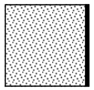
Esperimento deterministico

Ovunque si attivi un processo di osservazione e/o misurazione di un fenomeno soggetto a variazione c'è un esperimento

L'esito di un esperimento deterministico è prevedibile con certezza

ESEMPIO: area del quadrato:

$$Y = X^2$$



X=Lato

noto il lato, l'area del quadrato è univocamente determinata: x=5-->y=25

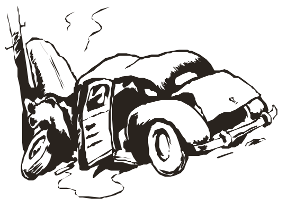
Negli esperimenti di laboratorio relativi a molte leggi fisiche le relazioni sono <u>"quasi-deterministiche"</u> in cui gli errori sono imputabili a problemi di misurazione.

Esperimento casuale

Un esperimento casuale è una prova che può essere riproposta - fisicamente o virtualmente- una, due, infinite volte nelle medesime condizioni senza che si possa stabilire quale sarà l'esito della prossima manifestazione.

Esempio

Ci sono situazioni in cui l'incertezza è non è trascurabile ed altre in cui è dominante



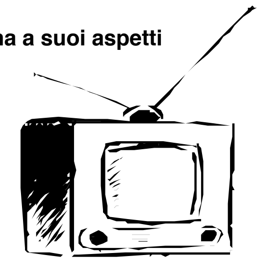
L'ora, il luogo e le modalità con cui si verifica un incidente automobilistico dipendono da innumerevoli fattori ed una modifica in qualcuno potrebbe evitare il sinistro.

Non è possibile stabilire, tra tutti coloro che si metteranno in macchina domani, chi subirà un incidente, ma è praticamente certo che a qualcuno capiterà (si spera con solo lievi danni al mezzo).

Esperimento e variabili casuali

L'esperimento casuale è una prova il cui esito è soggetto alla sorte

In genere non siamo interessati a tutto l'esperimento, ma a suoi aspetti particolari: le variabili casuali.



Esperimento

Scelta casuale di una persona abbonata ad una pay-TV

Variabili casuali

Canale su cui è sintonizzata la TV al momento del contatto (nominale)

Numero di cambi di canale ogni 15 minuti (discreta)

Tempo di accensione domenicale nella fascia oraria 14-18 (continua)

Casuale è l'esperimento, casuali saranno i valori osservati.

Le variabili casuali sono figlie dell'esperimento casuale.

Esperimento e variabili casuali

L'esperimento casuale è una prova il cui esito è soggetto alla sorte

In genere non siamo interessati a tutto l'esperimento, ma a suoi aspetti particolari: le variabili casuali.

Esperimento

Scelta casuale di una persona abbonata ad una pay-TV

Variabili casuali

Canale su cui è sintonizzata la TV al momento del contatto (nominale)

Numero di cambi di canale ogni 15 minuti (discreta)

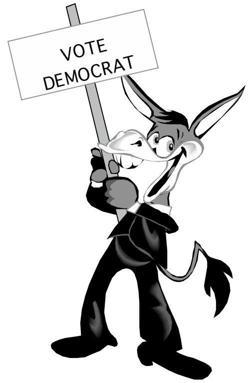
Tempo di accensione domenicale nella fascia oraria 14-18 (continua)

Casuale è l'esperimento, casuali saranno i valori osservati.

Le variabili casuali sono figlie dell'esperimento casuale

Variabili casuali e probabilità

Ad ogni modalità della variabile nominale o discreta, l'esperimento casuale fornisce in dote una probabilità: in forma tabellare o con una formula



Esperimento

Scelta casuale di una persona iscritta nelle liste elettorali del comune di Serrano

Variabili casuali

Coalizione per cui ha intenzione di votare

Coalizione	Tendenza
Destra	0.3
Centro	0.1
Sinistra	0.2
Altre	0.4
	1.0

Numero di votazioni a cui ha partecipato

$$p_i = \begin{cases} \dfrac{(2i-1)^3}{319600} & per \quad i = 1,2,\ldots,20 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Variabili casuali continue

Per le variabili continue l'assegnazione può avvenire solo per classi di modalità ovvero con una funzione di densità

Esperimento

Corso di chiusura di un titolo alla borsa valori

Variabile casuale

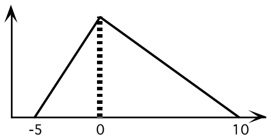
Tasso di rendimento in base al valore di chiusura

Classi di probabilità

Tasso	Probabilità
da -5.0 a -2.5	0.1
da -2.5 a 0.0	0.1
da 0.0 a +2.5	0.2
da +2.5 a +5.0	0.5
da +5.0 a +9.9	0.1
	1.0

Funzione di densità

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x+5)}{75} & -5 < x \le 0 \\ \dfrac{2(10-x)}{75} & 0 < x \le 10 \end{cases}$$



Modelli di variabili casuali

Le probabilità (come tabella o come formula) derivano:

- **Dalle condizioni sperimentali**
- **Dall'aspetto descritto dalla variabile casuale**
- **Da informazioni aggiuntive**

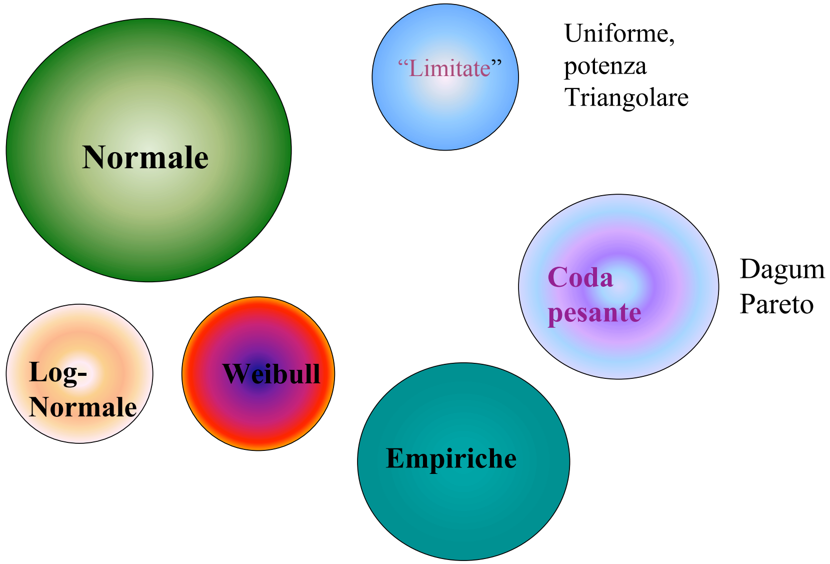
La statistica ha elaborato molti modelli sia per le variabili nominali e discrete che per le variabili continue.

Molti possono essere studiati e approfonditi nel libro di testo (apprendimento libero)

Nel prosieguo analizzeremo un solo tipo di esperimento: estrazione di un campione da una popolazione di unità.

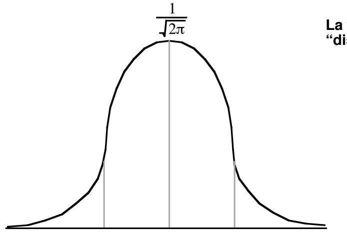
Attenzione! Le variabili casuali sono delle popolazioni.

Breve lista di modelli probabilistici



La curva normale (o gaussiana)

E' il modello di probabilità più noto e più usato in statistica



La tilde si legge
"distribuito come"

$$X \sim N(\mu,\sigma) \rightarrow h(x) = \frac{e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}; \quad -\infty < \mu < \infty; \; \sigma > 0$$

Media aritmetica μ

Varianza σ^2

L'andamento campanulare e simmetrico della curva Normale indica che:

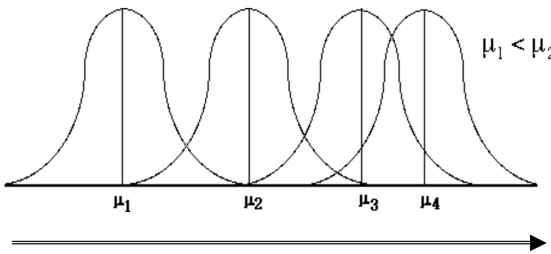
1) Gli scostamenti negativi dal centro sono altrettanto probabili di quelli positivi;
2) I valori sono addensati intorno al centro;
3) Gli scostamenti si verificano con probabilità decrescente man mano che diventano grandi in valore assoluto.

Significato del parametro "μ"

La curva è unimodale e l'ordinata massima si raggiunge per X=μ (la moda)

Quindi, il parametro μ rappresenta il valore più probabile nonché il valore atteso e quello che bipartisce il supporto dei valori.

Cambiando μ si modifica la collocazione del grafico



$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4$

Al variare di μ il grafico resta inalterato nella sua forma. Si modifica solo la sua posizione: più a destra se μ aumenta; più a sinistra se μ diminuisce

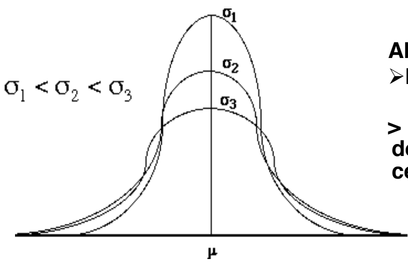
Significato del parametro "σ"

Corrisponde allo scarto quadratico medio.

La curvatura del grafico della curva normale cambia due volte inflessione in corrispondenza dei punti x=$\mu \pm \sigma$. Inoltre

$$f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$



Quindi

Al diminuire di σ :
➢I due punti di flesso si accentrano;

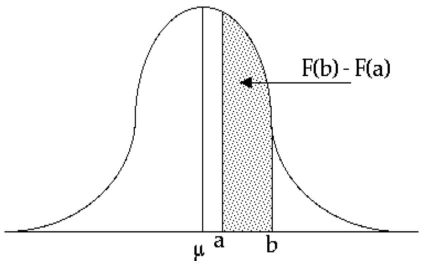
> L'ordinata massima aumenta a causa del maggiore addensamento intorno al centro della distribuzione.

La funzione di ripartizione

Le probabilità cumulate sono espresse da

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

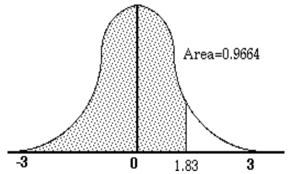
è sono calcolate con metodi di approssimazione numerica



Esprime la probabilità di osservare un valore della normale tra "a" e "b"

Calcolo delle aree sottese alla curva

Esempio_1: calcolare l'area compresa fra $-\infty$ e 1.83, in simboli: $\phi(1.83)$

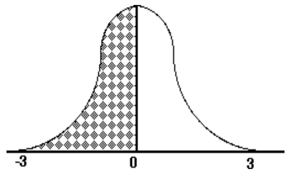


$\phi(1.83) = 0.9664$

$P(Z \le 1.83)$

=DISTRIB.NORM.ST()

Esempio_2: calcolare l'area compresa fra $-\infty$ e 0, in simboli: $\phi(0)$



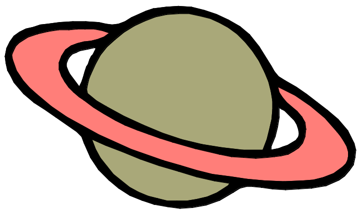
$2\phi(0)=1$ e quindi $\phi(0)=\frac{1}{2}$

$P(Z \le 0)$

Importanza della normale

Risiede nel fatto che moltissimi fenomeni possono esservi rappresentati.

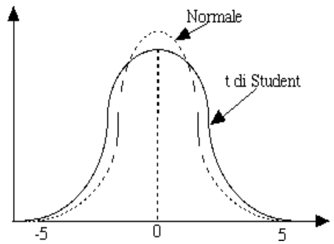
Infatti, la normale serve da efficace approssimazione di molte altre variabili casuali continue e discrete.



