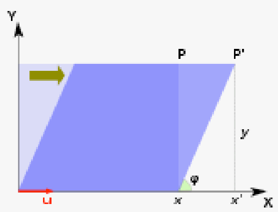
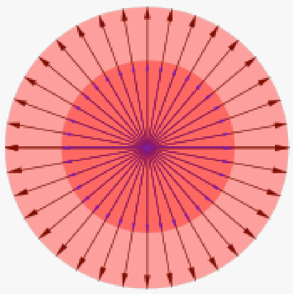
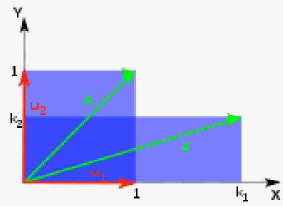
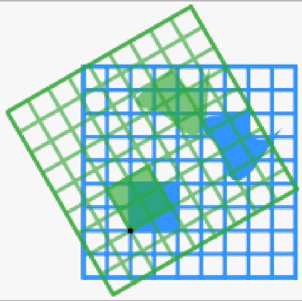
Autovalori e autovettori

Equazione caratteristica
Molti problemi interessanti in un gran numero di discipline scientifiche si possono ricondurre alla seguente relazione matriciale

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

dove **A** è una matrice quadrata, **x** è un vettore non nullo e λ uno scalare. in cui una trasformata lineare del vettore **x** risuta uguale ad un semplice riscaldamento dello stesso vettore **x**. Di solito, la moltiplicazione di una matrice per un vettore comporta modifiche importanti nello stesso vettore. Nel caso però che i cambiamenti si limitino ad un cambio di scala e/o di orientamento mantenendo inalterate le componenti del vettore **x** si parla di **x** come di autovettore della matrice **A** e di λ come autovalore della matrice **A**.

	horizontal shear	scaling	unequal scaling	counterclockwise rotation by φ
				
	$\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$
	$\lambda^2 - 2\lambda+1 = (1-\lambda)^2 = 0$	$\lambda^2 - 2\lambda k + k^2 = (\lambda - k)^2 = 0$	$(\lambda - k_1)(\lambda - k_2) = 0$	$\lambda^2 - 2\lambda\cos\phi + 1 = 0$
	$\lambda_1=1$	$\lambda_1=k$	$\lambda_1 = k_1, \lambda_2 = k_2$	$\lambda_{1,2} = \cos\phi \pm i\sin\phi = e^{\pm i\phi}$
s	$n_1 = 2, m_1 = 1$	$n_1 = 2, m_1 = 2$	$n_1 = m_1 = 1, n_2 = m_2 = 1$	$n_1 = m_1 = 1, n_2 = m_2 = 1$
	$\mathbf{u}_1 = (1,0)$	$\mathbf{u}_1 = (1,0), \mathbf{u}_2 = (0,1)$	$\mathbf{u}_1 = (1,0), \mathbf{u}_2 = (0,1)$	$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}.$

Sia **x** che λ sono soluzioni del sistema di equazioni lineari omogenee

$$\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Se il determinante della matrice dei coefficienti

$$|\mathbf{A} - \lambda I|$$

è nullo allora l'unica soluzione possibile è **x=0**, detta banale poiché non richiede nessun particolare sforzo per essere determinata. Se invece il determinante è nullo si apre la via a diversi ragionamenti interessanti.

Ad ogni matrice quadrata **A** di ordine m è associata una funzione polinomiale ottenuta dal determinante della matrice **A** a cui è sottratta la matrice identità moltiplicata per uno scalare.

$$[A-\lambda I]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm-2} \end{bmatrix}$$

Lo sviluppo del determinante produce la cosiddetta equazione caratteristica:

$$|A-\lambda I| = C_0\lambda^m + C_1\lambda^{m-1} + \ldots + C_{m-1} + C_m = 0$$

Se indichiamo con t_i la traccia della potenza i-esima della matrice **A** e cioè

$$t_i = Tr\left(A^i\right) = Tr\left(\overset{i\ \ volte}{AAA\ldots A}\right)$$

I coefficienti dell'equazione caratteristica sono calcolabili dalla relazione con a traccia delle potenze della matrice.

$$C_0 = 1 \qquad C_3 = -\frac{1}{3}\left(C_2t_1 + C_1t_2 + t_3\right)$$

$$C_1 = -t_1 \qquad \vdots$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}\left(C_1t_1 + t_2\right) \qquad C_m = -\frac{1}{m}\left(C_{m-1}t_1 + C_{m-2}t_2 + \ldots + C_1t_{m-1} + t_m\right)$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \qquad A^2 = A\cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 6 & 12 & 10 \\ 4 & 10 & 13 \end{bmatrix};$$

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{bmatrix} 17 & 30 & 24 \\ 30 & 56 & 54 \\ 24 & 54 & 59 \end{bmatrix}; \qquad \begin{aligned} t_1 &= 1+2+3=6 \\ t_2 &= 5+12+13=30 \\ t_3 &= 17+56+59=132 \end{aligned}$$

$$C_0 = 1; \quad C_1 = -6; \quad C_2 = \frac{1}{2}\left((-6)-6+30\right) = 3; \quad C_3 = -\frac{1}{3}\left[(3)\cdot 6 + (-6)30 + 132\right] = 10$$

Ne consegue che l'equazione caratteristica è

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 10 = 0$$

L'equazione caratteristica, come ogni polinomio, può essere scritta come un prodotto

$$|A-\lambda I| = (-1)^m(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_m)$$

Le radici dell'equazione caratteristica sono gli autovalori di **A**. Quindi esistono m soluzioni, non necessariamente reali e/o distinte, rispetto al sistema di equazioni **Ax**=λ**x**.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \quad (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

Le radici λ_1 =4 e λ_2 =1 sono gli autovalori della matrice **A**.

La traccia di una matrice quadrata è pari alla somma dei suoi autovalori.

