ESERCIZI SU DISCRIMINAZIONE DI PREZZO

1. Si supponga che la Coca-Cola installi un distributore automatico in grado di cambiare il prezzo a seconda della temperatura esterna. Nei giorni "caldi" (temperatura $\geq 30°C$) la domanda di bevande per il distributore è:
$Q = 300 - 2P$, e in quelli "freschi" (temperatura $< 30°C$) la domanda è: $Q = 200 - 2P$.
Il costo marginale di una bevanda analcolica in lattina è 20 centesimi di euro.

a) Quale prezzo il distributore dovrebbe far pagare per una bevanda nei giorni "caldi"? E nei giorni "freschi"?

b) Se la Coca-Cola utilizza un distributore tradizionale programmato per far pagare lo stesso prezzo indipendentemente dalla temperatura atmosferica, quale prezzo dovrebbe fissare, assumendo che la metà dei giorni siano "caldi" e l'altra metà "freschi"?

c) Confrontare i profitti della Coca-Cola nei due casi.

a) La quantità, e quindi il prezzo, delle bevande in un giorno "fresco" viene determinata dalla condizione $R'_F = C'$.

$$\Rightarrow RT = P_F Q_F = \left(100 - \frac{1}{2} Q_F\right) \times Q_F$$

$$\frac{\partial RT}{\partial Q_F} = 100 - \frac{1}{2}Q_F - \frac{1}{2}Q_F = 100 - Q_F.$$

$$\Rightarrow \quad 100 - Q_F = 20 \Rightarrow Q_F^* = 80$$

$$\Rightarrow P_F = 100 - \frac{1}{2}(80) = 60$$

In modo simile, si ottiene che R'_C, i ricavi marginali in un giorno "caldo" sono:

$$R'_C = 150 - Q_C$$

$$\Rightarrow \quad 150 - Q_C = 20 \quad \Rightarrow Q_C = 130 \Rightarrow P_C = 85.$$

La Coca-Cola imporrà un prezzo pari a 60 centesimi a lattina in un giorno freddo e 85 cent. in un giorno "caldo".

b) Senza discriminazione di prezzo, la domanda complessiva attesa dalla Coca-Cola sarà:

$$Q_A = \frac{1}{2}(300-2P) + \frac{1}{2}(200-2P) = 250-2P.$$

e $\quad R'_A = 125 - Q_A.$

$$\Rightarrow \quad 125 - Q_A = 20 \Rightarrow Q_A = 105 \text{ e } P_A = 72{,}5.$$

c) I profitti con discriminazione di prezzo sono:

$$\frac{1}{2}\left[(85-20)130 + (60-20)(80)\right] = 5825$$

e senza discriminazione di prezzo:

$$(72{,}5-20)(105) = 5512{,}5.$$

Perciò i profitti sono maggiori con discriminazione di prezzo.

3. Calcolare il surplus totale nei due casi dell'esercizio precedente.

4. Un monopolista ha due tipi di clienti. La domanda inversa di una tipologia di cliente è $P = 200 - Q$, mentre per l'altra è $P = 100 - 2Q$. Il monopolista sostiene costi marginali costanti: $C' = 40$.

a) Se il monopolista è in grado di distinguere i due gruppi, quale sarà il prezzo praticato a ciascun gruppo?

b) Quale è il surplus del consumatore? E i profitti totali?

ESERCIZI SU EQUILIBRIO DI NASH

1. Si consideri un gioco con due giocatori, in cui lo spazio di scelta sia $S_1 = S_2 = R$, l'insieme dei numeri reali.

La funzione di utilità dei due giocatori sia:

$$U_1(x, y) = xy^2 - x^2 \text{ per il giocatore 1, e}$$

$$U_2(x, y) = 8y - xy^2 \text{ per il giocatore 2.}$$

Calcolare, se esiste, l'equilibrio di Nash del gioco.

L'equilibrio di Nash è (x, y) che massimizza l'utilità dei due giocatori. Pertanto, per trovare l'equilibrio di Nash occorre risolvere il sistema di equazioni:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = y^2 - 2x = 0 \qquad \frac{\partial U_2}{\partial y} = 8 - 2xy = 0$$

$$\begin{cases} y^2 - 2x = 0 \\ 8 - 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{8}{y} \\ 2x = \frac{8}{y} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Per concludere che $(2, 2)$ sia un equilibrio di Nash occorre verificare le condizioni di secondo ordine per un massimo:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = -2 < 0 \qquad \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = -2x < 0 \text{ in } x = 2.$$

Pertanto la combinazione $(2, 2)$ è un equilibrio di Nash.