Già nel 17° secolo, Galileo discusse il comportamento delle misurazioni delle distanze astronomiche avendo in mente il modello normale della compensazione tra errori di segno opposto.

La t di Student

Questo modello è molto simile a quello gaussiano, ma ha code più "pesanti" (ordinate estreme più alte)



$-\infty < t_n < \infty, \quad n > 2$

$E(t_n) = 0, \quad Var(t_n) = \frac{n}{n-2}$

La varianza è superiore all'unità, ma si avvicina ad uno all'aumentare di "n"

L'elemento caratterizzante della t di Student sono "i gradi di libertà" n che è il parametro della t di Student.

Per ogni grado di libertà esiste una t di Student, sebbene queste diventino poco distinguibili per n≥60.

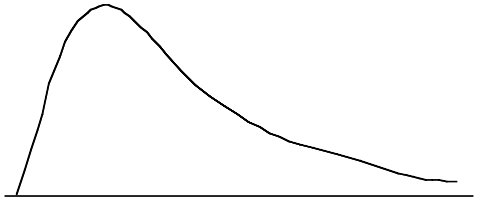
Questa v.c. è stata analizzata da W.S. Gosset, nel 1906, che firmò l'articolo con lo pseudonimo "STUDENT" ed è da allora nota come "La t di Student"

χ^2 (chi-quadrato)

Questo modello è definito per i soli non negativi e presenta una marcata asimmetria positiva

Anche in questo caso l'elemento caratterizzante sono "i gradi di libertà" cioè "g"

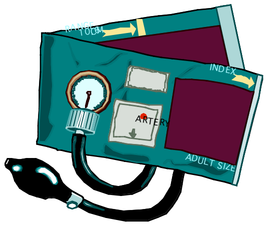
$$E(\chi^2) = g, \quad Var(\chi^2) = 2g$$



Per "g" superiore a 30 la distribuzione del χ^2 si avvicina a quella normale

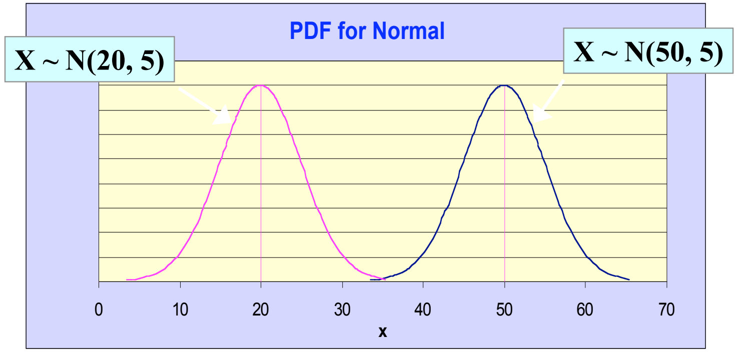
La distribuzione del χ^2 si incontra nello studio dell'adattamento e della variabilità

Questa è importante nelle analisi cliniche e nel controllo della qualità



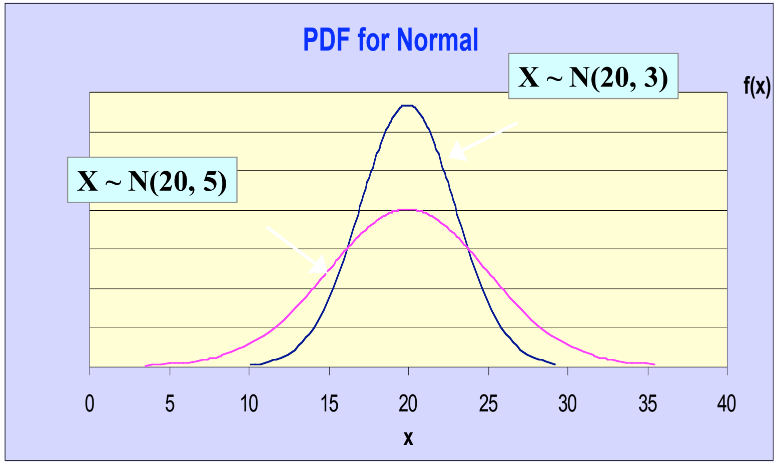
Parametri delle distribuzioni

1. Posizione: specificano la tendenza centrale dei valori nel modello od anche il punto di massimo addensamento



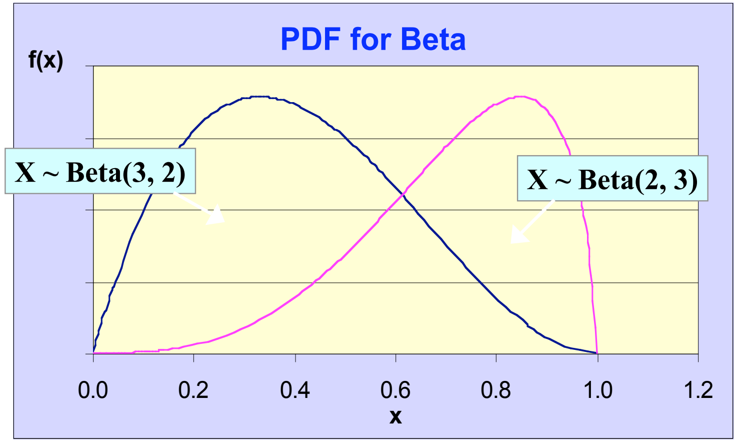
Parametri delle distribuzioni/2

2. Scala: determinano l'unità di misura della variabile (espansione o contrazione della scala delle ascisse)



Parametri delle distribuzioni/3

3. Forma: Controllo la forma che assume il modello di probabilità. In particolare, l'asimmetria, l'appuntimento al centro, la pesantezza delle code



inferenza statistica

Se non si hanno dati attendibili su tutta la popolazione allora si deve trattare con un campione.

Il campione non interessa di per sé, ma in quanto consente di arrivare alla popolazione da cui è stto estratto.

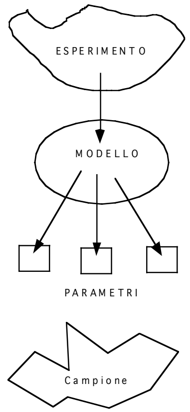
Il processo induttivo dal NOTO (campione) all'iNCOGNITO (popolazione) prende il nome di INFERENZA STATISTICA.

Per proseguire dobbiamo però ipotizzare che il meccanismo di selezione delle unità sia soggetto alla sorte

Ad ogni campione deve essere possibile associare la probabilità di estrarlo (VEROSIMIGLIANZA)

Logica della Inferenza statistica

Le situazioni in cui la statistica si è più affermata sono gli esperimenti replicabili.



Le esigenze conoscitive si limitano spesso a poche caratteristiche dell'esperimento: valore atteso e varianza di una o più variabili.

Tali caratteristiche sono spesso i parametri del modello che descrive il comportamento delle variabili casuali.

Come sfruttare al meglio le informazioni del campione per determinare il valore dei parametri nella popolazione?

Le procedure inferenziali

Ciò che interessa questo corso è riconducibile ai seguenti casi:

LA STIMA PUNTUALE DEI PARAMETRI

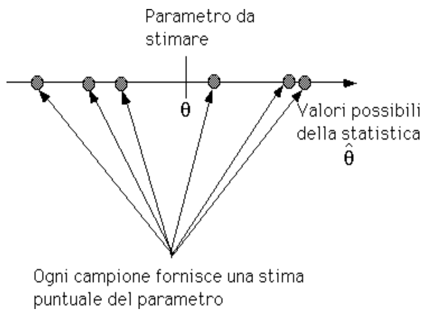
quando propone un singolo valore come stima di un parametro o di una caratteristica della v.c.

LA VERIFICA DI IPOTESI

Da esperienze precedenti o dalla logica delle indagini si può supporre che i parametri abbiano determinati valori.

La stima puntuale

E' la procedura più semplice: in base alle osservazioni campionarie si ottiene il valore di una statistica da sostituire al parametro o alla caratteristica da stimare

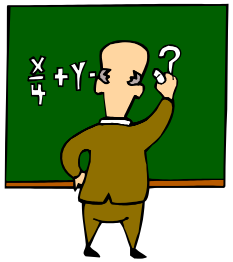


C'è da aspettarsi un certo scarto tra la stima puntuale ed il parametro incognito, ma noi non conosceremo mai né l'entità né il segno.

Essa dipende da molti fattori, alcuni dei quali saranno studiati nel prosieguo del corso.

La stima puntuale nulla ci dice sulla sua attendibilità che deriva solo dalla validità generale della procedura di stima

Gli stimatori



Lo stimatore è una funzione NOTA dei valori inclusi in un campione casuale. Il suo valore è la STIMA

E' caratteristica quantitativa della popolazione dalla quale il campione è stato estratto.

Esempi di stimatori:

$$\text{Totale: } Q = \sum_{i=1}^{n} X_i; \quad \text{Campo di variazione: } R = X_{max} - X_{min}$$

$$\text{Media : } \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}; \quad \text{Varianza: } s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}; \quad \text{frazione di successi: } \pi = \frac{S_n}{n}$$

Uno stimatore è detto <u>naturale</u> se ciò che si calcola nel campione è in stretta analogia con ciò che si deve stimare nella popolazione

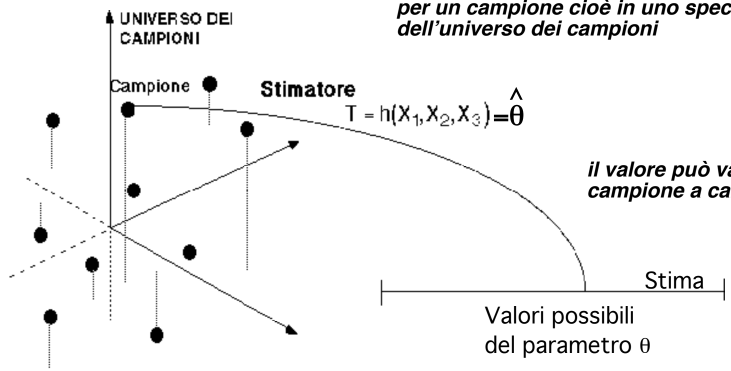
Stimatore e stima

ESEMPIO: Quale stipendio si può aspettare la manager di una USL?

Si sceglie un campione casuale diciamo di n=3 manager già in servizio e si calcola il valore atteso della loro retribuzione. Supponiamo che μ_x=65

il valore "65 mila euro" è una STIMA del salario ipotetico, la media campionaria è uno STIMATORE del salario.

La stima è il valore assunto dallo stimatore per un campione cioè in uno specifico punto dell'universo dei campioni



il valore può variare da campione a campione

Esempio

L'estrazione del campione produce la n-tupla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i cui elementi sono le osservazioni campionarie

Ogni n-tupla, a sua volta, produce un valore dello stimatore

Si esamina un campione casuale di 10 imprese e si rileva X il numero di dipendenti regolari.

Il valore della X è casuale perché non è certa quale azienda finirà nel campione

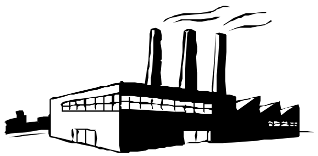
Osservazioni campionarie →

5	0
3	2
1	4
3	2
2	3

Calcoliamo alcuni stimatori

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{5+0+3+2+1+4+3+2+2+3}{10} = \frac{25}{10} = 2.5$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - 10)^2}{10-1} = \frac{2.5^2 + 2.5^2 + 0.5^2 + 0.5^2 + 1.5^2 + 1.5^2 + 0.5^2 + 0.5^2 + 0.5^2 + 0.5^2}{9} = 2.06$$



La distribuzione degli stimatori

Lo stimatore è una variabile casuale connessa all'esperimento: estrazione casuale di un campione.

Conoscere la sua distribuzione ci serve per descrivere l'andamento dei risultati che si possono osservare replicando il campione.