Consideriamo la fattorizzazione dell'equazione caratteristica

$$f(\lambda) = (-1)^m \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)$$

Il coefficiente della potenza λ^{m-1} espresso in termini della traccia è

$$c_1 = (-1)^{m-1} \sum_{i=1}^{m} a_{ii} = (-1)^{m-1} (a_{11} + a_{22} + \cdots a_{nn}) = (-1)^{m-1} tr(A)$$

che deve coincidere con lo sviluppo della fattorizzazione

$$(-1)^{m-1} Tr(A) = (-1)^{m+1} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

quindi

$$c_1 = (-1)^{m+1} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \text{ e pertanto } \quad Tr(A) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

Il determinante di una matrice quadrata coincide con il prodotto dei suoi autovalori

$$|A| = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \quad ; \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 13-\lambda & -4 \\ -4 & 7-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \quad (13-\lambda)(7-\lambda) - 16 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 20\lambda + 75 = 0$$

$$\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 15, \quad \lambda_1\lambda_2 = 5 * 15 = 75; \qquad |A| = (13)(7) - (-4)(-4) = 91 - 16 = 75$$

Gli autovettori
Molte applicazioni statistiche coinvolgono un insieme di vettori non nulli associati ad una data matrice ed in particolare ai suoi autovalori. La relazione che interessa è la seguente

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{x}_i = 0 \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \quad i = 1,2,\cdots,m$$

Dove m è il numero di vettori linearmente indipendenti presenti nella matrice **A**; $\mathbf{x}_i$ è un autovettore associato all'autovalore λ_i. Il sistema di equazioni omogenee

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{x}_i = 0$$

ha almeno una soluzione non banale se λ_i è un autovalore di **A**. Si verifica subito che c'è un problema di univocità. Se $\mathbf{x}_i$ è un autovettore associato a λ_i lo sarà anche $k\mathbf{x}_i$ dove k è uno scalare non nullo. Infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{A}x_i &= \lambda_i \mathbf{x}_i \\ \mathbf{A} \cdot k\mathbf{x}_i &= \lambda k\mathbf{x}_i \\ \mathbf{A}\mathbf{y}_i &= \lambda_i \mathbf{y}_i \qquad \text{con} \quad y_i = k\mathbf{x}_i \end{aligned}$$

Quindi, ad ogni autovalore sono associati infiniti autovettori che però differiscono tra di loro solo per un fattore moltiplicativo.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 4 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1$$

$$(A - 4I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x_1 | x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

x_1=1 e x_2=1 produce (1,1) che è un autovettore associato a λ_1 =4. Allo stesso modo, per λ_2 =1 si ha

$$\left\{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2x_1 = x_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ne consegue che

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

È una matrice formata con degli autovettori associati agli autovalori della matrice **A**. Naturalmente, anche la matrice

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & -2k_2 \end{bmatrix} \qquad k_1 \text{ e } k_2 \neq 0$$

È una matrice di autovettori associati agli autovalori di **A**. Da notare che gli autovettori così ottenuti sono linearmente indipendenti. Infatti, la relazione:

$$k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

è verificata se e solo se $k_1=k_2=0$ il che è escluso dalla condizione posta sugli scalari k_1 e k_2.

Il calcolo degli autovalori e dei corrispondenti autovettori non può essere basato sulla determinazione delle radici dell'equazione caratteristica che abbiamo utilizzato per matrici (2x2). Infatti, supponiamo che l'equazione caratteristica sia

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$$

che diventa

$$\gamma^3 + a\gamma + b = 0$$

con il cambio di variabile $\lambda=\gamma-p/3$ cioè se si pone

$$a = q - \frac{p^2}{3}$$
$$b = \frac{2p^3 - 9pq + 27r}{27}$$

si può calcolare la quantità pseudo-discriminante $d=b^2/4 + a^3/27$ cosicché:

d>0	Una radice reale $\gamma_1=(-b/2+d)^{(1/3)} + (-b/2-d)^{(1/3)}$ e due immaginarie
d=0	Tre radici reali di cui almeno due uguali: $\gamma_1=(-b/2)^{(1/3)}$, $\gamma_2=(b/2)^{(1/3)}$, $\gamma_3=(b/2)^{(1/3)}$
d<0	Tre radici reali e distinte: $\gamma_1=2(a/3)^{0.5}\cos(\theta/3)$, $\gamma_2=2(-a/3)^{0.5}\cos(\theta/3+2\pi/3)$, $\gamma_3=2(-a/3)^{0.5}\cos(\theta/3+2\pi/3)$ dove $\cos(\theta)=-2.59808b/(-a)^{1.5}$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1$$

E' chiaro che non si può procedere in questo modo artigianale. Per fortuna sono disponibili diversi algoritmi di calcolo rapidi ed efficienti che risolvono brillantemente il problema della determinazione industriale degli autovalori ed autovettori.

Matrici ortogonali

Una matrice è ortogonale se

$$\text{a) } A \text{ è quadrata; b) } A \cdot A^t = I; \quad \text{c) } A^t A = I$$

- Il prodotto di matrici ortogonali è ortogonale
-

$$\text{Se } AA^t = A^t A = I \text{ e } BB^t = B^t B = I \qquad \text{allora}$$

-

$$\left(A \cdot B\right) \cdot B^t A^t = ABB^t A^t = AA^t = I$$
$$B^t A^t AB = B^t B = I$$

- L'inversa della matrice ortogonale **Q** coincide con la sua trasposta

$$Q^t = Q^{-1} \Rightarrow Q^t Q = I$$

- Il determinante di **A** ortogonale è 1 oppure –1 dato che

$$A \cdot A^t = I \Rightarrow \qquad \left|A \cdot A^t\right| = |I| = 1$$

Tuttavia

$$\left|A \cdot A^t\right| = |A| \cdot \left|A^t\right| = |A|^2 \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

Se **A** è ortogonale e λ_k è un autovalore di **A** allora anche $(\lambda_k)^{-1}$ è pure un autovalore di **A**. Infatti

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2, \ldots, \lambda_m$$

Se m è pari, ad ogni λ_k corrisponde un $(\lambda_k)^{-1}$. Se m è dispari almeno un autovalore è pari a ±1.

