Prova scritta del 15/02/2011 **Turno 2 compito A**

Riservato alla Commissione

Primo esercizio	Secondo esercizio	Terzo esercizio	Quarto esercizio	Punteggio complessivo - Annotazioni

UNIVERSITA' DELLA CALABRIA

Facoltà di Economia

METODI MATEMATICI PER L'ECONOMIA

Corso di laurea in Economia Aziendale, A.A. 2010/2011

(*Massabò - Lamantia*)

Cognome |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| ***Nome*** |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Matricola |_|_|_|_|_|_|_|_| >>> LEGGERE CON ATTENZIONE LE AVVERTENZE E FIRMARE <<<

Avvertenze: La durata della prova e' di 120 minuti. Non è consentito uscire dall'aula prima di 90 minuti dall'inizio della prova. Lo studente è tenuto a riportare sul presente foglio il procedimento essenziale seguito nella risoluzione di ciascun esercizio ed i relativi risultati. **Al termine della prova la Commissione non ritirerà null'altro all'infuori del presente foglio. I fogli non compilati e firmati non verranno valutati.** *Non è consentito consultare testi ed appunti*. Non è consentito l'uso di eserciziari e calcolatrici grafiche. Non è consentito uscire né muoversi dal proprio posto prima della fine della prova. **In assenza del procedimento l'esercizio non verrà valutato.** Il punteggio ottenuto in ogni esercizio dipenderà dalla chiarezza e dalla completezza delle spiegazioni fornite. Tenere esposto il libretto di iscrizione ed un valido documento di riconoscimento per il controllo dell'identità. **A chiunque venisse trovato in contravvenzione rispetto a queste regole, verrà ritirata e annullata la prova.**

Firma____

1. Studiare la funzione:

$$f(x)=e^{-|x|}(2x-1) = \begin{cases} e^{-x}(2x-1) & x \geq 0 \\ e^{x}(2x-1) & x<0 \end{cases}$$

e tracciarne il grafico.

Insieme di definizione, intersezioni con l'asse delle ascisse e segno della funzione.

Insieme di definizione $\mathbb{R}$

Intersezione con l'asse delle ascisse $\Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Segno della funzione $e^{-|x|}>0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$(2x-1)>0 \quad x>\frac{1}{2}$

$f(x)>0, \ x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right); \quad f(x)<0, \ x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

Limiti agli estremi degli intervalli di definizione ed eventuali asintoti

GLI ESTREMI DELL' INTERVALLO DI DEFINIZIONE SONO $-\infty$ E $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}(2x-1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{e^x} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ DE L'HOPITAL}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\underbrace{e^x}_{\to+\infty}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x}(2x-1) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\underbrace{-e^{-x}}_{\to-\infty}} = 0$$

LA RETTA $y=0$ É UN ASINTOTO ORIZZONTALE

Derivata prima, monotonia ed eventuali punti di non derivabilità (punti angolosi)

$$f'(x)=\begin{cases} -e^{-x}(2x-1)+2e^{-x}, & x>0 \\ e^{x}(2x-1)+2e^{x}, & x<0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x}(3-2x), & x>0 \\ e^{x}(1+2x), & x<0 \end{cases}$$

Se $\underline{x>0}$ $\begin{cases} f'(x)>0 \text{ se } 3-2x>0 \iff x<\frac{3}{2} \\ f'(x)<0 \text{ se } 3-2x<0 \iff x>\frac{3}{2} \end{cases}$

Se $\underline{x<0}$ $\begin{cases} f'(x)>0 \text{ se } 1+2x>0 \iff x>-\frac{1}{2} \\ f'(x)<0 \text{ se } 1+2x<0 \iff x<-\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{-x}(3-2x)=3 \neq \\ \neq \lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{x}(1+2x)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=0 \text{ punto angoloso}$$

	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{3}{2}$		
$-$		$+$		$+$		$-$	segno f'
↘		↗		↗		↘	Monotonia

$x=-\frac{1}{2}$ punto di min rel.