2. Si consideri un gioco con due giocatori, con

$$u_1(x,y) = x^2 - 2xy \quad e \quad u_2(x,y) = xy - y^2$$

le rispettive funzioni di utilità. Le possibilità di scelta dei due giocatori sono: $S_1 = S_2 = \mathbb{R}$.

Si determini, se esiste, l'equilibrio di Nash di questo gioco.

Le condizioni del 1º ordine per un massimo sono:

$$\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \quad e \quad \frac{\partial u_2(x,y)}{\partial y} = x - 2y = 0$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \frac{x}{2} \end{cases} \text{ impossibile.}$$

D'altra parte,

$$\frac{\partial^2 u_1(x,y)}{\partial x^2} = 2 > 0,$$ che non rispetta le condizioni di secondo ordine per un massimo.

Pertanto si può concludere che, non esiste un equilibrio di Nash di questo gioco.

ESERCIZIO SU DUOPOLIO DI COURNOT.

Due imprese (1, 2) producono un bene omogeneo. L'impresa 1 produce q_1 e l'impresa 2 q_2. La produzione totale e': $q = q_1 + q_2$. Assumiamo che:

1. il prezzo di mercato sia $p(q) = 100 - 2\sqrt{q}$,
2. il costo di produzione dell'impresa 1: $C_1(q_1) = q_1 + 10$;
3. il costo di produzione dell'impresa 2: $C_2(q_2) = 2q_2 + 5$.

Assumendo che esista interazione strategica tra le imprese, in cui la loro funzione dei payoff sia la funzione dei profitti, determinare:

1. Le funzioni di profitto delle due imprese;
2. L'equilibrio di Nash, se esiste;
3. Il prezzo di mercato del bene;
4. I profitti delle due imprese.

1.
$$\pi_1(q_1, q_2) = p \cdot q_1 - C_1(q_1) = (100 - 2\sqrt{q_1 + q_2})q_1 - (q_1 + 10) =$$
$$= (99 - 2\sqrt{q_1 + q_2})q_1 - 10.$$

$$\pi_2(q_1, q_2) = (100 - 2\sqrt{q_1 + q_2})q_2 - (2q_2 + 5) =$$
$$= (98 - 2\sqrt{q_1 + q_2})q_2 - 5.$$

2. Le condizioni del 1° ordine per max il profitto sono:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = (99 - 2\sqrt{q_1 + q_2}) - 2\left(\frac{1}{2}\right)(q_1 + q_2)^{-\frac{1}{2}} q_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \left(98 - 2\sqrt{q_1+q_2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(q_1+q_2\right)^{-\frac{1}{2}} q_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3q_1 + 2q_2 = 99\sqrt{q_1+q_2} \\ 2q_1 + 3q_2 = 98\sqrt{q_1+q_2} \end{cases} \Rightarrow q_2 = \frac{96}{101} q_1$$

e sostituendo l'ultima equazione in una delle penultime, si ottiene:

$$q_1^* = 795.88 \quad e \quad q_2^* = 756.48.$$

Le condizioni del secondo ordine per un massimo sono:

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial q_1^2} = -2\left(\frac{1}{2}\right)\left(q_1+q_2\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(q_1+q_2\right)^{-\frac{3}{2}} q_1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(q_1+q_2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{q_1+q_2}} + \frac{1}{2\sqrt{(q_1+q_2)^3}} =$$

$$= \frac{-4(q_1+q_2) + q_1}{2\sqrt{(q_1+q_2)^3}}$$

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial q_2^2} = -2\left(\frac{1}{2}\right)\left(q_1+q_2\right)^{-1/2} + \frac{1}{2}\left(q_1+q_2\right)^{-\frac{3}{2}} q_2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(q_1+q_2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-4(q_1+q_2) + q_2}{2\sqrt{(q_1+q_2)^3}}$$

E' immediato constatare che, in corrispondenza di q_1^* e q_2^* le derivate seconde sono negative. Pertanto, q_1^* e q_2^* sono un equilibrio di Cournot-Nash.

3

3. Il prezzo di mercato del bene è:

$$p(q) = 100 - 2\sqrt{795.88 + 756.48} = 21.2$$

4. I profitti delle due imprese sono rispettivamente:

$$\pi_1 = 21.2 \times 795.88 - 805.88 = 16066,78$$

$$\pi_2 = 21.2 \times 756.48 - 2(756.48) - 5 = 14519.42.$$

GIOCHI STATICI E DINAMICI

Si assuma che il seguente gioco sia giocato: a) una sola volta; b) due volte; c) un numero infinito (o indeterminato) di volte.