- **Matrice di Householder**

$$H = I - 2xx^t \qquad \text{con} \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad x^t x = 1$$

H è ortogonale

$$\begin{aligned} H \cdot H^t &= \left(I - 2xx^t\right)\left(I - 2xx^t\right) = \left(I - 2xx^t\right)\left(I - 2xx^t\right) \\ &= I - 2xx^t - 2xx^t + 4xx^t = I \end{aligned}$$

Autovalori di una matrice diagonale

$$A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & (a_{m-\lambda}) \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} (a_1 - \lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (a_2 - \lambda) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & (a_m - \lambda) \end{bmatrix}$$

L'equazione caratteristica è

$$|A - \lambda I| = \prod_{i=1}^{m} (a_i - \lambda) = (a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda)\ldots(a_m - \lambda)$$

Quindi gli autovalori della matrice diagonale coincidono con i valori sulla diagonale.

Autovettori di una matrice diagonale
Hanno tutti forma:

$$\alpha e_i = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dove 1 è imposizione i - esima.}$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 6, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -7$$

Autovalori della matrice inversa.
Se λ è un autovalore non nullo di **A** allora $(\lambda)^{-1}$ è un autovalore di $\mathbf{A}^{-1}$ (se l'inversa esiste). Infatti

$$\mathbf{Au} = \lambda \mathbf{u}$$
$$\mathbf{A}^{-1} A\mathbf{u} = \lambda A^{-1}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{u} = \lambda A^{-1}\mathbf{u}$$
$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \Rightarrow \left(\mathbf{A}^{-1} - \frac{1}{\lambda} I\right)\mathbf{u} = 0$$

Si noti anche se μ è un autovettore della matrice **A** associato a λ allora μ è anche un autovettore della matrice $\mathbf{A}^{-1}$ associato a $(\lambda)^{-1}$.

Autovalori della matrice (A+βI) e dei suoi autovettori
Indichiamo con λ un autovalore di **A** e μ un autovettore ad esso associato

$$\mathbf{Au} = \lambda \mathbf{u}$$
$$\beta \mathbf{I} \mu + A\mathbf{u} = \lambda \mu + \beta \mathbf{I} \mathbf{u}$$
$$(\mathbf{A} + \beta \mathbf{I})\mathbf{u} = (\lambda + \beta)\mathbf{u}$$

Quindi (λ+β) è un autovalore della matrice (**A**+β**I**) e **u** che è un autovettore di **A** è anche autovettore di (**A**+β**I**).

Autovalori della potenza di una matrice.
Sia λ_k un autovalore della matrice quadrata **A** di ordine m.

$$\mathbf{Au} = \lambda \mathbf{u}$$

Moltiplicando per **A** entrambi i termini otteniamo

$$\mathbf{A}^2\mathbf{u} = \lambda_k A\mathbf{u} \Rightarrow A^2\mathbf{u} = \lambda \cdot \lambda \mathbf{u} = \lambda^2 \mathbf{u}$$

Se λ un autovalore di **A** allora $(\lambda)^p$ è un autovalore di $\mathbf{A}^p$ ed **A** condivide gli autovettori con $\mathbf{A}^p$.

Proprietà dell'equazione caratteristica
Poiché l'equazione caratteristica è un determinante ad essa si applicano le proprietà dei determinanti.

a) Gli autovalori di **A** e $\mathbf{A}^{\mathbf{t}}$ sono uguali. Infatti
b)

$$\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right)^t=\left(\mathbf{A}^t-\lambda\mathbf{I}\right)$$

b) |**AB**|=|**A**||**B**| se **A** e **B** sono quadrate e dello stesso ordine. Quindi

$$\left|\left(A-\lambda I\right)\left(B-\beta I\right)\right|=\left|A-\lambda I\right|\cdot\left|B-\beta I\right|$$

c) Il determinante di una matrice triangolare (inferiore o superiore) è pari al prodotto degli elementi sulla diagonale.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}\Rightarrow\left|A\right|=a_{11}a_{22}\cdots a_{mm}$$

d) Se **P** una matrice quadrata ed abbiano **Q** e **W** lo stesso ordine. Allora
e)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{W} & \mathbf{Q} \end{vmatrix}=\left|\mathbf{P}\right|\cdot\left|\mathbf{Q}\right|$$

Quindi

$$\begin{vmatrix} \mathbf{P}-\lambda\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{W} & \mathbf{Q}-\beta\mathbf{I} \end{vmatrix}=\left|\mathbf{P}-\lambda\mathbf{I}\right|\cdot\left|\mathbf{Q}-\beta\mathbf{I}\right|$$

f) Se **P** e **Q** sono dello stesso ordine si ha
g)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Q} \end{vmatrix}=\left|\mathbf{P}\right|$$

h) scambiando due righe o due colonne non cambia gli autovalori. Infatti il determinante cambia di segno, ma l'equazione caratteristica è uguagliata a zero e ciò non ha quindi effetto.

Teorema di Hamilton-Cayley
Ogni matrice quadrata soddisfa la sua equazione caratteristica

$$f\left(\lambda\right)=C_0\lambda^m+C_1\lambda^{m-1}+\ldots+C_{m-1}+C_m=0$$

Se al posto dello scalare λ si sostituisce la matrice **A** e si considerano le corrispondenti potenze di matrici, si ottiene

$$f\left(\mathbf{A}\right)=C_0\mathbf{A}^m+C_1\mathbf{A}^{m-1}+\ldots+C_{m-1}\mathbf{A}+C_mI=0$$

Se post-moltiplichiamo f(**A**) (che è una matrice) per un l'autovettore **x** associato all'autovalore λ, allora

$$f(\mathbf{A})\mathbf{x} = \left[\sum_{i=1}^{m+1} C_{i-1}\mathbf{A}^i\right]\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m+1} C_{i-1}\mathbf{A}^i\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m+1} C_{i-1}\lambda^i\mathbf{x} = \left[\sum_{i=1}^{m+1} C_{i-1}\lambda^i\right]\mathbf{x}$$

e poiché λ è un atovalore di **A**, verifica l'equazione caratteristica per cui

$$\sum_{i=1}^{m+1} C_{i-1}\lambda^i = 0$$

e, pertanto, f(**A**)**x**=0.