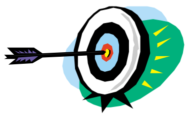
Dobbiamo ricordare che…

- **Stimare significa dare un valore a qualcosa**
- **La stima ottenuta da un campione può essere diversa da quella ottenuta con un altro campione**
- **La stima tende differire dal parametro da stimare, ma se conosciamo la distribuzione campionaria dello stimatore possiamo quantificare probabilisticamente l'errore**

Valore atteso

Degli stimatori ci interessa:

$$E(T) = \sum_{i=1}^{k} T_i \Pr(T = T_i)$$



il valore atteso è il valore della media aritmetica di "T" calcolata su tutti i possibili campioni di ampiezza “n”.

Se la media E(T)=θ cioè il parametro da stimare, allora T è uno stimatore NON DISTORTO

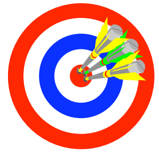
Lo scarto E(T) - θ è detto Bias *(pron. baias)*

La varianza

Un altrfo aspetto essenziale è

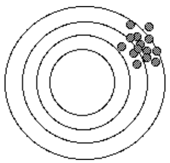
$$\sigma^2(T) = \sum_{i=1}^{k} \left[T_i - E(T)\right]^2 \Pr(T = T_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{k} - \left[E(T)\right]^2$$

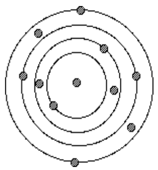


La varianza dello stimatore dà una indicazione delle fluttuazioni campionarie cioè quantifica le differenze tra i suoi valori potenziali nei diversi campioni.

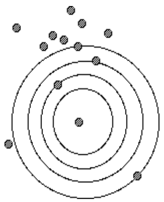
illustrazione



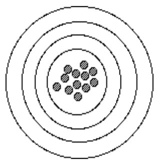
Bias elevato, moderata variabilità



Bias moderato, elevatata variabilità



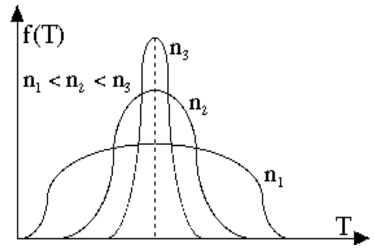
Bias elevato, elevata variabilità



Bias moderato, moderata variabilità

Caratteristica importante

Uno stimatore valido dovrebbe avere una varianza che tende a zero



Se la varianza dello stimatore tende a zero all’aumentare dell’ampiezza del campione, allora lo stimatore è considerato CONSISTENTE (COERENTE)

Legge dei grandi numeri

Di solito si ignora la variabile casuale che può descrivere un dato aspetto della popolazione.

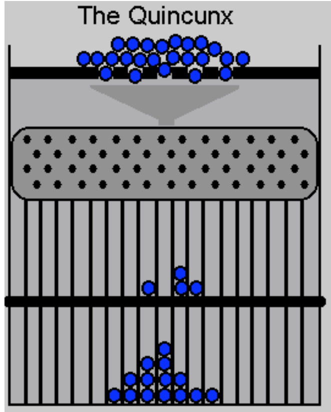
Di conseguenza non è possibile costruire la distribuzione degli stimatori.

Inoltre, uno stesso stimatore ha una distribuzione campionaria diversa in dipendenza del tipo di variabile casuale che descrive la popolazione.

C'è una via d'uscita? La legge dei grandi numeri!

Se la distribuzione non è nota, ma il campione casuale è abbastanza numeroso e le estrazioni sono indipendenti è possibile approssimare la distribuzione degli stimatori con il MODELLO NORMALE

Quincux



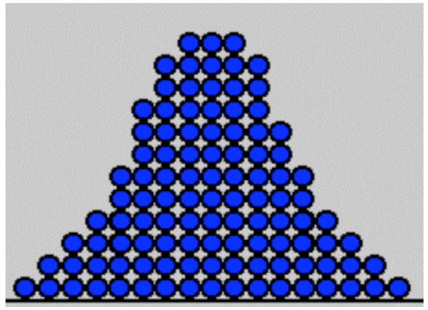
1) Le biglie entrano nell'imbuto dai vari fori

2) Le biglie escono dall'imbuto una alla volta

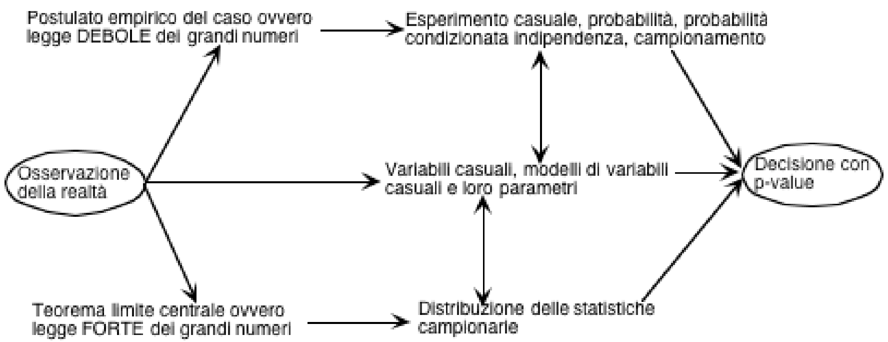
3) Le biglie rimbalzano a caso tra i vari pioli

4) Ogni biglia imbocca una sola scanalatura

Risultato finale



Schema dell'inferenza statistica



Test delle ipotesi

Si deve stabilire il grado di attendibilità di una ipotesi statistica

Se la decisione si potesse basare sulla conoscenza totale si avrebbe una conclusione definitiva: l'ipotesi è VERA o FALSA.

Come in molte scienze sperimentali non potremo dimostrare vera o falsa una affermazione.

Potremo solo affermare: è più coerente o meno coerente con i nostri dati campionari.

Formalismo dei Test

L'IPOTESI STATISTICA H_0 è una asserzione verificabile su di una variabile casuale. In genere riguarda i suoi parametri.

Supponiamo di conoscere la funzione di densità della v.c.: $f(X;\theta)$ di cui però ignoriamo il valore del parametro θ.

In genere, la H_0 ipotizza un certo valore del parametro e ne valuta la sua conformità con i dati campionari

$$H_0: \ \theta - \theta_0 = 0$$

È detta "nulla" perché, di solito, niente cambia se è accettata

Formalismo dei Test/2

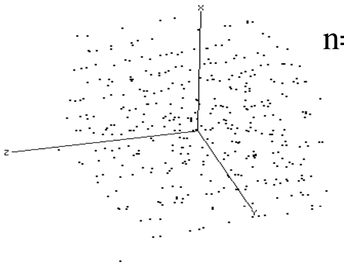
il valore θ_0 è scelto in base a varie considerazioni:

- Dalla logica dell'esperimento
- Da esperienze precedenti o indagini pilota
- E' un livello critico *(baseline)* da cui allontanarsi
- E' un livello desiderato

Formalismo del Test/3

Consideriamo L'UNIVERSO DEI CAMPIONI di ampiezza "n" cioè l'insieme di tutte le possibili realizzazioni della n-tupla ...

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$



n=3

In tale spazio, il campione estratto è solo un punto.

L'idea del test è di assegnare ad ogni campione una probabilità detta

LIVELLO OSSERVATO DI SIGNIFICATIVITA' (p-Value)

e in base a questo decidere sull'ipotesi H_0.

Formalismo del test/4

Le fluttuazioni campionarie fanno ritenere che ci siano differenze più o meno grandi tra campione e popolazione da cui è estratto.

Dobbiamo dotarci di uno strumento che ci aiuti a giudicare se le differenze sono significative (rifiutiamo H_0) o poco significative (non rifiutiamo H_0)

Le differenze sono da considerarsi significative se è bassa la probabilità che siano ascrivibili solo a mere variazioni campionarie.

Quanto bassa?

E' soggettivo!

La statistica test

E' l'anello di congiunzione tra universo dei campioni e valori del parametro

La distribuzione della statistica test T(X;θ) è funzione:

- Del campione casuale $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$
- Del parametro da stimare: θ

Le statistiche test più in uso sono del tipo:

$$T(X;\theta) = \frac{T-\theta}{\sigma(T)}$$

Applicazione/1

Una docente sa che -storicamente- i risultati dei suoi esami scritti hanno μ=25, σ=3.

Però, nell'ultima prova, i risultati dei primi 10 compiti sono molto scadenti. Che si tratti un corso ad alta densità di ciucci?

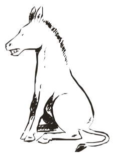
$$\textit{Ipotesi nulla} \quad H_0: \ (\mu - 25) = 0$$
$$\textit{Ipotesi alternativa} \quad H_1: \ \mu < 25$$

Come statistica test sembra ovvio scegliere la media campionaria.

La docente rifiuterà H_0 se il voto medio osservato nel campione sarà molto più piccolo di 25.

Il fatto che si rifiuti H_0 non implica necessariamente che accetti H_1. Potrebbe anche decidere di rinviare la decisione in attesa di avere più dati.

L'ipotesi alternativa è inserita soprattutto per stabilire la direzione del test



Applicazione/2

N.B. si è sostituito l'evento punto μ=23 con l'evento intervallo $\mu \le 23$

nel campione si trova: $\hat{\mu}$ =23

Se l'ipotesi H0 fosse vera, quale sarebbe la probabilità di osservare una media campionaria inferiore o uguale a 23?

Supponendo che la distribuzione sia gaussiana , avremo

"/" significa: sotto H0"

$$P(\hat{\mu} \le 23 | H_0) = P\left(Z \le \sqrt{10}\left(\frac{23-25}{3}\right) | H_0\right) = P(Z \le -2.11 | H_0) = 0.0174$$

sotto l'ipotesi nulla (la media è 25) è altamente improbabile (1.7%) osservare un voto medio di 23 o meno nel campione estratto da una popolazione con μ=25

Ne consegue che lo scarto 23-25 non è attribuibile alle fluttuazioni campionarie, ma fa invece pensare ad una classe particolarmente ciuccia.

Applicazione/3

Dopo aver corretto altri 25 compiti risulta che, su questi, si ha $\hat{\mu} = 27$

A questo punto sorge un altro dubbio: che l'assistente del corso, imbranato come una foca, abbia mischiato i compiti con quelli della classe "advanced"

$$\textit{Ipotesi nulla} \quad H_0: \ (\mu - 25) = 0$$
$$\textit{Ipotesi alternativa} \quad H_1: \ \mu > 25$$

La direzione del test è ora verso i valori alti poiché i valori inferiori a 25 non fanno sorgere questo tipo di dubbio

$$P(\hat{\mu} \ge 27 | \mu = 25) \Rightarrow P\left(\frac{\hat{\mu}-25}{1.6667} \ge \frac{27-25}{1.6667}\right) = P(Z \ge 1.2) = 1 - 0.8849 = 0.1151$$

Lo scarto 25-27 è poco compatibile con l'ipotesi

Un valore superiore maggiore o uguale di 27 lo si può trovare nell'11% dei campioni da popolazioni aventi media 25. L'assistente si salva.

Esempio

La dott.ssa Angelina Romano propone una procedura d'ufficio che riduce i tempi medi rispetto agli attuali μ=75 minuti, pur conservando lo stesso σ=9.

$$\text{Ipotesi nulla} \quad H_0: \ (\mu - 75) = 0$$
$$\text{Ipotesi alternativa} \quad H_1: \ \mu < 75$$

Si considera un campione di n=25 pratiche. Quindi la media del campione -sotto H_0- sarà approssimata dalla gaussiana con μ=75 e $\sigma=9/\sqrt{25}=1.80$

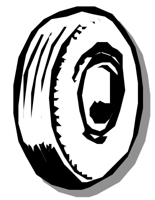
Nel campione si trova $\hat{\mu} = 69.8$

Qual 'è la probabilità di ottenere un valore della statistica test inferiore o uguale del valore osservato se ma media della popolazione è 75?

$$P(\hat{\mu} \le 69.8 | \mu = 75) \Rightarrow P\left(\frac{\hat{\mu} - 75}{1.8} \le \frac{69.8 - 75}{1.8}\right) = P\left(\frac{\hat{\mu} - 75}{1.8} \le -2.89\right) = 0.0019$$

Esempio

L'amministratore delegato, Sig.ra Rosetta Gaudio, di una fabbrica di pneumatici sta valutando la modifica della trama del prodotto leader.



