grado	821	112	85	35	1'053
2° grado	116	494	145	27	782
3° grado	72	151	583	87	893
Inferiore	43	34	106	331	514
	1'052	791	919	480	3'242
	1'607'518	143'248	37'825		
	149'872	546'858	60'610		Gamma 0.7757
	33'912	65'987	192'973		
					2'838'803
		-25'872	-77'350	-61'040	
		-56'810	-43'500	-26'703	
		-6'493	-44'891	-15'921	
					-358'580
					2'480'223

Il numeratore è lo stesso del Tau-b.

Conviene comunque separare il calcolo delle coppie discordi e di quelle concordi

Goodman-Kruskal/2

	Classe stipendiale				
Competenza	1°	2°	3°	4°	
1	99	84	44	40	267
2	47	20	10	26	103
3	59	60	55	9	183
	205	164	109	75	553
	17820	8400	1540	Gamma=	0.0136
	5828	1280	90		
					34958
		-8904	-8184	-10040	
		-1180	-1190	-4524	
					-34022

L'indice esprime la riduzione dell'errore che si commette nel prevedere come una coppia di unità si ordinerà rispetto ad una variabile allorché si apprende come sia ordinata rispetto all'altra.

Essendo prossimo allo zero ciò implica che conoscendo la classe stipendiale non si può essere conclusivi rispetto alla competenza.

Esercizio

Table 1
Numbers (proportions within treatment groups) of patients in a clinical trial of patients who experienced trauma, for comparing four treatment groups using the Glasgow Outcome Scale

	Death	Vegetative state	Major disability	Minor disability	Good recovery	Total
Placebo	59 (0.28)	25 (0.12)	46 (0.22)	48 (0.23)	32 (0.15)	210
Low dose	48 (0.25)	21 (0.11)	44 (0.23)	47 (0.25)	30 (0.16)	190
Medium dose	44 (0.21)	14 (0.07)	54 (0.26)	64 (0.31)	31 (0.15)	207
High dose	43 (0.22)	4 (0.02)	49 (0.25)	58 (0.30)	41 (0.21)	195

$\gamma = 0.118$

Come si interpreta?