Autovettori riga e autovettori colonna
Sebbene l'uso comune veda autovettori colonna cioè soluzioni che verificano

$$A\mu = \lambda\mu$$

esistono anche gli autovettori riga e cioè soluzioni del sistema

$$\mu^t A = \lambda\mu^t$$

che in genere sono diversi (a meno che **A** non sia una matrice simmetrica).

Spettro della matrice A
L'insieme degli autovalori della matrice **A** è anche noto come spettro di **A** e di solito gli autovalori sono posti in ordine decrescente di grandezza

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m$$

In particolare, l'autovalore di modulo massimo è noto come raggio spettrale di **A**.

$$\text{raggio spettrale } = \rho(A) = \max_{1\leq i\leq m}\left\{|\lambda| \ \ |\lambda_i \text{ autovalore di } A\right\}$$

Determinante ed autovalori
Se un autovalore è zero allora il determinante della matrice è nullo. Infatti

$$|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^{m}\lambda_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_m$$

e basta che uno solo degli autovalori sia nullo perché si abbia |**A**|=0. Inoltre, a causa del prodotto, il determinante risulta molto sensibile ai valori piccoli (cioè quelli che in valore assoluto sono inferiori all'unità).

Rango di una matrice
E'dato dal numero di vettori linearmente indipendenti in essa contenuti. Se **A** è di ordine (nxm) allora

$$r(\mathbf{A}) \leq \min\{n,m\}$$

cioè **A** non può contenere vettori LIN più di quanto non sia il più piccolo tra numero di righe "n" e numero di colonne "m".

a) Se **A** è quadrata di ordine "m" il rango di **A** verifica la relazione

$$r(A) \geq m - z(A)$$

Dove z(**A**) è il numero di autovalori non nulli nella equazione caratteristica della matrice

b) Se **A** è una matrice diagonale allora il suo rango è uguale al numero di colonne o righe non nulle.

$$A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}) \;\; ; \;\; r(A) = m \quad \text{se} \quad a_{ii} \neq 0 \quad i = 1,2,\ldots,m$$

c) Rango di un prodotto. Se **C=AB** allora

$$r(C) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

perché se una matrice è moltiplicata per una matrice non singolare allora il suo rango rimane invariato.

$$C = Q \cdot A \qquad \text{dove } Q^{-1} \text{ esiste} \Rightarrow r(C) \leq r(A)$$

Tuttavia

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C} \qquad \Rightarrow \; r(\mathbf{A}) \leq r(\mathbf{C}) \quad \text{e quindi} \quad r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{C})$$

d) Il rango di una matrice è pari al numero di autovalori diversi da zero associati alla matrice.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \; \lambda_2 = 1$$

In questo caso il rango è pari a 2.

Autovalori di una matrice triangolare (inferiore o superiore)
Se **A** è una matrice triangolare, gli autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale. Infatti

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ 0 & (a_{22}-\lambda) & \ldots & a_{2m} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & (a_{mm}-\lambda) \end{bmatrix} \quad \text{che è ancora triangolare}$$

Poiché il determinante della matrice triangolare è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale, avremo

$$|A = \lambda I| = \prod_{i=1}^{m} (a_{ii} - \lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\ldots(a_{mm} - \lambda) = 0$$

Con evidenti radici

$$\lambda_i = a_{ii} \quad i = 1,2,\ldots,m.$$

Calcolo degli autovettori

Consideriamo matrici quadrate di ordine "m"

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ con autovalori } \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -4$$

si deve determinare un vettore **u** tale che

$$Au = \lambda_k u \Rightarrow (A - \lambda_k I) = 0 \quad \text{con} \quad u \neq 0$$

per k=1,2,3. Tale sistema ha un numero di soluzioni linearmente indipendenti (LIN) pari a

$$m - r(A - \lambda_k I)$$

Le soluzioni si ottengono da

$$u_k = \left[G^-(A - \lambda_k I) - I\right]z$$

Dove $\mathbf{G}^-$ è la cosiddetta inversa generalizzata di ($\mathbf{A}$-$\lambda_k I$) e **z** un vettore arbitrario. In breve, $\mathbf{G}^-$ soddisfa la condizione $\mathbf{GG^-G=G}$ (1ª condizione di Moore-Penrose). Possiamo scriverne l'inversa generalizzata come

$$(\mathbf{A} - \lambda_\mathbf{k}\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B_k} & \mathbf{C_k} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

Dove $\mathbf{B}_k$ è non singolare (cioè esiste la sua inversa ordinaria) ed ha lo stesso rango di ($\mathbf{A}$-$\lambda_k\mathbf{I}$). Effettuiamo adesso la partizione del vettore arbitrario **z**

$$\mathbf{z}^t = [-\mathbf{z}_1 \vdots - \mathbf{z}_2]$$

Dove z_1 ha un numero di elementi pari al rango di ($\mathbf{A}$-$\lambda_k\mathbf{I}$).

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})^- = \begin{bmatrix} B_k^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ con matrice nulle di dimensioni opportune}$$

Ecco quindi il calcolo dell'autovettore

$$\mathbf{u}_k = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{B_k^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B_k} & \mathbf{C_k} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I_t} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I_{m-t}} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -\mathbf{z_1} \\ -\mathbf{z_2} \end{bmatrix} \quad con \quad t = ran(A - \lambda_k I)$$

che implica

$$\mathbf{u}_k = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{I_t} & \mathbf{B_k^{-1}C_k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I_k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I_{m-t}} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -\mathbf{z_1} \\ -\mathbf{z_2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B_k^{-1}C_k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{z_1} \\ -\mathbf{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\mathbf{B_k C_k z_2} \\ \mathbf{z_2} \end{bmatrix}$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -4$$

Per $\lambda_1 = 3$ si ha

$$\mathbf{A} - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -7 & 2 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{G}^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{Z}^t = \left[-\mathbf{Z}_1 \vdots \alpha \right] \ con \ \alpha \ scalare$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha/2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Poiché α è arbitrario possiamo scegliere $\alpha=2$ per ottenere

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

con tutti valori interi.

