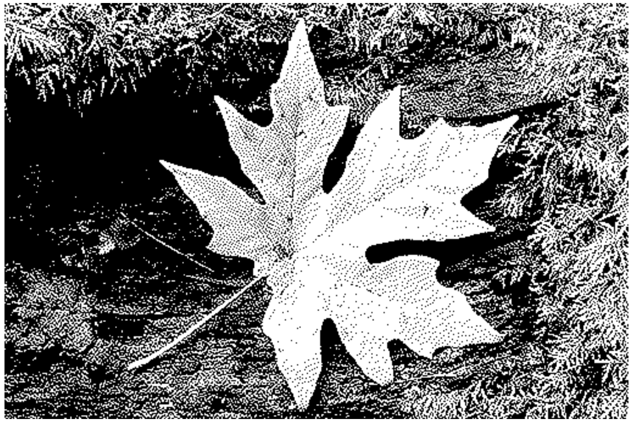
Corso di Statistica

Variabili indicizzate, sommatorie, produttorie



Variabili indicizzate

Un insieme di valori sui quali effettuare delle elaborazioni o comunque un discorso unico.

Esempio: voto di Statistica

{27, 18, 19, 28, 20, 18, 18, 25, 21, 25} X_i

Sia " X " (od anche Y, Z, W, etc.) il simbolo di variabile che rappresenti il fenomeno "Voto di Statistica (appello del 6/10/2003)".

Sia "i" un indice che esprima l'ordine con il quale i diversi valori della X sono esaminati. Il simbolo chiamato ad esprimere uno qualsiasi dei valori di X è

l'indice è posto in basso a destra (è detto anche "pedice" o deponente)

Ordine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valore	27	18	19	28	20	18	18	25	21	25
Simbolo	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}

Uso delle variabili indicizzate

Per indicare la differenza tra il primo e l'ultimo dei valori anzidetti scriveremo:

$$X_1 - X_{10}$$

Quando si vuole indicare un certo numero di valori della X senza dire esattamente quanti, si fa intervenire un parametro, diciamo "n", che rappresenta il numero di valori. Si scriverà:

$$X_i \qquad (i=1,2,\ \ldots,\ r\ )$$

L'ordine di considerazione non implica alcuna relazione gerarchica o di grandezza tra i valori, ma denota semplicemente la successione con cui le modalità della X entrano in gioco.

Quindi X_3 può benissimo essere più grande di X_{21} oppure essere negativo o nullo.

Sommatorie

Una simbologia molto utile e pratica, che permette di scrivere in modo piuttosto conciso le somme è l'espressione di sommatoria

$$\sum_{i=g}^{n} X_i$$

Nell'espressione di sommatoria compaiono diversi simboli

X_i termine generico della sommatoria

i indice della sommatoria

g valore iniziale dell'indice (che di solito è uno oppure zero)

n valore terminale dell'indice

Esempio.

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8+X_9+X_{10}$$

$$= 27+18+19+28+20+18+18+25+21+25$$

$$= 219$$

SVILUPPI

Per certe comodità può succedere che il valore iniziale dell'indice sia negativo o anche nullo e che quello terminale indichi la fine della sommatoria prima che tutti i valori della X_i siano sommati

$$\sum_{i=0}^{n} X_i = X_0+X_1+X_2+ \ldots +X_{n-1}+X_n$$

$$\sum_{k=2}^{n-3} Z_k = Z_2+Z_3+\ldots+Z_{n-4}+Z_{n-3}$$

Casi particolari

Può anche succedere che il termine generico della sommatoria sia l'indice di sommatoria oppure che questo sia un esponente od anche che l'indice entri in una espressione analitica complessa:

Esempio. $$\sum_{i=1}^{n} i = (1+2+\ldots+n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Esempio. $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = (1+4+9+\ldots+n^2) = \frac{n(n+1)\,[2(n+1)-1]}{6}$$

Esempio. $$\sum_{i=1}^{5} 2^i = 2+4+8+16+32 = 62$$

Esempio. $$\sum_{i=3}^{7} \frac{1}{i(i-2)^2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{16}+\frac{1}{45}+\frac{1}{96}+\frac{1}{245} = \frac{30521}{70560}$$

Proprietà delle sommatorie

1) La sommatoria di una somma è pari alla somma delle sommatorie.

$$\sum_{i=g}^{n}(X_i+Y_i) = \sum_{i=g}^{n} X_i + \sum_{i=g}^{n} Y_i$$

infatti:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i) = (X_g+Y_g)+(X_{g+1}+Y_{g+1})+(X_{g+2}+Y_{g+2})+\ldots+(X_n+Y_n)$$

$$= (X_g+X_{g+1}+X_{g+2}+\ldots+X_n) + (Y_g+Y_{g+1}+Y_{g+2}+\ldots+Y_n) = \sum_{i=g}^{n} X_i + \sum_{i=g}^{n} Y_i$$

Esempio.