		Giocatore 2 L	Giocatore 2 R
Giocatore 1	L	1, 1	5, 0
	R	0, 5	4, 4

Calcolare l'equilibrio del gioco nei tre casi.

a) Se il gioco è giocato una sola volta esiste un solo equilibrio di Nash: (L, L).

b) Se il gioco è giocato due volte e i payoffs del secondo periodo sono la somma dei payoffs nei due periodi; la matrice dei payoffs nel secondo periodo sarà:

		Giocatore 2 L	Giocatore 2 R
Giocatore 1	L	2, 2	6, 1
	R	1, 6	5, 5

e la soluzione del gioco nel secondo periodo è anche (L, L).

c) Se il gioco è giocato un numero infinito (o indeterminato) di volte, ed è possibile osservare i risultati dei periodi precedenti, il valore attuale della sequenza infinita di payoffs e':

$$\pi_1 + \delta\pi_2 + \delta^2\pi_3 + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1}\pi_t$$

dove δ è il fattore di sconto.

Se ogni giocatore gioca L in ogni periodo, ottiene

$$1 + \delta + \delta^2 + \cdots = \frac{1}{1-\delta}$$

E se coopera ogni periodo ottiene

$$V = \frac{4}{1-\delta}$$

Una strategia alternativa potrebbe essere: deviare dalla cooperazione nel primo periodo, ottenendo 5 invece di 4, ma subire la punizione dell'altro giocatore nei periodi successivi, giocando L invece di R. Il payoff di questa strategia è:

$$5 + \frac{\delta}{1-\delta}$$

La cooperazione in ogni periodo è sostenibile se:

$$\frac{4}{1-\delta} > 5 + \frac{\delta}{1-\delta}$$

e cio' avviene se il fattore di sconto e' sufficientemente alto ($\delta \geq \frac{1}{4}$).

ESERCIZIO SU INTEGRAZIONE VERTICALE

Si supponga che un produttore di automobili venda in 100 città diverse, attraverso rivenditori indipendenti, ciascuno in esclusiva. La curva inversa di domanda di automobili in ciascuna città sia: $P = 20.000 - 0{,}4Q$.

Supponendo che il costo marginale del produttore di automobili sia 4000 € e quello di distribuzione 1000 €:

1. Determinare le condizioni che massimizzano il profitto del distributore e del produttore di automobili in caso di decisioni indipendenti;
2. Illustrare in che modo potrebbe essere aumentato il profitto del produttore e dei rivenditori di auto.

1. Prima consideriamo le condizioni di massimo profitto del distributore.

La curva di domanda finale di automobili in ciascuna città è:

$$Q = 50.000 - 2{,}5P$$

e quella del ricavo marginale del rivenditore:

$$MR = 20.000 - 0{,}4Q - 0{,}4Q = 20.000 - 0{,}8Q.$$

Essendo il costo marginale di distribuzione 1000 € il costo marginale complessivo è quello di distribuzione più il prezzo che deve pagare al produttore per un'auto, P_W.

Ponendo le condizioni di max π, si ha:

$$20.000 - 0{,}8Q = 1000 + P_w.$$

Risolvendo per Q l'ultima equazione, si ottiene la domanda di automobili che ciascun rivenditore rivolge al produttore:

$$P_w = 19.000 - 0{,}8Q$$

Il ricavo totale del produttore e':

$$RT_p = (19.000 - 0{,}8Q)Q$$ e quello marginale

$$\frac{\partial RT_p}{\partial Q} = 19.000 - 1{,}6Q.$$

Essendo il costo marginale del produttore 4000 € si ha:

$$19.000 - 1{,}6Q = 4000 \Rightarrow Q = 9.375.$$

e il prezzo che il rivenditore paga al produttore

$$P_w = 11.500\text{ €}.$$

Il prezzo a cui i consumatori finali sono disposti ad acquistare 9375 auto e':

$$P = 20.000 - 0{,}4Q = 20000 - 0{,}4 \cdot 9375 = 16.250$$

Il profitto totale del produttore e dei distributori di automobili in caso di decisioni indipendenti e':

$$(16.250 - 5000) * 9375 = 105.468.750\text{ €}$$ all'anno per citta'.