Calcolo degli autovettori per autovalori multipli

Se l'autovalore λ_k ha molteplicità m_k il rango di ($\mathbf{A}$-$\lambda_k \boldsymbol{I}$) deve essere stabilito di volta in volta

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \ Equaz.Caratt.: (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 1\right) \text{ e con } \lambda_1 = 1 \ \ \text{(2 volte) e } \ \lambda_2 = -1$$

All'autovalore λ_1 corrisponde

$$\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-2 & -2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$ che ha rango 1 quindi vi sono $(3-1)=2$ vettori LIN associati a $\lambda_1=1$

Poniamo

$$B_1=-\frac{1}{2};\quad C_1=\begin{bmatrix}-2 & -2\end{bmatrix};\quad Z^t=\left[Z_1 \vdots \alpha_1\alpha_2\right]$$

Per cui

$$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(\alpha_1+\alpha_2)\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$$

Per λ_2=-1 otteniamo

$$\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$ che ha rango 2.

Posto

$$\mathbf{B}_2=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix};\ \mathbf{C}_2=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix};\ \mathbf{Z}^t=\left[\mathbf{Z}_1 \vdots \alpha\right]$$

si ottiene

$$\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\alpha\\ \alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\alpha\\ -\alpha\\ \alpha\end{bmatrix}$$

Dando i valori

$$(\alpha_1=1,\ \alpha_2=0),(\alpha_1=0,\alpha_2=1),\ \alpha=1$$

avremo

$$U=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$ che ha $|U|\neq 0$ e quindi i tre autovettori sono LIN

Altro esempio

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 4 & 5\end{bmatrix}$$ con $E.C.:(\lambda-1)^2(\lambda-6)$ e con $\lambda_2=1$ (2 volte) e $\lambda_1=6$.

$$(A-\lambda_2 I)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

Il rango di questa matrice è 2: infatti la 3ª riga si ottiene sommando alla 2ª la 1ª moltiplicata per due.

Se il rango è 2, allora esistono 3-ran($\mathbf{A}$-λ_2 $\mathbf{I}$)=3-2=1 vettori LIN associati a λ_2 =1. Se definiamo

$$B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad C_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad Z^t = [Z_1 \vdots \alpha]$$

Otteniamo

$$u_2 = \begin{bmatrix} +\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Per λ_1 =6 si ha

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

che ha pure rango 2 dato che la 3ª è ottenuta sommando la 2ª per (-2) e sommando due.
Definiamo ora:

$$B_1 = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}; \quad C_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad Z^t = [Z_1 \vdots \alpha] \text{ otteniamo } u_1 = \begin{bmatrix} 3/8\,\alpha \\ 2/8\,\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

quindi le radici della equazione caratteristica sono tre, ma i vettori LIN ottenibili sono due. Ne consegue che, se gli autovalori non sono distinti non necessariamente è possibile ottenere m autovettori linearmente indipendenti.

g) Gli autovalori non nulli di $\mathbf{XX}^t$ sono gli stessi di $\mathbf{X}^t\mathbf{X}$.
Gli autovalori non nulli di $\mathbf{XX}^t$ risolvono le seguenti equazioni

$$(XX^t)u_k = \lambda_k u_k \quad con \quad u_k{}^t u_k = 1$$

premoltiplicando entrambi i membri della prima relazione per $\mathbf{X}^t$ si ottiene

$$X^t(XX^t)u_k = \lambda_k X^t u_k \quad \Rightarrow (X^t X)X^t u_k = \lambda_k X^t u_k \Rightarrow (X^t X)v_k = \lambda_k v_k$$

che evidenzia $\mathbf{v}_k$ come autovettore (non normalizzato di $\mathbf{X}^t\mathbf{X}$). La norma di tali autovettori è pari infatti all'autovalore.

$$\sqrt{v_k{}^t v_k} = \sqrt{u_k{}^t XX^t u_k} = \sqrt{u_k{}^t \lambda_k u_k} = \lambda_k \sqrt{u_k{}^t u_k} = \lambda_k$$

Autovalori distinti e indipendenza lineare degli autovettori
Sia A quadrata di ordine “m” ed ipotizziamo che gli autovalori siano tutti distinti. Ipotizziamo inoltre che gli autovettori associati agli autovettori siano LID cioè linearmente dipendenti. La dipendenza lineare implica che esistano degli scalari

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$$

Non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \mathbf{u}_i = 0 \quad \text{cioè} \quad \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \beta_m \mathbf{u}_m = 0 \quad \textit{per almeno un } \beta_i \neq 0$$

Moltiplichiamo ora ogni termine per il prodotto

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I}) \ldots (\mathbf{A} - \lambda_m \mathbf{I})$$

Ottenendo

$$\begin{aligned} &\beta_1 \mathbf{u}_1 \left[(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_m \mathbf{I}) \right] + \beta_2 \mathbf{u}_2 \left[(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_m \mathbf{I}) \right] + \cdots + \\ &\beta_m \mathbf{u}_m \left[(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_m \mathbf{I}) \right] = 0 \end{aligned}$$

Per k≠ 1 gli addendi sono tutti nulli dato che uno dei fattori

$$\beta_k \mathbf{u}_k (\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})$$

è zero poiché λ_k è un autovalore e $\mathbf{u}_k$ un autovettore. Quindi

$$\beta_1 \left[(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_m \mathbf{I}) \right] \mathbf{u}_1 = 0$$

che equivale a

$$\begin{aligned} &= \beta_1 \left[(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I) \cdots (A - \lambda_{m-1} I) \right] (A - \lambda_m I) u_1 = 0 \\ &= \beta_1 \left[(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I) \cdots (A - \lambda_{m-1} I) \right] (A u_1 - \lambda_m u_1) = 0 \\ &= \beta_1 \left[(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I) \cdots (A - \lambda_{m-1} I) \right] (\lambda_1 u_1 - \lambda_m u_1) = 0 \\ &= \beta_1 \left[(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I) \cdots (A - \lambda_{m-1} I) \right] u_1 (\lambda_1 - \lambda_m) = 0 \end{aligned}$$

e che si riduce a

$$\beta_1 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \cdots (\lambda_1 - \lambda_m) \mathbf{u}_1 = 0$$

Poiché gli autovalori sono distinti ciò implica che β_1=0. Lo stesso si può dire per gli altri coefficienti β_i e questo contraddice l’ipotesi di dipendenza lineare in cui almeno uno dei β_i è diverso da zero. Quindi gli autovettori associati ad autovalori distinti sono LIN.