$X_1=4, X_2=2, X_3=9, X_4=2, X_5=1$; $Y_1=7, Y_2=8, Y_3=1, Y_4=5, Y_5=-2$.

$$\sum_{i=1}^{5}(X_i+Y_i) = (4+7)+(2+8)+(9+1)+(2+5)+(1-2) = 11+10+10+7-1 = 37$$

$$(7+8+1+5-2) = \sum_{i=1}^{5} Y_i = 19 \qquad \sum_{i=1}^{5} X_i + \sum_{i=1}^{5} Y_i = 18+19 = 37$$

$$(4+2+9+2+1) = \sum_{i=1}^{5} X_i = 18;$$

Messa in evidenza

2) Le costanti moltiplicative possono essere portate fuori dalla sommatoria

$$\sum_{i=g}^{n} aX_i = a\sum_{i=g}^{n} X_i$$

Infatti:

$$\sum_{i=g}^{n} aX_i = aX_g+aX_{g+1}+aX_{g+2}+...+aX_n = a(X_g+X_{g+1}+X_{g+2}+...+X_n) = a\sum_{i=g}^{n} X_i$$

Esempio.
Sia a=2 ed $X_0=7$, $X_1=8$, $X_2=-3$, $X_3=5$, $X_4=0$, $X_5=2$, $X_6=6$.

$$\sum_{i=0}^{6} 2(X_i) = 2(7)+2(8)+2(-3)+2(5)+2(0)+2(2)+2(6) = 14+16-6+10+0+4+12 = 50$$

d'altronde

$$2\sum_{i=0}^{6} X_i = 2(7+8-3+5+0+2+6) = 2(25) = 50$$

Proprietà telescopica

$$\sum_{i=g}^{n}(X_i-X_{i-1}) = X_n-X_g$$

Esempio.
Siano $X_0=4$ $X_1=7$ $X_2=-12$ $X_3=5$ $X_4=8$.

$$\sum_{i=1}^{4}(X_i-X_{i-1}) = (7-4)+(-12-7)+(5+12)+(8-5) = 3-19+17+3 = 4$$

$$= X_4-X_0 = (8-4) = 4$$

da notare che il risultato è sempre lo stesso qualunque siano i termini intermedi fra X_g ed X_n.

Significato di "costante"

Costante significa che la a della formula non dipende dall'indice di sommatoria, cioè, cambiando tale indice la "costante" rimane invariata.

Esempio.

$$\sum_{i=g}^{n} Y_j X_i = Y_j\sum_{i=g}^{n} X_i$$

poiché Y_j è costante rispetto all'indice i della sommatoria.

Esempio.

$$\sum_{i=g}^{n} a = (n-g+1)a$$

Esercizio

1) Sviluppare la seguente formula $\sum_{i=1}^{n}[Y_i - X_i]^2$

2) Dire quale espressione è vera e quale è falsa

a) $\sum_{k=1}^{m} k^3 = \sum_{k=0}^{m} k^3$

b) $\sum_{i=0}^{9} (i+1)^2 = \sum_{i=1}^{10} i^2$

c) $\sum_{k=0}^{20} 2 = 40$

d) $\sum_{j=1}^{7} j^2 = \sum_{j=1}^{7} j * \sum_{j=1}^{7} j$

e) $\left[\sum_{s=1}^{4} s\right]^2 = \sum_{s=1}^{4} s^2$

Produttorie

Il prodotto di un certo numero di valori di una variabile, diciamo X, viene indicato con la simbologia

$$\prod_{i=g}^{n} X_i = X_g * X_{g+1} * X_{g+2} * \ldots * X_n$$

che si legge: produttoria per i che va da g ad n di X_i.