2. Integrandosi verticalmente, il profitto complessivo del produttore e distributore è ottenuto uguagliando il ricavo marginale dei rivenditori al costo marginale complessivo (produzione + distribuzione)

$$20000 - 0{,}8\,Q = 5000 \Rightarrow Q = 18750$$

e $P = 20.000 - 0{,}4 \cdot 18750 = 12.500$

In questo caso il profitto complessivo di produttore e rivenditore per città è:

$$(12.500 - 5000) \times 18750 = 140.625.000$$

Questo profitto può essere ottenuto, oltre che con l'integrazione verticale, mediante l'imposizione di un prezzo finale massimo di vendita pari a 12.500 €, oppure mediante un prezzo di trasferimento dal produttore al distributore uguale al costo marginale, ripartendo il profitto complessivo tra produttore e distributore mediante una tassa di franchising.

ESERCIZIO SU DIFFERENZIAZIONE DEL PRODOTTO

Si supponga che in una città ci siano due alberghi: uno a 5 stelle e uno a 3 stelle.
100 mila potenziali clienti sono distribuiti in modo uniforme tra un reddito massimo di 20 mila euro e un reddito minimo di 10 mila euro all'anno.
Si assuma che la misura oggettiva della qualità sia 5 per l'albergo a 5 stelle e 3 per quello a 3 stelle. Inoltre, si assuma che l'importanza che ciascun cliente attribuisce alla qualità sia commisurata al proprio reddito, variando tra 10 e 20.
Infine, si assuma che il costo marginale per cliente sia 30 € e il prezzo dell'albergo a 3 stelle $p3^* = 30$ €.

1. Determinare il prezzo che massimizza il profitto dell'albergo a 5 stelle e la distribuzione dei clienti fra i due alberghi.

Il reddito che rende indifferente i clienti tra i due alberghi è dato da:

$$R_i 5 - P5^* = R_i 3 - P3^* \Rightarrow R_i^* = \frac{P5^* - 30}{5-3}$$

Se $R_i > R_i^*$ conviene andare nell'albergo a 5* e
se $R_i < R_i^*$ " " 3*.

La curva di domanda per l'albergo a 5* è:

$$Q5^* = 100.000\left[20 - \frac{(P5^* - 30)}{2}\right] / 10 = 100.000\left[2 - \frac{P5^* - 30}{20}\right]$$

e $\pi 5^* = (P5^* - 30)\, Q5^*$

Il profitto dell'albergo a 5* è massimo quando:

$$\frac{\partial \pi 5^*}{\partial P5^*} = 0 \Rightarrow 100.000\left[\left(2 - \frac{P5^* - 30}{20}\right) - \frac{P5^* - 30}{20}\right] = 0$$

$$\Rightarrow 40 - 2(P5^* - 30) = 0 \Rightarrow P5^* = 50 €$$

Sostituendo in

$$R_i^* = \frac{50 - 30}{2} = 10$$ e il reddito che rende

indifferente i clienti tra i due alberghi è 10 mila euro.

La quota di mercato dell'albergo a 5* è data da:

$$\frac{R^{max} - R^*}{R^{max} - R^{min}} = \frac{20.000 - 10.000}{20.000 - 10.000} = 1$$

cioè tutti i potenziali clienti scelgono l'albergo a 5*, anche se $P3^* = 30 €$.

ESERCIZI NON SVOLTI

1. Scrivere la funzione di profitto del leader e del follower nel modello di Stackelberg.
2. Scrivere le funzioni di profitto di due imprese che competono a la Cournot, e derivare le funzioni di reazione delle due imprese.
3. Spiegare le caratteristiche dell'equilibrio di Bertrand nel caso di prodotti omogenei e in quello di prodotti differenziati.
4. Descrivere le caratteristiche e la soluzione del gioco della corsa agli sportelli (bank run).
5. Costruire un esempio di gioco in cui non esiste l'equilibrio di Nash.
6. Definire cos'è un sottogioco e come si determina l'equilibrio nei sottogiochi.
7. Spiegare gli effetti della pubblicità sul potere di mercato di una impresa

1. Si consideri il seguente gioco: un papa' dice a suo figlio: "Se quando torno a casa la tua camera non e' in ordine, ti taglio una mano; se invece la tua camera e' in ordine andiamo a mangiare un gelato".

   (a) Si assegnino valori numerici dei payoff in modo tale che il padre preferisca avere la camera in disordine, piuttosto che un figlio senza mano, e che il figlio preferisca mettere in ordine la sua camera piuttosto che restare senza una mano.

   (b) Si elenchino le strategie disponibili ai due giocatori. Si presti particolare attenzione alla struttura temporale dell'interazione.

   (c) Si presenti la forma normale del gioco.

   (d) Si presenti la forma estensiva del gioco.

   (e) Quali sono gli equilibri di Nash? Quali di questi sono anche SPE (Equilibri Perfetti nei Sottogiochi)?