Lo studio di fattibilità segnala che la nuova trama è conveniente se la vita media dei prodotti supera le 20'000 miglia.

$$\text{Ipotesi nulla} \quad H_0: \ (\mu - 20'000) = 0$$
$$\text{Ipotesi alternativa} \quad H_1: \ \mu > 20'000$$

Un campione di n=16 prototipi viene provato dando luogo a $\hat{\mu} = 20{,}758$

Si sa che σ=6'000. L'amministratore Gaudio che deve fare?

$$P(\hat{\mu} \ge 20758 | \mu = 20000) \Rightarrow P\left(\frac{\hat{\mu} - 20000}{1500} \ge \frac{20758 - 20000}{1500}\right) =$$
$$P\left(\frac{\hat{\mu} - 20000}{1500} \ge 0.39\right) = 1 - P\left(\frac{\hat{\mu} - 20000}{1500} < 0.39\right) = 0.3483$$

p-value

Indica la probabilità che valori della statistica test -inferiori o uguali a quello osservato- siano sopravvenuti solo per effetto della sorte.

Quindi, il P-value misura la probabilità di sbagliare, nelle condizioni date, se si rifiuta l'ipotesi nulla

- **Nuova procedura amministrativa**

  $$\text{Ipotesi nulla} \quad H_0: \ (\mu - 75) = 0, \quad P - value = 0.0019$$

  La nuova procedura potrebbe essere non migliorativa rispetto alla vecchia solo in 2 casi su 1000 (circa). E' bene rifiutare H_0

- **Nuovo pneumatico**

  $$\text{Ipotesi nulla} \quad H_0: \ (\mu - 20'000) = 0, \quad P - value = 0.3483$$

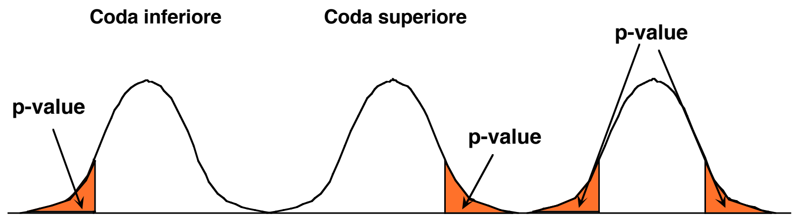
  La nuova trama è migliorativa circa una volta su 3. Non è' consigliabile rifiutare H_0.

Precisazioni

Rispetto all'ipotesi che il parametro abbia un valore prefissato ci sono tre casi:

$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}; \quad \begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{cases}; \quad \begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \ne \theta_0 \end{cases}$$

Nei primi due il test è unidirezionale (o ad una coda), nel terzo è bidirezionale (o a due code).



P-Value/2

Dipende sia dalla distribuzione della statistica test che dal tipo di alternativa.

Nel caso della normale si ha:

$$\text{Se } H_1: \theta > \theta_0 \Rightarrow p-\text{value} = P\left(\hat{\theta} \geq \theta_c\right) = 1-\phi\left(Z_c\right)$$
$$\text{Se } H_1: \theta < \theta_0 \Rightarrow p-\text{value} = P\left(\hat{\theta} \leq \theta_c\right) = 1-\phi\left(Z_c\right)$$
$$\text{Se } H_1: \theta \neq \theta_0 \Rightarrow p-\text{value} = P\left(\left|\hat{\theta}\right| \geq \theta_c\right) = 2\left[1-\phi\left(\left|Z_c\right|\right)\right]$$

Formule analoghe possono essere determinate per la t-Student e per le altre distribuzioni coinvolte nella verifica di ipotesi (chi-quadrato, F-Fisher, etc.)

Guida

Se P -value ≤ 1%.	***Aldilà di ogni ragionevole dubbio si può rifiutare H_0***
Se 1% ≤ P -value ≤ 5%.	***Ci sono buone ragioni per rifiutare H_0***
Se 5% ≤ P -value ≤ 10%.	***Ci sono ragioni per rifiutare H_0, ma non sono del tutto convincenti***
Se P -value > 10%.	***E' consigliabile non rifiutare H_0***

I valori sono solo apparentemente bassi.

Le condizioni di applicabilità dei test (ad esempio la distribuzione normale) sono valide solo in parte).

Di conseguenza, solo una forte evidenza può convincere a rifiutare l'ipotesi nulla (angolatura conservativa)

Esempio

Una compagnia controlla la situazione di magazzino in base alle vendite dell'anno precedente. Si supponga che gli ordini dell'anno precedente abbiano dato luogo

μ=36 miliardi e σ=2 miliardi

Nel primo quadrimestre (n=225) si è riscontrato μ_x=35.82. Ci sono cambiamenti?

$$H_0: \mu = 36 \qquad H_1: \mu \neq 36 \qquad Z_c = \sqrt{225}\left(\frac{35.82-36}{2}\right) = -1.35$$

Poiché n è grande possiamo utilizzare la normale cioè la statistica test

Cioè circa 18 volte su 100, il campione di n=225 estratto dalla popolazione N(36;2) disterà più di 1.35 dalla media ipotizzata. Il valore 35.82 non è allora troppo strano.

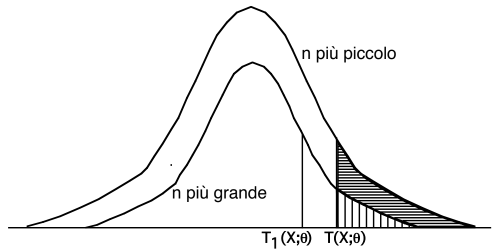
Non ci sono ragioni sufficienti per pensare ad un cambiamento

Ampiezza del campione e p-value

La statistica test è uno stimatore consistente del parametro sotto ipotesi.

Quindi, all'aumentare dell'ampiezza del campione, la sua variabilità si riduce.

Questo implica che le code della distribuzione della statistica test diventano più sottili.



A parità di p-value, la corrispondente statistica test è inferiore.

Ovvero, la stessa statistica test può avere un p-value più piccolo perché il campione è più grande.

ATTENZIONE!
Campioni molto grandi possono rendere significative dei valori della statistica test poco rilevanti dal punto di vista pratico.

Esercizio

La produzione media per ettaro è stata di 18 Kg con σ=7.12. L'uso di un nuovo fertilizzante su n=30 ettari sperimentali, ha dato luogo a

$$\hat{\mu} = 19.5$$

$$\textit{Ipotesi nulla} \quad H_0: \ (\mu - 18) = 0$$

$$P(\hat{\mu} \geq 19.5 | \mu = 18) \Rightarrow P\left(\frac{\hat{\mu} - 18}{7.12/\sqrt{30}} \geq \frac{19.5 - 18}{7.12/\sqrt{30}} \right) =$$

$$P(Z \geq 1.15) = 1 - P(Z < 1.15) = 0.1251$$

Il p-value è relativamente elevato. Non sembra ci sia sufficiente evidenza che il nuovo fertilizzante incida significativamente sulla produttività.

Excel1

Importo				
42.62		Ampiezza	34	=Conta.Numeri(A2:A35)
46.68		Campionaria		
51.73				
62.48		Media	48.84	=Media(A2:A35)
50.28		Campionaria		
43.86				
52.47		Varianza nota	25	
40.99		Popolazione		
37.97				
46.00		H_0: μ=	50	
45.14		H_1: μ<50		
44.62				
36.49		Statistica	-1.3501947	=(D5-D11)/radq(D8/D2)
52.35		Test		
44.71				
46.21		p-Value	0.08847683	=Distr.Norm.St(D14)
54.02				
68.47		Le ragioni per rifiutare H_0 non sono del tutto convincenti		
51.52				
55.42				
40.73				
50.75				
41.78				
61.31				
49.74				
48.24				
42.00				
49.19				
49.81				
45.34				
57.93				
54.32				
46.90				
48.56				

Importo medio speso in un super mercato da un campione di clienti

Excel2

Verifica di un possibile sbilanciamento di un indice aziendale

Indice				
19.36		Ampiezza	24	=Conta(A2:A25)
18.94		Campionaria		
25.42				
18.93		Media	17.80	=Media(A2:A25)
10.37		Campionaria		
11.12				
10.24		Varianza nota	36	
14.98		Popolazione		
14.89				
17.80		H_0: μ=	15.0	
20.26		H_1: μ > 0		
18.74				
19.42		Statistica	2.28487638	=(D5-D11)/radq(D8/D2)
16.15		Test		
11.02				
21.27	p-Value (coda superiore)		0.01116001	=1-Distr.Norm.St(D14)
21.11				
28.14				
29.43		Si può rifiutare l'ipotesi che l'indice aziendale sia in equilibrio		
16.42		Affermando che è sbilanciato verso l'alto si sbaglia l'1%		
13.54		delle volte		
10.03				
16.42				
23.17				

Excel3

Oscillazioni di un corso azionario. Verifica della stabilità.

Scarto	
-2.31	-0.36
-2.24	-4.56
-3.35	-1.97
-0.84	-1.37
-1.68	1.17
-0.75	1.17
1.36	0.25
-3.72	-0.47
-1.88	-0.16
1.31	-2.51
0.37	-1.22
-1.15	-1.22
1.32	-0.83
-1.70	0.54
1.11	0.31
-1.29	-1.71
1.36	-1.43
-1.81	0.76
-1.67	-1.47
0.64	0.28
-1.05	-0.49

Ampiezza Campionaria	42	=Conta(A2:A43)
Media Campionaria	-0.79	=Media(A2:A43)
Varianza nota Popolazione	2.25	
H_0: μ=	0.0	
H_1: μ ≠ 0		
Statistica Test	-3.41908683	=(D5-D11)/radq(D8/D2)
p-Value (coda inferiore)	0.00031421	=Distr.Norm.St(D14)
P-value (coda superiore)	0.99968579	
P-value (totale)	0.00062842	=2*Min(D17,D18)

Si può senzaltro rifiutare l'ipotesi che il corso azionario si stia stabilizzando intorno allo zero

Se σ è incognito...

Il calcolo del p-value ha finora ipotizzato che σ fosse noto e questo è molto irrealistico.

In genere "σ" è stimato con

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\hat{\mu}\right)^2}{n-1}}$$

La statistica test in questo caso è basata sulla t-Student

$$t_c=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}=\sqrt{n}\left(\frac{\hat{\mu}-\mu}{s}\right)$$

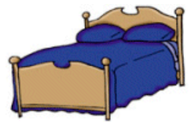
Esempio

Una società che produce mobili ha sempre saputo che per costruire un arredo completo sono necessarie *μ*=20 ore/lavoro.

Di recente, si è anche assunta manodopera con contratto di formazione e si teme che questo faccia aumentare i tempi.

Dalla rilevazione dei tempi su di un campione casuale di n=9 arredi risulta:

25, 29, 23, 23, 31, 21, 27, 25, 33



$$\hat{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{9}x_i}{9}=26.33;\quad \hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{9}\left(x_i-\hat{\mu}\right)^2}{8}}=4$$

$$t_c=\sqrt{9}\left(\frac{26.33-20}{4}\right)=4.748$$

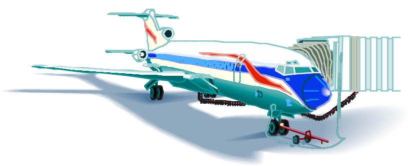
TDIST(4.748;8;1)

$$P\left(t_c\geq 4.748\right)=1-P\left(t_c\leq 4.748\right)=0.0007$$

I tempi sono realmente aumentati, chi affermasse il contrario direbbe la verità solo 7 volte su 10'000.