Autovalori ripetuti e indipendenza lineare
A è quadrata di ordine m. Supponiamo che l'autovalore λ_k abbia molteplicità m_k e che esistano p autovalori distinti

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$$

tali che

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = m$$

La matrice **A** avrà associati "m" autovettori LIN se e solo se si verifica la seguente condizione

$$r(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}) = m - m_k \quad \text{per} \quad k = 1,2,\ldots,p$$

Sufficienza. Se

$$r(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}) = n - m_k \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})\mathbf{u}_k \ \text{ ha } m - (m - m_k) = m_k \quad \text{soluzioni LIN.}$$

Per dimostrare che autovettori in gruppi diversi siano LIN supponiamo che non lo siano. In particolare supponiamo che $\mathbf{u_k}$ associato a λ_k sia una combinazione lineare degli autovettori $\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\ldots,\mathbf{z}_p$ associati a λ_h h=1,2,…,p con h≠k. In breve si ipotizza che

$$\mathbf{u}_k = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \mathbf{z}_i \quad con \quad \beta_i \neq 0 \quad per \quad almeno \quad un \quad i$$

Allora

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_k = \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i \mathbf{A}\mathbf{z}_i \Rightarrow \lambda_h \mathbf{u}_k = \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i \lambda_k \mathbf{z}_i = \lambda_k \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i \mathbf{z}_i$$

Si dovrebbe perciò avere: λ_k $\mathbf{u_k}$= λ_h $\mathbf{u_k}$ che è impossibile dato che si è posto $\lambda_k \neq \lambda_h$

Necessità. Ciò equivale a dimostrare che se $\mathbf{U}^{-1}$ **AU=D** esiste, allora si ha ran(**A**-λ_k **I**)=m-r . Sia **D** la matrice diagonale formata con gli "m" autovalori della matrice **A**. Ne consegue che (**D**-λ_k **I**) ha esattamente m_k zeri sulla diagonale e cioè tanti quanto è la molteplicità di λ_k . Quindi ran(**D**-λ_k **I**)=m- m_k
Poiché esiste $\mathbf{U}^{-1}$ **AU=D** ne consegue che **A**=$\mathbf{UD}^{-1}\mathbf{U}$ e quindi

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}) = \left(\mathbf{UDU}^{-1} - \lambda_k \mathbf{I}\right) = U[\mathbf{D} - \lambda_k \mathbf{I}]\mathbf{U}^{-1}$$

e poiché ran(**D**-λ_k **I**)=m- m_k, lo stesso sarà per **A**-λ_k**I** perché il rango rimane invariato se la matrice è moltiplicata per matrici non singolari.

In generale quindi, se ci sono autovalori ripetuti diversi da zero, siamo sicuri che il rango della matrice originaria non è compromesso, ma il rango della matrice formata con gli autovettori sarà pieno solo se gli autovalori sono distinti oppure, se ripetuti, si verifica la condizione posta all'inizio del paragrafo.

Matrici in forma canonica simile
Se **A** è quadrata di ordine m, ad ogni autovalore λ_k di **A** può essere associato un autovettore tale che

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k \quad \text{per} \quad k = 1,2,\ldots,m$$

Aggreghiamo le m relazioni nella notazione compatta

$$\mathbf{A}\left[\mathbf{u_1 u_2} \vdots \mathbf{u_m}\right]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix} \; ovvero \;\; \mathbf{AU} = \mathbf{UD}$$

Dove **U** è formata dagli autovettori e **D** è una matrice diagonale

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right)$$

D è la forma canonica simile di **A**.

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad E.C. \quad (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 1\right) = 0$$

Con

$$\lambda_1 = 1, \;\; \lambda_2 = 1, \;\;\; \lambda_3 = -1, \;\; \text{e, ad esempio,} \;\; \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AU} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{UD} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se **U** è non singolare allora $\mathbf{U^{-1}\ AU=U^{-1}\ UD=D}$.

Diagonalizzazione di una matrice
Data la matrice quadrata **A** di ordine m è possibile impostare la relazione **AU=UD** dove **D** è una matrice diagonale i cui elementi sono gli autovalori di **A** ed **U** una matrice formata con gli autovettori ad essi associati. La matrice **U** è non singolare se

$$r\left(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}\right) = m - m_k \quad \text{per } k = 1,2,\cdots,P$$

con m_k molteplicità di λ_k e p numero di autovalori distinti. In questo caso si può porre la relazione

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{D}$$

Se la relazione sul rango non è verificata per qualche λ_k allora **A** è “deficitaria” e $\mathbf{U}^{-1}$ non esiste. Ciò può succedere però solo in caso di autovalori ripetuti.

a) Il determinante di **A** è uguale al determinante di **D**.

$$\left|U^{-1}AU\right| = |D| \Rightarrow \left|U^{-1}\right| \cdot |A| \cdot |U| \quad \text{dato che } \ |A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

$$\text{poiché } \ \left|U^{-1}\right| = 1/|U| \Rightarrow \left|U^{-1}AU\right| = \left|U^{-1}\right| \cdot |A| \cdot |U| = |A| \ \text{ e quindi } |A| = |D|$$

b) **A** e **D** hanno la stessa equazione caratteristica e quindi gli stessi autovalori. Il converso però non è vero: **P** e **Q** possono avere gli stessi autovalori (e quindi lo stesso determinante) ma non necessariamente risulteranno simili nel senso prima descritto. Le due matrici

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hanno gli stessi autovalori $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=1$, ma per ogni qualunque matrice non singolare **C** si ha $\mathbf{C}^{-1}\ \mathbf{PC}=\mathbf{I}$. dato che P=I e quindi non esiste una matrice **U** tale che $\mathbf{U}^{-1}\ \mathbf{PU}=\mathbf{Q}$

c) La relazione $\mathbf{U}^{-1}\ \mathbf{AU}=\mathbf{D}$ implica che $\mathbf{A}=\mathbf{UDU}^{-1}$ e quindi
d)

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{UDU}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{UD}^2\mathbf{U}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^p = \mathbf{UD}^p\mathbf{U}^{-1}$$

e questo è vero per ogni intero p (inclusi i negativi).