Esempio. Siano $X_0=2$, $X_1=3$, $X_2=9$, $X_3=6$, $X_4=-4$, $X_5=1$.

$$\prod_{i=0}^{5} X_i = 2(3)(9)(6)(-4)(1) = -1296$$

Esempio. Siano $X_1=8$, $X_2=4$, $X_3=-5$, $X_4=2$, $X_5=-2$.

$$\prod_{i=1}^{n} X_i^i = 8(4^2)[(-5)^3](2^4)[(-2)^5] = 8192000$$

Proprietà delle produttorie

1) $\prod_{i=g}^{n} Y_i X_i = \left(\prod_{i=g}^{n} X_i\right)\left(\prod_{i=g}^{n} y_i\right)$

4) $\prod_{i=g}^{m} X_i \prod_{i=m+1}^{n} X_i = \prod_{i=g}^{n} X_i$ se $g \leq m \leq n$

2) $\prod_{i=g}^{n} aX_i = a^{n-g+1} \prod_{i=g}^{n} X_i$

5) $\prod_{i=g}^{n} X_i = \prod_{i=g}^{n} X_{n-(i-g)}$

3) $\prod_{i=g}^{n} \left(\frac{X_i}{X_{i-1}}\right) = \left(\frac{X_n}{X_g}\right)$

6) $\prod_{i=g}^{n} a = a^{(n-g+1)}$

7) Se tutte le X_i sono positive: $\operatorname{Log}\left[\prod_{i=g}^{n} X_i\right] = \sum_{i=g}^{n} \operatorname{Log}(X_i)$

ESERCIZIO

Si supponga di avere le seguenti modalità:

$X_1=177$; $X_2=1036$; $X_3=2542$; $X_4=3476$; $X_5=4918$

calcolare:

$$\sqrt[5]{\prod_{i=1}^{5} x_i} = \left[\prod_{i=1}^{5} x_i\right]^{\frac{1}{5}}$$

Sommatorie doppie

In certi casi i valori di una variabile vengono distinti a mezzo di due indici invece che da uno. I valori sono disposti in forma tabellare (o matriciale) secondo righe e colonne.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & ..a_{ij}.. & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se m=n si parlerà di tabella (o matrice) quadrata; altrimenti la tabella (o matrice) verrà considerata rettangolare.

Significato della notazione

L'elemento generico della tabella viene individuato con il simbolo

$$a_{ij}\begin{cases} i & \text{posizione di riga} \\ j & \text{posizione di colonr} \end{cases}$$

La somma di tutti gli elementi della tabella viene rappresentata con la notazione

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = (a_{11}+a_{12}+..+a_{1m}+a_{21}+a_{22}+..+a_{2m}+..+a_{n1}+a_{n2}+..+a_{nm})$$

I contatori i e j si attivano fissando il primo i=1 e facendo scattare, di un passo alla volta, il secondo, cioè j=1,2,...,m.

Completato il giro del j si fa scattare, sempre di un passo, il contatore i e si riattiva, dall'inizio, il secondo contatore, cioè j=1,2,...,m.

Tutto questo va ripetuto fino a che non si sia anche completata la escursione di i, non si sia cioè arrivati ad i=n.

Esempio

Esempio.

Si abbia la tabella con n=4 ed m=3

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 8 \\ -4 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

la somma di tutti gli elementi sarà

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = 4+5+6-2+1+8-4+7+3+1+0-2 = 27$$

Somme parziali

La dipendenza da due indici permette di considerare anche delle somme parziali all' interno della tabella.

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \quad \text{oppure} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

Esempio. Si abbia la matrice $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & -2 \\ 1 & 8 & -4 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

si avrà allora

$$S_{.1} = \sum_{i=1}^{3} a_{i1} = 4+1+3 = 8 \qquad S_{.3} = \sum_{i=1}^{3} a_{i3} = 6-4+0 = 2$$

$$S_{1.} = \sum_{j=1}^{4} a_{1j} = 4+5+6-2 = 13 \qquad S_{2.} = \sum_{j=1}^{4} a_{2j} = 1+8-4+7 = 12$$

ESERCIZIO

Data la seguente matrice rettangolare: $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

1) Calcolare

1) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4} a_{ji}$

2) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{j=1 \\ j<i}}^{4} a_{ji}$

3) $\sum_{i=1}^{3} \frac{\sum_{j=1}^{4} a_{ji}^{2}}{\sum_{j=1}^{4} a_{ji}}$