Esempio

L'Antitrust ha disposto un controllo sulla compagnia aerea "Facta" che propone un volo AZ tra due noti scali a 110 minuti.



In un campione di n=49 si trova:

$$\hat{\mu}=108,\quad \hat{\sigma}=7$$

$$Ipotesi\ \ nulla\quad H_0:\ (\mu-110)=0$$

$$Ipotesi\ \ alternativa\quad H_1:\ \mu\neq 110$$

$$t_c=\sqrt{49}\left(\frac{108-110}{7}\right)=-2,$$

$$P\left(t_c\leq -2\right)=1-P\left(t_c\geq 2\right)=1-\left[1-P\left(t_c\leq 2\right)\right]=P\left(t_c\leq 2\right)=0.0256$$

$$p-value=2(0.0256)=0.0512$$

La dichiarazione della compagnia non sembra infondata, almeno alla luce del campione analizzato

Esercizio

La biologia di molti laghi cambia in peggio a causa delle piogge acide. Un lago è considerato NON Acido se Ph≥6

Ecco il livello di Ph rilevati da due studiosi italiani in n=15 laghi alpini

5.5	5.7	5.8	6.1	6.3
6.3	6.5	6.6	6.7	6.9
6.9	7.2	7.3	7.3	7.9

$$\hat{\mu}=6.6$$

$$s=0.6719$$

Cosa si può dire sui laghi della zona esaminata?

$$Ipotesi\ \ nulla\quad H_0:\ (\mu-6)=0$$

$$Ipotesi\ \ alternativa\quad H_1:\ (\mu>6)$$

$$t_c=\sqrt{15}\left(\frac{6.6-6}{0.6719}\right)=3.4586$$

$$P\left(t_c\geq 3.4586\right)=1-P\left(t_c\leq -3.4586\right)=1-\left[1-P\left(t_c\leq 3.4586\right)\right]=P\left(t_c\leq 3.4586\right)=0.0019$$

L'ipotesi può tranquillamente essere rifiutata con un errore probabile del 2 per mille

Esercizio

Offerte su base d'asta. La cifra di riferimento 28.7 milioni di euro costituisce la media delle proposte?

	A	B	C	D	E	F
1	offerte		TEST SULLA MEDIA -VARIANZA INCOGNITA			
2	26.56		Ampiezza	21	=Conta(A2:A22)	
3	27.25		Campionaria			
4	28.61					
5	25.73		Media	26.77	=Media(A2:A43)	
6	28.43		Campionaria			
7	26.82					
8	25.81		Varianza nota	2.2989		
9	26.63		Popolazione			
10	27.80					
11	20.29		H_0: μ=	28.7		
12	25.01		H_1: μ ≠ 28.7			
13	28.10					
14	29.98		Statistica	-3.840127	=Radq(D2)*(D5-D11)/D8	
15	29.42		Test			
16	29.23					
17	29.64		Gradi di libertà	20	=D2-1	
18	26.45					
19	26.56		P-value (totale)	0.00102216	=DISTRIB.T(-D14;D17;2)	
20	25.36					
21	23.04					
22	25.51		Si deve rifiutare l'ipotesi le offerte abbiano 28.7			
23			Come base di riferimento			

Test sulla proporzione

La percentuale di clienti di cui si finanzia il credito potrebbe sfuggire al controllo e deviare rispetto al 65% dello scorso anno.

L'ufficio fidi esegue un test al 10% e trova che, in un campione di n=315 sono stati affidati 214 clienti cioè H=0.6794

$$Ipotesi\ \ nulla\quad H_0:\ (\pi-0.65)=0$$

$$Ipotesi\ \ alternativa\quad H_1:\ \pi\neq 0.65$$

$$Z_c=\left(\frac{0.6794-0,65}{\sqrt{\dfrac{0.6794(1-0.6794)}{315}}}\right)=1.118$$

$$P(Z_c\leq -1.118)=0.1318$$

$$p-value=2(0.1318)=0.2636$$

Non si può rifiutare H_0

Esercizio

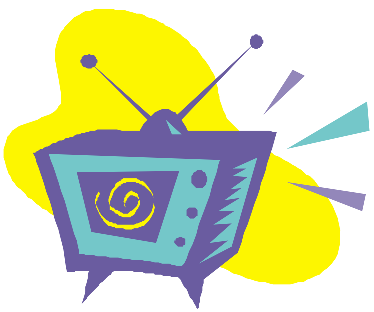
In un rapporto AUDITEL è riportato che le persone che guardano i film in televisione dopo mezzanotte sono equamente suddivise tra i due sessi.

In un campione casuale di 400 persone che guardano la televisione nelle ore piccole si sono trovati 180 donne.

a) Si effettui un test su H_0: π=50% contro H_1: π ≠ 50%;
b) Si effettui un test su H_0: π=50% contro H_1: π < 50%

a) $Z_c=2,\ \ p-value=4.6\%$

b) $Z_c=-2,\ \ p-value=2.3\%$



Esercizio

Un'indagine sulle intenzioni di voto di un campione di universitari ha prodotto i seguenti risultati. Qual è la probabilità che il "non voto" resti sotto i 2/3?

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Posizione**		TEST SULLE PROPORZIONI -Uso della Normale				
2	Voto	Non voto	Ampiezza	50	=Conta.Valori(A2:A51)		
3	Non voto	Non voto	Campionaria				
4	Non voto	Non voto					
5	Non voto	Non voto	Risposta	Non voto	=Media(A2:A43)		
6	Voto	Non voto	Di interessa				
7	Non voto	Voto					
8	Voto	Non voto	Conteggio	32	=CONTA.SE(D5)		
9	Non voto	Voto	risposte				
10	Non voto	Non voto					
11	Non voto	Non voto	Proporzione	0.6400	=D11/D2		
12	Voto	Voto	campionaria				
13	Voto	Non voto					
14	Non voto	Non voto	Approssimazione	0.0679	=RADQ(D11*(1-D11)/D2)		
15	Voto	Non voto	Dev.Standard				
16	Non voto	Voto					
17	Non voto	Non voto	H_0: π=0.66	0.6600			
18	Voto	Non voto	H_1: μ < 0.66				
19	Non voto	Voto					
20	Non voto	Voto	Statistica	-0.2946278	=(D11-D17)/D14		
21	Non Voto	Voto	Test				
22	Voto	Voto					
23	Non voto	Non voto	p-Value	0.38413917	=Distr.Norm.St(D20)		
24	Non voto	Non voto					
25	Non voto	Voto	Non c'evidenza campionaria che la percentuale del "non voto"				
26	Voto	Non voto	si mantenga al di sotto dei 2/3.				

Test sulla differenza tra medie
(Z-test cioè varianze note)

Indichiamo con D la differenza ipotizzata tra le due medie (spesso è zero) abbiamo

$$Z_c = \frac{(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

La stessa procedura si applica se le ampiezze dei campioni sono entrambe molto grandi ed i campioni sono indipendenti

Basterà sostituire alle varianze incognite le loro stime campionarie

Esempio

La proprietà di un ristorante vuole sapere se la nuova campagna pubblicitaria ha aumentato gli incassi. Ecco i risultati per il periodo precedente la campagna e per il periodo seguente

	Prima	*Dopo*
n	50	30
$\hat{\mu}$	12.55	13.30
$\hat{\sigma}$	215	238

Per verificare l'ipotesi che la campagna sia stata efficace si pone

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases} \qquad Z_c = \frac{12.55 - 13.30}{\sqrt{\frac{215^2}{50} + \frac{238^2}{30}}} = -\frac{0.75}{53.03} = -1.41$$

Poiché il p-value del test è del 7.9% non possiamo rifiutare l'ipotesi H_0 dato che un errore dell'8% è troppo alto statisticamente.

A questo punto non c'è evidenza della efficacia della campagna

Esercizio

Un'indagine sulla spesa media di trasporti tra operati ed impiegati ha dato luogo ai seguenti risultati

La differenza nelle spese è significativa all'uno per mille

	A	B	C	D	E	F
1			TEST SULA DIFFERENZA TRA MEDIE - VARIANZE NOTE			
2	Operai	Impiegati		SRUMENTI-ANALISI DEI DATI-		
3	11.14	13.02		Test z: due campioni per medie		
4	16.51	19.77				
5	15.07	17.96		Test z: due campioni per medie		
6	18.41	22.15				
7	10.49	12.20			*Variabile 1*	*Variabile 2*
8	19.70	13.77		Media	15.9503	17.8072
9	14.56	17.32		Varianza nota	3.5	4.1
10	16.12	19.28		Osservazioni	35	19
11	17.52	21.03		Differenza ipotizzata per le medie	0	
12	21.60	22.67		z	-3.3044	
13	16.11	19.27		P(Z<=z) una coda	0.0005	
14	17.44	15.91		z critico una coda	1.6449	
15	16.88	20.23		P(Z<=z) due code	0.0010	
16	12.80	15.11		z critico due code	1.9600	
17	12.94	15.28				
18	16.98	20.36				
19	15.86	18.96				
20	15.95	14.04				
21	16.68	19.99				
22	11.14					
23	18.78					
24	12.01					
25	16.68					
26	15.41					
27	14.44					
28	16.00					
29	14.94					
30	19.10					
31	15.85					
32	18.41					
33	14.81					
34	14.84					
35	15.99					
36	19.98					
37	17.11					

Test sulla differenza tra medie
(t-test, varianze eguali)

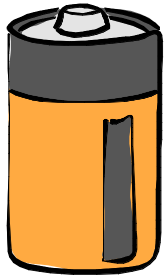
$$t_c = \frac{(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_A\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

S_A è lo scarto quadratico medio aggregato

$$S_A = \frac{(n_1 - 1)\sigma_1 + (n_2 - 1)\sigma_2}{(n_1 + n_2 - 2)}$$

Quando i campioni sono piccoli questo test è abbastanza valido perché non è molto sensibile anche a congrue differenze tra le varianze

Esempio



Una ditta produttrice di batterie vanta una durata media μ_1=75 ore con SQM di 7 ore (valori ricavati da un campione casuale semplice di n_1=20 batterie)

Un campione di n_2=15 batterie di una ditta concorrente ha dato luogo ad una media di μ_2=70 ore con SQM di 5 ore.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

$$S_A = \sqrt{\frac{19*7^2+14*5^2}{20+15-2}} = \sqrt{\frac{1281}{33}} = 6.23 \qquad t_c = \frac{(75-70)-0}{6.23\sqrt{\frac{1}{20}+\frac{1}{15}}} = \frac{5}{2.13} = 2.35$$

$$p - value = 1 - T_{33}(2.35) = 1.25\%$$

La ditta potrebbe avere qualche ragione a sostenere che le sue batterie durano più a lungo rispetto a quelle dei concorrenti

Esercizio

Tempi medi di completamento di un compito distinti per sesso

	A	B	C	D	E	F	G
1	TEST SULLA DIFFERENZA TRA MEDIE - PICCOLI CAMPIONI - VARIANZE INCOGNITE MA UGUALI						
2							
3	Maschi	Femmine					
4	118.38	118.38		Test t: due campioni assumendo uguale varianza			
5	118.38	105.74					
6	105.74	109.35			*Variabile 1*	*Variabile 2*	
7	109.35	117.19		Media	119.3386	120.3630	
8	117.19	113.26		Varianza	66.8361	65.5155	
9	113.26	126.59		Osservazioni	15	19	
10	126.59	125.65		Varianza complessiva	66.0933		
11	125.65	107.41		Differenza ipotizzata pe	0.0000		
12	107.41	121.63		gdl	32.0000		
13	121.63	124.45		Stat t	-0.3648		
14	124.45	123.42		P(T<=t) una coda	0.3588		
15	123.42	121.52		t critico una coda	1.6939		
16	121.52	119.90		P(T<=t) due code	0.7176		
17	119.90	137.22		t critico due code	2.0369		
18	137.22	119.27					
19		120.52					
20		117.90					
21		135.22					
22		122.27					
23							

Non ci sono evidenze convincenti che il sesso di chi esegue il compito faccia la differenza nei tempi di completamento

Test sulla differenza tra medie
(t-test, varianze diverse)

Indivhiamo con D la differenza ipotizzata tra le due medie (spesso è zero) abbiamo

$$t_c = \frac{(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}}}$$

I gradi di libertà sono approssimati dalla formula

$$df = \left[\frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} \right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2} \right)^2}{n_2 - 1}} \right]$$

Esempio

Confronto di due processi produttivi;

1° tipo. Su di un campione di 13 pezzi, ha funzionato in media 202 ore con un SQM di 9 ore.