Matrici simmetriche

Le matrici simmetriche hanno alcune proprietà interessanti rispetto ad autovalori e autovettori che conviene studiarle separatamente. Una matrice quadrata **A** è simmetrica quando è identica alla sua trasposta

$$A = A^t \quad a_{ij} = a_{ji} \qquad i = 1,2,\ldots,m; \quad j = 1,2,\ldots,m$$

a) Se gli elementi di **A** sono reali ed **A** è simmetrica allora le radici dell’equazione caratteristica sono pure reali.

b) Tutte le matrici simmetriche sono diagonalizzabili e cioè esiste $\mathbf{U}^{-1}$ tale che

$$A = UDU^{-1} \qquad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$$

c) Gli autovettori di una matrice simmetrica sono ortogonali a due a due

<u>Caso 1.</u> Autovalori distinti

Siano $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ gli autovettori associati

$$Au_1 = \lambda_1 u_1 \quad \Rightarrow \quad u_2^T A u_1 = \lambda_1 u_2^T u_1$$

Poiché autovettori riga e colonna coincidono si ha

$$\lambda_2 u_2^T u_1 = \lambda_1 u_2^T u_1$$

e dato che $\lambda_1 \neq \lambda_2$ l'identità è possibile solo se

$$u_2^T u_1 = 0 \text{ sono vettori ortogonali}$$

Questo vale per ogni coppia di autovalori e di autovettori.

Caso 2. Autovalori ripetuti. La dimostrazione è più complessa, ma è accertato che se **A** è simmetrica e λ_k è un suo autovalore con molteplicità m_k allora ran(**A**-λ_k **I**)=n- m_k e (**A**-λ_k **I**)**u**=**0** ha m_k soluzioni LIN e ortogonali.

d) Il rango di una matrice simmetrica coincide con il numero di autovalori diversi da zero. Infatti, poiché $\mathbf{A}=\mathbf{UDU}^{\mathbf{t}}$ ran(**A**) e ran(**D**) coincidono ed essendo D diagonale il suo rango è dato dal numero di autovalori non nulli.

e) Quoziente di Rayleigh. Se **A** è una matrice simmetrica di ordine (mxm) con autolavori

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m$$

allora

$$\lambda_1 \leq \frac{\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^t \mathbf{x}} \leq \lambda_m$$

i) Matrici in forma canonica simile ortogonali.

Sappiamo che $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\mathbf{t}}$ allora **A** è diagonalizzabile che, data la simmetria, è possibile trovare vettori linearpende indipendenti ortogonali associati agli autovalori di **A**, singoli o mltipli che siano. D'altra parte, se $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono autovettori associati a λ_1 e λ_2 e cioè

$$\mathbf{u}_1^{\mathbf{t}} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2^{\mathbf{t}} \mathbf{u}_1 = 0$$

Possiamo trasformare i due vettori in modo che la loro norma euclidea sia unitaria

$$\mathbf{u}_1^+ = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}_1^{\mathbf{t}} \mathbf{u}_1}} \right) \mathbf{u}_1; \quad \mathbf{u}_2^+ = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}_2^{\mathbf{t}} \mathbf{u}_2}} \right) \mathbf{u}_2; \Rightarrow \left(\mathbf{u}_i^+ \right)^t \mathbf{u}_i^+ = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}_i^{\mathbf{t}} \mathbf{u}_i}} \right) \mathbf{u}_i^t \mathbf{u}_i \left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}_i^{\mathbf{t}} \mathbf{u}_i}} \right) = 1$$

A questo punto possiamo diagonalizzare l'originaria matrice **A** con lo schema

$$\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^t \quad \text{con} \quad \mathbf{Q}^{\mathbf{t}} \mathbf{Q} = \mathbf{QQ}^{\mathbf{t}} = \mathbf{I}$$

Esempio

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix};\ \lambda_1=5,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-1$$

$$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\end{bmatrix};\ \mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}=\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{bmatrix}\ \text{e quindi}\ \mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}-(\alpha_1+\alpha_2)\\\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=\ \mathbf{u}_3$$

Se si pone α=1, α_1= α_2=1, e poi α_1=-1, α_2=1 si perviene a

$$U=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&1&-1\\1&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow Q=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&-2&0\\\sqrt{2}&1&-\sqrt{3}\\\sqrt{2}&1&\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

E' facile verificare che **Q** è ortogonale e che $\mathbf{Q^tAQ=D}$=diag(5,-1,-1).

h) Scomposizione in valori singolari (Scomposizione spettrale).
Per la particolare matrice $\mathbf{A^tA}$ si può mostrare la nota proprietà

$$\mathbf{A}^t\mathbf{A}=\sum_{j=1}^{m}\mathbf{a}_j\mathbf{a}_j^t$$

cioè la somma dei prodotti esterni delle colonne di **A**. Come è noto il prodotto esterno o prodotto vettoriale di due vettori conformabili determina una matrice.

Se **u, v** sono due vettori colonna (m x 1) allora $\mathbf{uv}^t$ sarà una matrice quadrata di ordine (m x m).

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}2\\4\\-1\end{bmatrix};\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}-2\\0\\3\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{uv}^t=\begin{bmatrix}2\\4\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&0&6\\-8&0&12\\2&0&-3\end{bmatrix}$$

Il prodotto di due matrici può essere realizzato utilizzando il prodotto esterno dei loro vettori

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1&\mathbf{c}_1&\cdots&\mathbf{c}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}_1\\\mathbf{r}_2\\\vdots\\\mathbf{r}_m\end{bmatrix}=\mathbf{c_1r_1^t}+\mathbf{c}_2\mathbf{r}_2^\mathbf{t}+\cdots\mathbf{c}_m\mathbf{r}_m^\mathbf{t}$$

Sia ora **U** la matrice ortogonale usata nella diagonalizzazione di **A** con $\mathbf{U^tU=I}$**.** Quindi

$$\mathbf{I}=\sum_{j=1}^{m}\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j^t$$

Premoltiplicando per **A** si arriva a

$$\sum_{j=1}^{m}\mathbf{Au}_j\mathbf{u}_j^T=\mathbf{A}\ \Rightarrow\ \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j^t=\mathbf{A}$$

Che è nota come la scomposizione spettrale di **A**. Tale formula si applica anche alle potenze di **A**.

$$A^P = \sum \lambda_j^P u_j u_j^T$$

f) Gli autovalori di una matrice simmetrica sono tutti non-negativi se e solo se la matrice è non negativa definita cioè $\mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ *per ogni* $\mathbf{x}$ e questo si dimostra con la similitudine a **D**.