2° tipo. Su di un campione di 10 pezzi, è durato in media 195 ore con SQM di 6 ore.

Verifichiamo il p-value dell'ipotesi di uguaglianza tra le durate in un test bilaterale

$$Ipotesi\ nulla \quad H_0: \quad D = 0$$
$$Ipotesi\ alternativa: \quad H_1 \quad D \neq 0$$

$$df = \left[\frac{\left(\frac{81}{13} + \frac{36}{10} \right)^2}{\frac{\left(\frac{81}{13} \right)^2}{12} + \frac{\left(\frac{36}{10} \right)^2}{9}} \right] = \left[\frac{96.44}{4.675} \right] = [20.629] = 20$$

$$t_c = \frac{(202 - 195) - 0}{\sqrt{\frac{81}{13} + \frac{36}{10}}} = 2.23$$

P-value: 3.7%

Si può rifiutare H_0 , ma non sarebbe sbagliato cercare più dati

Esercizio

Confronto dei guadagni iniziali tra Laureati non laureati.

Lo scarto di 300 euro non risulta significativo

	A	B	C	D	E	F
1	TEST T- DUE CAMPIONI ASSUMENDO VARIANZE DIVERSE					
2						
3	Laureati	Non laureati				
4	2123.77	1885.65		Test t: due campioni assumendo varianze diverse		
5	1720.96	1281.44				
6	1924.34	1586.50			*Variabile 1*	*Variabile 2*
7	1670.92	1206.38		Media	1783.5170	1356.0815
8	1559.65	1039.48		Varianza	55948.8161	140122.4605
9	1386.49	779.73		Osservazioni	36	25
10	1598.77	1098.16		Differenza ipotizzata	300	
11	1969.72	1654.58		gdl	37	
12	1616.39	1124.58		Stat t	1.50613	
13	1516.71	975.07		P(T<=t) una coda	0.07026	
14	1758.07	1337.10		t critico una coda	1.68709	
15	1664.51	1196.76		P(T<=t) due code	0.14052	
16	1639.49	1159.24		t critico due code	2.02619	
17	1878.81	1518.21				
18	1798.33	1397.49				
19	2076.27	1814.40				
20	1695.70	1243.55				
21	1777.92	1366.88				
22	2443.37	2365.05				
23	2002.36	1703.54				
24	2155.88	1933.81				
25	1481.22	921.83				
26	1531.60	997.40				
27	1555.76	1033.63				
28	1721.02	1281.54				
29	2011.78					
30	2120.05					
31	1691.47					
32	1815.58					
33	1904.83					
34	1517.31					
35	1927.16					
36	1913.04					
37	1894.05					
38	1744.33					
39	1398.98					

Rilevazioni abbinate

Si è già detto che è più facile incontrare il caso di due variabili osservate sulle unità di uno stesso campione (*matched pairs*) che un campione per ogni variabile. Questo però genera dipendenza e correlazione.

La statistica test per verificare la differenza tra medie è ora:

$$D = \frac{\hat{d} - d_0}{\hat{\sigma}_d / \sqrt{n}}; \quad dove \begin{cases} \hat{d} = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 \\ d_0 = differenza \ \ sotto \ \ H_0(di \ \ solito \ \ zero) \\ \hat{\sigma}_d^2 = \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 - 2Cov(X_1, X_2) \end{cases}$$

usando la t-Student con (n-1) gradi di libertà

Per il calcolo della deviazione standard si possono usare direttamente le differenze tra i valori osservati delle due serie:

Esempio

La presenza di metalli nell'acqua ne influenza il sapore è -se elevata- può causare danni alla salute.

La concentrazioni di zingo (Mg/L) è stata rilevata sulla superficie e sul fondo di una sorgente in n=6 punti diversi

punto	1	2	3	4	5	6	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
Fondo	0.430	0.266	0.567	0.531	0.707	0.716	0.5362	0.00587
Superf.	0.415	0.238	0.390	0.410	0.605	0.609	0.4445	0.00402

$$D = \frac{0.0917}{0.06069 / \sqrt{6}} = 3.701$$

P-value=TDIST(A1,5,2)=0.01398488

C'è differenza, ma non sembra poi tanto evjdente

Test della differenza tra proporzioni

X_1 è il numero di unità speciali rispetto alla variabile dicotoma Y rilevata su n_1 unità della popolazione 1

X_2 è il numero di unità speciali rispetto alla variabile dicotoma W (che può essere la stessa Y) rilevata su n_2 unità della popolazione 2 (che può essere la stessa della 1).

Sia inoltre:

$n_1\pi_1 \geq 5$ e $n_2\pi_2 \geq 5$ (in modo che i campioni possano considerarsi "grandi")

La selezione delle unità del secondo campione avviene in modo del tutto indipendente dalla selezione delle unità del primo campione.

Test della differenza tra proporzioni (H0: $\pi_1-\pi_2\neq 0$)

e la verifica di potesi si basa sulla statistica:

$$Z_c = \frac{(\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2) - \pi_0}{\sqrt{\frac{\hat{\pi}_1(1-\hat{\pi}_1)}{n_1} + \frac{\hat{\pi}_2(1-\hat{\pi}_2)}{n_2}}} \quad con \begin{cases} \hat{\pi}_1 = x_1/n_1 \\ \hat{\pi}_2 = x_2/n_2 \end{cases}$$

Ed il p-value si ricava dalla normale standardizzata

Esempio

La dott.ssa Velia Zupo sostiene che l'inserimento di specifiche immagini sulla home page dell'azienda aumenterà di almeno il 10% i contatti operativi con il sito compensando i maggiori costi. Detto fatto.

Nei tre mesi precedenti i contatti operativi furono 188 su 376 (0.50), nei tre mesi successivi 260 su 400. Verifichiamo l'ipotesi della Zupo.

$$\begin{cases} H_0 : (\pi_1 - \pi_2) = 0.1 \\ H_1 : (\pi_1 - \pi_2) > 0.1 \end{cases} \qquad Z_c = \frac{(0.65 - 0.50) - 0.1}{\sqrt{\frac{0.65 * 0.35}{400} + \frac{0.50 * 0.50}{376}}} = 1.42$$

P-value=1-NORMSDIST(1.42)=0.07780389

Non ci sono sufficienti evidenze che la Zupo abbia ragione.
Trasferita in portineria!

Test della differenza tra proporzioni (H0: $\pi_1-\pi_2=0$)

E' la situazione più diffusa. Se è vera l'ipotesi non ci sono DUE popolazioni, ma solo UNA e la stima della probabilità di successo è:

$$\hat{\pi} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1}{n_1 + n_2}\hat{\pi}_1 + \frac{n_2}{n_1 + n_2}\hat{\pi}_2$$

La verifica di ipotesi si basa sulla statistica:

$$Z_c = \frac{(\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2)}{\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

che tende alla normalità.

Esempio

Una delle applicazioni più eclatanti della statistica avvenne nel 1954 con il vaccino di Salk per la poliomelite.

Il vaccino fu somministrato ad un campione di n_2=200745 bambini trovando x_2=33 casi di polio e ad un altro campione di n_1=201229 bambini venne dato un placebo nella versione DOUBLE BLIND con X_1=110 casi.

$$\begin{cases} H_0 : \pi_1 = \pi_2 \\ H_1 : \pi_1 > \pi_2 \end{cases} \qquad Z_c = \frac{0.00038226}{\sqrt{0.00035574 * \left(\frac{1}{201229} + \frac{1}{200745}\right)}} = 6.425$$

P-value=1-NORMSDIST(6.425)=6.62455E-11

La somministrazione del vaccino ha dimezzato i casi di poliomelite. Per caso questo sarebbe potuto succedere solo una volta su 50 miliardi

P-Value per la correlazione

Una volta calcolato r(x,y) su di un campione di osservazioni cosa si può dire sul coefficiente di correlazione che lega le due variabili nell'intera popolazione?

$$H_0: \ \rho = 0 \ \ (assenza\ di\ un\ legame\ lineare$$
$$H_1: \ \rho \neq 0 \ \ (presenza\ di\ un\ legame\ lineare$$

La statistica test che si usa è

$$t_c = \sqrt{n-2}\left(\frac{r(y,x)}{\sqrt{1-[r(y,x)]^2}}\right)$$

La cui distribuzione è ben approssimata dalla t-Student con (n-2) gradi di libertà

p-Value per il rho di Spearman

Una volta calcolato rho su di un campione, cosa si può dire sul rho di Spearman che lega le variabili nell'intera popolazione?

$$H_0: \ \rho = 0 \ \ (NON\ \ esiste\ \ una\ \ relazione\ \ monotona)$$
$$H_1: \ \rho \neq 0 \ \ (Esiste\ \ una\ \ relazione\ \ monotona)$$

La statistica test che si puo' usare è la stessa del coefficiente di correlazione

$$t_c = \sqrt{n-2}\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

Per n<11 tale formula deve essere usata con molta prudenza

La cui distribuzione è approssimata dalla t-Student con (n-2) gradi di libertà

p-Value per il tau di Kendall

$$H_0: \ \tau = 0 \ \ (NON\ \ esiste\ \ una\ \ relazione\ \ monotona)$$
$$H_1: \ \tau \neq 0 \ \ (Esiste\ \ una\ \ relazione\ \ monotona)$$

La statistica test che si puo' usare è

$$t_c = \frac{3t\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{2(2n+5)}}$$

Per n<11 tale formula deve essere usata con molta prudenza

La cui distribuzione è approssimata dalla Normale standardizzata

Critica all'uso dei test

L'uso dei test statistici è molto diffuso, ma essi non sono immuni da critiche:

- **VIOLAZIONI DELLE CONDIZIONI DI BASE**

  Molte condizioni (indipendenza nel campione, normalità, "n" grande) non sono verificate.

  Spesso le procedure sono ROBUSTE cioè non si alterano di molto se certe condizioni vengono meno. Ma fino a che punto si può arrivare?

- **INTERPRETAZIONE RIGIDA DEL CRITERIO DI "ACCETTAZIONE"**

  Rifiutare un'ipotesi a meno di prove contrarie è chiaro. Ma "accettare" è pure chiaro? E' sicuro che l'insufficienza delle prove porti al pieno accoglimento della H0? No, ovviamente. Spesso si sostituisce la locuzione NON RIFIUTO.

- **Piani di campionamento TROPPO SEMPLICI**

Test del rapporto di verosimiglianza

Questo tipo di test poggia su un risultato valido per grandi campioni e per un numero elevato di categorie di righe e di colonne.

Il p-value è ottenuto dalla distribuzione del chi-quadrato con (r-1)(c-1) gradi di libertà.

Ad esempio

CHIDIST(37.5617;4)=0,00000014

Che induce a rifiutare l'ipotesi di assenza di legame. Il legame esiste ed è abbastanza dal puto di vista statistico:

Con questa asserzione si rischia di sbagliare 7 volte su 5 milioni

Test del χ^2 (chi quadrato)

Questa metodologia è richiamata in tre distinte occasioni

- Adattamento delle frequenze osservate ad un modello
- Omogeneità di due o più campioni
- Indipendenza in una distribuzione doppia

L'analisi di dati categoriali

Ogni osservazione di un campione di ampiezza "n" è classificata in una ed una sola di "k" categorie fisse ed invariabili.