Matrici simmetriche non negative definite

Le forme quadratiche $\mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x}$ sono nulle se **x** è composto esclusivamente da zeri.

$$x = 0 \Rightarrow x^T Ax = 0.$$

Alcune di esse sono però nulle solo se x=0.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \; ; \; x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = (x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2$$

che è maggiore di zero a meno che $x_1=x_2=x_3=0$. Altre forme quadratiche sono nulle anche per $\mathbf{x}\neq 0$.

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 37 & -2 & -24 \\ -2 & 13 & -3 \\ -24 & -3 & 17 \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 37 & -2 & -24 \\ -2 & 13 & -3 \\ -24 & -3 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} = 37x_1^2 + 13x_2^2 + 17x_3^2 - 4x_1x_2 - 48x_1x_3 - 6x_2x_3 = (x_1 - 2x_2)^2 + (6x_1 - 4x_3)^2 + (3x_2 - x_3)^2$$

Che risulta nulla per x=[2 1 3].

Le forme quadratiche si dicono:

positive defnite se $\quad x^T Ax > 0 \quad \forall x \neq 0$

positive semidefinite $\quad x^T Ax \geq 0 \quad \forall x \neq 0$ e $\; x^T Ax = 0 \quad$ per qualche $x \neq 0$

Le ultime due categorie sono indicate congiuntamente con il termine di forme quadratiche non negative definite.

Proprietà delle matrici non negative definite

a) Se **A** è positiva definita allora $a_{1i}>0$ e |A|>0, Se A è positiva semidefinita allora $a_{1i}\geq 0$ e |**A**|=0

b) Se **A** è positiva (semi)definita lo sarà pure $\mathbf{QAQ}^t$ per ogni matrice non singolare **Q**. Infatti, posto

$$y = (Q^t)^{-1} x$$

allora

$$y^T Ay \geq 0 \Rightarrow \; yQ^T y \geq 0$$

c) Le matrici non negative definite ammettono la scomposizione: $\mathbf{A}=\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathbf{t}}$ con **Q** reale e rango pieno di colonna inoltre, se **A** è positiva definita **Q** è non singolare. Un'importante conseguenza è che

$$
\begin{aligned}
x^T A x &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_i x_j u_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 \qquad \text{per } \; y = Q^t x
\end{aligned}
$$

d) Se X è una matrice con elementi reali allora $(\mathbf{X}^{\mathbf{t}}\mathbf{X})$ è simmetrica e non negativa definita. Inoltre se **X** ha rango pieno allora $(\mathbf{X}^{\mathbf{t}}\mathbf{X})$ è positiva definita.

e) Autovalori di matrici simmetriche non negative definite. Se la matrice **A** è simmetrica ed ha autovalori non negativi allora è non negativa definita ed è positiva definita se gli autovalori sono positivi

Esempio

$$
A = \begin{bmatrix} 37 & -2 & -24 \\ -2 & 13 & -3 \\ -24 & -3 & 17 \end{bmatrix}; \; E.C. = \; \lambda(\lambda-14)(\lambda-53)=0; \lambda_1 = 53, \;\; \lambda_2 = 14, \;\; \lambda_3 = 0
$$

Se **A** è non negativa definita abbiamo $\mathbf{U}^{\mathbf{t}}\mathbf{A}\mathbf{U}=\mathbf{D}$. Sia ora $\mathbf{D}^{0.5}$ la matrice diagonale $\mathbf{D}^{0.5} = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_i}\right)$ cioè formata dalle radici quadrate degli autovalori di **A**. Si avrà perciò

$$
A = UDU^T = \left(UD^{1/2}U^T\right)\left(UD^{1/2}U^T\right) = H^2 \;\; \text{con} \;\; H = UD^{1/2}U^T
$$

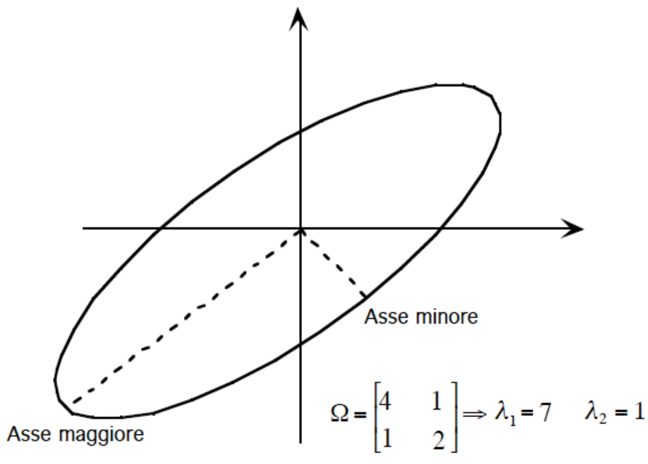
Ellissoidi

Sono regioni dello spazio R^m centrate in Genere sull'origine cui punti obbediscono alla disuguaglianza

$$
x^t \Omega x \leq 1
$$

dalla relazione $\mathbf{Au}=\lambda\mathbf{u}$ si ottiene

$$
x^t \Omega x = x^t \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i u_i^t \right) x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(x^t u_i \right)^2
$$



Ne consegue che gli autovettori danno la direzione dei semiassi della ellissoide attraverso il coseno e gli autovalori ne danno la lunghezza. La massima eccentricità è data dal coefficiente di condizionamento:

$$
\sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}
$$