Categ.	*fr.ass.*	*fr.rel.*
X_1	n_1	f_1
X_2	n_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_k	n_k	f_k
	n	1

Siamo convinti che dietro queste frequenze ci sia un meccanismo che determina il verificarsi di una modalità piuttosto che un'altra

L'analisi di dati categoriali/2

Supponiamo che l'acquisizione dei dati avvenga in forma di prove indipendenti svolte nelle stesse condizioni.

Ricorrono allora le condizioni del modello multinomiale e la probabilità della configurazione ottenuta è

Categ.	$P(X=X_i)$
X_1	π_1
X_2	π_2
$\vdots$	$\vdots$
X_k	π_k
	1

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \ldots \pi_k^{n_k}$$

Note le π_i sarà possibile calcolare la probabilità di qualsiasi allocazione del campione tra le varie categorie e poi decidere sull'entità della differenza

Esempio

Classificazione di un gruppo di n=20 persone per gruppo sanguigno:

Categ.	*fr.ass.*	*fr.rel.*
0	7	0.35
A	4	0.20
B	3	0.15
AB	6	0.30
	20	1.00

Supponiamo che i gruppi siano equiprobabili.

$$\begin{cases} H_0: \pi_i = 0.25 \;\; per \;\; ogni \;\; i \\ H_1: \;\pi_i \neq 0.25 \;\; per \;\; almeno \;\; un \;\; i \end{cases}$$

Alla luce della classificazione prodottasi nel campione, c'è sufficiente evidenza di tale meccanismo?

Sotto H_0 la probabilità di osservare la configurazione è

$$P(7,4,3,6) = \frac{20!}{7!4!3!6!}0.25^{20} = 0.0042$$

Al momento non riusciamo a dire se è bassa o è alta dato che le possibili alternative sono moltissime.

il test del χ^2

il grande pregio della multinomiale è che la statistica

$$\chi_c^2 = n\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i - \pi_i)^2}{\pi_i}\right] = \sum_{i=1}^{n}\frac{(n_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i} = \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{n_i^2}{n\pi_i}\right] - n$$

ha una distribuzione che, per "n" abbastanza grande, è ben approssimata dalla χ^2(k-1) (è richiesto che $n^*\pi_i \geq 5$ per ogni "i")

Poiché χ_c^2 è la somma ponderata di scarti al quadrato sarà nullo se e solo se lo sono tutti gli addenti (perfetto adattamento).

Ogni discrepanza tra teoriche ed osservate aumenta il χ_c^2 (e quindi riduce il p-value) allontanandoci da H_0 per avvicinarci ad H_1

Esempio (continua)

$$\chi_c^2 = \frac{(7-5)^2}{5} + \frac{(4-5)^2}{5} + \frac{(3-5)^2}{5} + \frac{(6-5)^2}{5} = \frac{10}{5} = 2; \quad gdl = (4-1) = 3$$

Per i gradi di libertà si tiene conto che frequenze teoriche ed osservate coincidono e che la somma la loro somma deve essere pari ad uno(quindi solo (k-1) sono libere di variare)

P-Value DISTRIB.CHI(2;3)=57.2%

Non c'è quindi evidenza di una distribuzione NON uniforme dei pazienti per gruppo sanguigno

Test sull'adattamento

Poiché la decisione verrà presa in base all'adattamento delle frequenze a modelli precostituiti si parla di test di adattamento (*Goodness-of-fit Test*).

Si vuole confermare o sconfermare l'ipotesi che le frequenze nel campione scaturiscano da una particolare distribuzione:

$$\begin{cases} H_0: \pi_i = \pi_i^0, \; i = 1,2,\ldots,k \\ H_1: \pi_i \neq \pi_i^0, \; per \;\; almeno \;\; un \;\; i \end{cases}$$

Si adopera la seguente statistica test:

$$\chi_c^2 = n\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i - \pi_i^0)^2}{\pi_i^0}\right] = \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{n_i^2}{n\pi_i^0}\right] - n$$

L'esperimento di Mendel

La teoria di Mendel nacque dall'incrocio di piselli gialli lisci e piselli verdi corrugati: gli ibridi presenteranno i due caratteri in proporzioni determinate.

$$H_0: G.L. = 9/16;\; V.L. = 3/16;\; G.C. = 3/16;\; V.C. = 1/16$$

i dati su cui si basò Mendel furono

Categoria	frequenze
Gialli lisci	315
Verdi lisci	108
Gialli corrugati	101
Verdi corrugati	32
	556

$$\chi_c^2 = \frac{(315-312.75)^2}{312.75} + \frac{(108-106.25)^2}{106.25} + \frac{(101-104.25)^2}{312.75} + \frac{(32-34.75)^2}{34.75}$$
$$= 0.47$$

il P-value del test è circa del 95% per cui non possiamo rifiutare H_0 nemmeno a questi livelli "assurdi" di significatività

C'è il sospetto che i dati siano troppo buoni per essere veri

Esercizio

Un cliente può scegliere una particolare marca di caffé fra le tre in vendita su uno scaffale sotto osservazione. I risultati su 300 acquisti sono i seguenti

Marca	n_i
Old moka	78
Braz	117
Arab mix	105
	300

Se i consumatori fossero INDIFFERENTI rispetto alle marche la probabilità di sceglierne una qualsiasi sarebbe 1/3.

L'indagine sottopone a verrifica la seguente ipotesi

$$\begin{cases} H_0: \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 \\ H_1: \pi_i \neq \pi_j \text{ per almeno un } i \neq j \end{cases}$$

Sotto H0 dovremmo trovare le frequenze assolute: 100, 100, 100.

RAGIONAMENTO: Fino a che punto gli scarti tra osservate e teoriche sono da attribuire alle fluttuazioni campionarie?

CALCOLO:

Poichè si opera sulle assolute riscriviamo la formula in base a queste

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{d_i^2}{n*\pi_i};\quad \text{con } d_i = n_i - n*\pi_i$$

i	n_i	$n*\pi_i$	d_i	d_i^2	$\frac{d_i^2}{n*\pi_i}$
1	78	100	−22	484	4.84
2	117	100	17	289	2.89
3	105	100	5	25	0.25
	300	300	0		$\chi^2 = 7.98$

P-value:0.01849971

Frequenze teoriche

Se il modello è completamente specificato (ipotesi semplice) si ottengono dalle funzioni di distribuzioni o di densità

CASO DISCRETO $P(X_i = x_i) = \pi_i \quad i = 1,2,\ldots,k$

Esempio: La Poisson

H_0: La distribuzione teorica è la Poisson con media 2 $\qquad P(X_i = x_i) = \frac{2^{x_i} e^{-2}}{X_i!}$

CASO CONTINUO $P(L_i \le x \le U_i) = \int_{L_i}^{U_i} f(x)dx$

Esempio: La Normale

H_0: La distribuzione teorica è la $N(\mu = 5, \sigma = 2)$

$$P(L_i \le x \le U_i) = \int_{L_i}^{U_i} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \phi\left(\frac{U_i - 5}{2}\right) - \phi\left(\frac{L_i - 5}{2}\right) = \pi_i$$

Da notare che occorre si abbia sempre: $\quad \pi_i \ge 0; \quad \sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1$

Esempio

Gli studenti di informatica affrontano questioni relative ai linguaggi: 1) BASIC, 2)FORTRAN, 3)C++, 4)PASCAL.

Il tutoraggio è organizzato nel presupposto che B=40%, F=25%, C=25%, P=10%

I dati raccolti hanno fatto riscontrare:

Linguaggi	B	F	C	P
Frequenza	52	38	21	9

Si accetta o si rifiuta l'ipotesi che l'assistenza sia ben organizzata?

$$\begin{cases} H_0: \pi_1 = 0.40,\ \pi_2 = 0.25,\ \pi_3 = 0.25,\ \pi_4 = 0.10 \\ H_1: \pi_1 \neq 0.40 \text{ o } \pi_2 \neq 0.25 \text{ o } \pi_3 \neq 0.25 \text{ o } \pi_4 \neq 0.10 \end{cases}$$

$$\chi_c^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i}\right) - n = \left(\frac{52^2}{120*0.40} + \frac{38^2}{120*0.25} + \frac{21^2}{120*0.25} + \frac{9^2}{120*0.1}\right) - 120$$
$$= (56.3333 + 48.1333 + 14.7000 + 6.7500) - 120 = 5.9166$$

P-value= 0.116

Non c'è evidenza sufficiente per ritenere che ci sia cattiva organizzazione

Presenza di parametri incogniti

Spesso è noto solo il tipo di modello,ma si ignora uno o più parametri

I parametri debbono essere stimati dal campione

Ci sono però conseguenze sul test χ^2 dato che l'uso duplice del campione "trucca" l'adattamento facendolo sembrare migliore di quanto non sia.

Ne consegue che il p-value debba essere operare con meno gradi di libertà

Infatti, si dimostra che, se "n" è abbastanza grande, se si stimano "m" parametri il p-value adatto deriva dalla distribuzione chi-quadro con (k-1-m) gradi di libertà

Esempio

il numero di clienti in arrivo ogni ora in un ufficio postale, rilevato sulla base di un campione casuale di 100 ore, è stato il seguente:

Clienti	osservate n_i
0	38
1	36
2	14
3	7
4	3
5	2
≥ 6	0
	100

Sottoporre a verifica la seguente ipotesi
Usare il livello di significatività α=1%

$$\begin{cases} H_0: \text{ Il modello é Poissoniano} \\ H_1: \text{ non lo è} \end{cases}$$

1) Stimare la media: $\hat{\lambda} = \dfrac{0*38+1*36+2*14+3*7+4*3+5*2+6*0}{100} = 1.07$

2) Calcolo delle teoriche. Per comodità usiamo λ=1

$$P(X = x) = \frac{e^{-1}1^x}{x!} = \frac{1}{e*x!}$$

x	$\frac{100}{e*x!}$
0	36.8
1	36.8
2	18.4
3	6.1
4	1.5
5	0.3
≥ 6	0.1
	100

$$\chi^2_c = \frac{(38-36.8)^2}{36.8} + \frac{(36-36.8)^2}{36.8} + \ldots + \frac{(0-0.1)^2}{0.1} = 3.07$$

$$g = 7 - 1 - 1 = 5$$

P-value=68.9%. Non si può rifiutare

Esercizio

Una lampada è venduta con accluse 4 batterie. Si esamina un campione di n=150 item riscontrando il numero di batterie difettose.

Difetti	0	1	2	3	4	
Frequenza	26	51	47	16	10	150

Si sottoponga a verifica l'ipotesi seguente:

$$\begin{cases} H_0: \pi_i = \binom{4}{i} p^i (1-p)^{4-i} \quad \text{per} \quad i = 0,1,2,\ldots,4 \\ H_1: \pi_i \neq \binom{4}{i} p^i (1-p)^{4-i} \end{cases}$$

Possiamo stimare "p" come numero di difettose sul totale di batterie c:

$$p = \frac{51+94+48+40}{600} = 0.3883$$

0	21.0013
1	53.3254
2	50.7755
3	21.4878
4	3.4101

$$\chi^2_c = 15.7086$$

P-value=0.00130174. L'ipotesi è da rifiutare

Test dell'omogeneità dei campioni

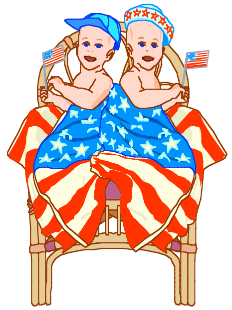
il test del χ^2 può essere utilizzato anche nella seguente situazione:

Si osservano due (o più) classificazioni campionarie.

Le ampiezze possono essere diverse, ma le categorie sono identiche.

Ci si chiede se i campioni provengono dalla stessa popolazione.

Ad esempio per due campioni abbiamo



$$H_0: \pi_{1i} = \pi_{2i} \quad per \ ogni \ "i"$$
$$H_1: \pi_{1i} \neq \pi_{2i} \quad per \ almeno \ un \ "i"$$

La statistica test assume ora la forma $\chi^2_c = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\pi_{i1} - \pi_{i2})^2}{\pi_{i2}}$

Esempio

Due campioni di misurazioni del tempo precedente la prima disfunzione in due diversi macchinari hanno dato luogo alla tabella

Tempi	C_1	C_2	C_2/risc	(f1i-f'2i)²/f'2i
0 - 20	29	56	32.78	0.436
20 - 40	27	41	24.00	0.375
40 - 60	14	32	18.73	1.195
60 - 70	11	19	11.12	0.001
70 - 80	8	13	7.61	0.020
>80	7	3	1.76	15.659
	96	164	96.00	17.686

Le "teoriche" sono ottenute come: $n'_{2i} = n_1 f_{2i}$

La statistica test è χ^2 =17.686 con 6-1=5 gradi di libertà

DISTRIB.CHI(17.686;5)=0.00336 (p-Value)

L'ipotesi si deve rifiutare aldilà di ogni ragionevole dubbio

Esercizio

Numero di incidenti automobilistici lungo una strada a scorrimento veloce. Frequenza per lato di percorrenza

Verso Sud	Settimane	Verso Nord	Settimane
0	39	0	82
1	28	1	60
2	19	2	40
3	13	3	27
4	8	4	18
5	4	5	8
>5	2	>5	4
	113		239

Determinate il p-value dell'ipotesi di omogeneità dei due campioni

Test sull'indipendenza

Un problema ricorrente in statistica riguarda l'indipendenza o meno di due categorie di classificazione

L'ipotesi da sottoporre a verifica è

$$H_0:\ \pi_{ij} = \pi_{i.}\pi_{.j}\ \ per\ \ ogni\ "i\ e\ j"$$
$$H_1:\pi_{ij} \neq \pi_{i.}\pi_{.j}\ \ per\ \ almeno\ un\ "i\ e\ j"$$

Si adopera la seguente statistica test:

$$\chi^2_c = n\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(f_{ij}-\pi_{ij}\right)^2}{\pi_{ij}}\right] = \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(n_{ij}-n\pi_{ij}\right)^2}{n\pi_{ij}} = \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{n_{ij}^2}{n\pi_{ij}}\right] - n$$

Esempio

Uno studio su di un campione di mariti ha prodotto i seguenti risultati

	La moglie lavora			
	Full-time	Part-Time	Casalinga	Totale
Accetto che lavori	148	51	49	248
Non mi importa	34	16	7	57
Non so/Non risponde	36	26	32	94
Non voglio che lavori	25	81	126	232
	243	174	214	631

	La moglie lavora			
	Full-time	Part-Time	Casalinga	Totale
Accetto che lavori	95.5055	68.3867	84.1078	248
Non mi importa	21.9509	15.7179	19.3312	57
Non so/Non risponde	36.1997	25.9208	31.8796	94
Non voglio che lavori	89.3439	63.9746	78.6815	232
	243	174	214	631

	La moglie lavora			
	Full-time	Part-Time	Casalinga	
Accetto che lavori	28.8535	4.4204	14.6545	
Non mi importa	6.6139	0.0051	7.8660	
Non so/Non risponde	0.0011	0.0002	0.0005	
Non voglio che lavori	46.3393	4.5309	28.4571	
	81.8079	8.9566	50.9780	141.7

p-value= 1.2E-29

C'è fortissima evidenza CONTRO l'ipotesi di indipendenza come del resto era facile da immaginare quardando la tabella

Considerazioni sul $\chi 2$

Il test del $\chi 2$ è del tipo DISTRIBUTION FREE cioè la sua impostazione non dipende da una particolare distribuzione.

In questo senso è anche detto NON PARAMETRICO.

E' un test di grande generalità e può essere applicato in una gamma molto grande di situazioni.

Ma proprio questa è la sua debolezza: perchè sia veramente informativo, il rifiuto dell'ipotesi nulla deve avvenire a livelli moltoelevati di significatività (ovvero valori molto bassi del p-value)

Modello lineare stocastico

La variabile casuale Y ha distribuzione gaussiana con media che dipende linearmente dal livello dell'esogena X

$$M(Y|X = x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i = y_i \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

La X può sia essere una variabile casuale che un blocco di costanti fisso ed invariabile

Si eseguono "n" osservazioni indipendenti di coppe di valori (y,x)

Il modello lineare stocastico parte da

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Test nel modello di regressione

Per espletare l'inferenza nel modello di regressione è necessaria una delle due ipotesi seguenti

- "n" è abbastanza grande da attivare il teorema limite centrale
- $e_i \sim N(0,\sigma^2), \; i = 1,2,\ldots,n$ gli errori sono normali (e quindi indipendenti oltreché incorrelati)

Queste condizioni permettono di stabilire quale sia la distribuzione degli stimatori in quanto funzioni di variabili casuali.

In particolare, si dimostra che $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ sono stimatori di massima verosimiglianza con annesse proprietà e difetti.

Normalità

L'ipotesi di normalità implica

$$y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i; \sigma^2); \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Ed anche

$$\hat{\beta}_0 \sim N\left[\beta_0, \frac{\sigma^2}{n}\left(1 + \frac{n\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)\right]; \qquad \hat{\beta}_1 \sim N\left[\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\right]$$

Inoltre,

$$\frac{(n-2)s_e^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$$

L'ipotesi di normalità (diretta delle y oppure ottenuta grazie ad "n" grande ed al conseguente limite centrale) è indispensabile per la validità delle procedure inferenziali relativamente ai parametri del modello di regressione.

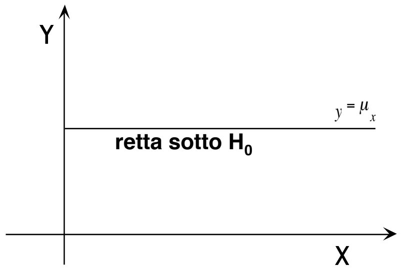
Test sul coefficiente angolare

ESISTE O NON ESISTE UNA RELAZIONE TRA ENDOGENA ED ESOGENA?

A questa domanda rispondiamo solo PARZIALMENTE: la "Y" varia o non varia LINEARMENTE con la "X"?

Questo si traduce nella verifica di ipotesi $\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 0 \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \end{cases}$

Se H_0 non potesse essere rifiutata la retta di regressione si presenterebbe come parallela all'asse delle X e non in grado di spiegare nulla della "Y"



Continua test su β_1

La statistica test necessaria per la verifica si ottiene come per i test sulla media. In particolare si coinvolge la media e la varianza dello stimatore

$$E\left(\hat{\beta}_1\right) = \beta_1, \quad Var\left(\hat{\beta}_1\right) = \frac{s_e^2}{S_{xx}}$$

$$t_{n-2}(\beta_1) = \frac{\hat{\beta}_1}{\dfrac{s_e}{\sqrt{S_{xx}}}} \quad dove \quad \begin{cases} s_e = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}} \\ S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2 \end{cases}$$

Il p-value del test si ottiene applicando la distribuzione t-Student con (n-2) gradi di libertà

Esempio

Si ritiene che il consumo di energia elettrica sia determinato da un modello lineare nella temperatura media del giorno(in gradi F)

Giorno	T.M.	C.E.
1	95	214
2	82	152
3	90	156
4	81	129
5	99	254
6	100	266
7	93	210
8	95	204
9	93	213
10	84	150

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	0.95084638
R Square	0.9041
Adjusted R Sc	0.8921
Standard Erro	15.1954
Observations	10

ANOVA

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Significance F*
Regression	1	17'416.3911	17'416.3911	75.4279	0.0000
Residual	8	1'847.2089	230.9011		
Total	9	19'263.6000			

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*
β0	-395.5861	68.1479	-5.8048	0.000403
Temp.Med.	6.4735	0.7454	8.6849	0.000024

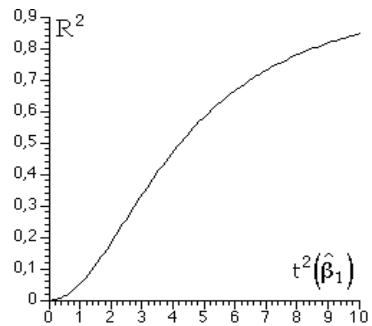
La relazione è molto significativa. Si può ancora accettare l'ipotesi di β_1=0, ma rischiando di sbagliare, nelle condizioni poste, 999'986 volte su di un milione.

Adattamento e test

Se l'ipotesi $H_0 : \beta_1=0$, è respinta significa che la "Y" è, almeno in parte, spiegata da una relazione lineare nella "X". Quanta parte?

Nel caso della regressione semplice è possibile stabilire un legame diretto tra la statistica test di β_1 ed il coefficiente di determinazione R^2.

$$R^2 = \frac{\left[t\left(\hat{\beta}_1\right)\right]^2}{\left[t\left(\hat{\beta}_1\right)\right]^2 + (n-2)}$$

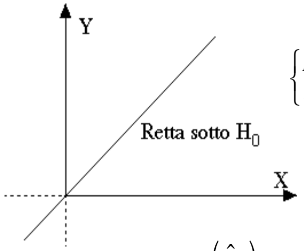


Esiste perciò una relazione biunivoca tra R^2 e la statistica test (al quadrato) per cui valori significativi di questa danno luogo a valori elevati di quello e viceversa.

Questo non è più vero nella regressione multipla

Test sull'intercetta

La verifica dell'intercetta è poco interessante dato che non ha incidenza sulla bontàdi adattamento.



$$\begin{cases} H_0 : \beta_0 = 0 \\ H_1 : \beta_0 \neq 0 \end{cases}$$

Se si accetta l'ipotesi si dice chela retta teorica ha equazione

$$y_i = \beta_1 x_i$$

cioè passa per l'origine

$$E\left(\hat{\beta}_0\right) = \beta_0, \quad Var\left(\hat{\beta}_0\right) = \frac{s_e^2}{n}\left(1 + \frac{n\mu_x^{\;2}}{S_{xx}}\right)$$

Il p-value del test si ottiene dalla t-Student (n-2) per il valore dato da

$$t_c\left(\hat{\beta}_0\right) = \frac{\hat{\beta}_0}{\frac{s_e}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(1 + \frac{n\mu_x^{\;2}}{S_{xx}}\right)}}$$

Esempio

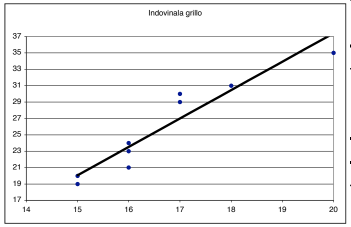
Si ritiene che la frequenza dei trilli del grillo sia legata alla temperatura e che questa si possa indovinare dall'intensità del canto.

Grillo	Frequenza	Temperatura
1	20	35
2	16	21
3	20	38
4	18	31
5	17	29
6	16	24
7	15	20
8	17	30
9	15	19
10	16	23

La relazione non è contraddetta dai (pochi) dati considerati.

L'intercetta comunque c'è. Chi dice il contrarioafferma il vero 6 volte su diecimila

Regression Statistics	
Multiple R	0.9640
R Square	0.9292
Adjusted R Sc	0.9204
Standard Erro	1.8529
Observations	10



ANOVA

	df	*SS*	*MS*	*F*	*p-value*
Regression	1	360.5333	360.5333	105.0097	0.0000
Residual	8	27.4667	3.4333		
Total	9	388			

	Coefficients	*andard Errc*	*t Stat*	*P-value*
Intercept	-31.9333	5.7808	-5.5240	0.0006
X Variable 1	3.4667	0.3383	10.2474	0.0000