$x=\frac{3}{2}$ " " max "

Derivata seconda, convessità e punti di flesso

$$f''(x)=\begin{cases} e^{-x}(-5+2x), & x>0 \\ e^{x}(3+2x), & x<0 \end{cases}$$

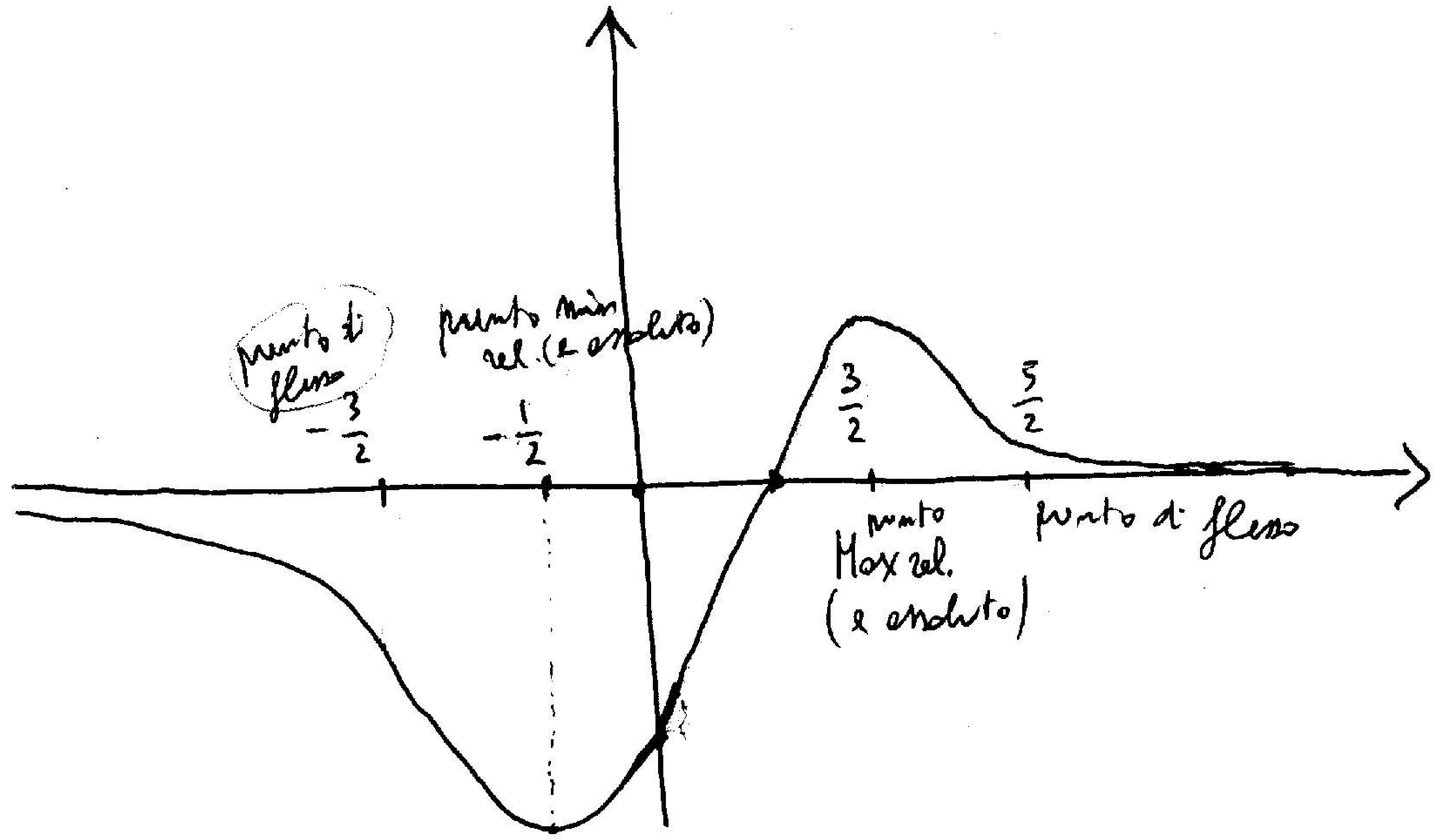
Se $\underline{x>0}$ $\begin{cases} f''(x)>0 \iff -5+2x>0, \ x>\frac{5}{2} \\ f''(x)<0 \iff -5+2x<0, \ x<\frac{5}{2} \end{cases}$

Se $x<0$ $\begin{cases} f''(x)>0 \iff 3+2x>0, \ x>-\frac{3}{2} \\ f''(x)<0 \iff 3+2x<0 \quad x<-\frac{3}{2} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x=-\frac{3}{2} \\ x=0 \\ x=\frac{5}{2} \end{array}\right\} \text{punti di flesso}$$

	$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{5}{2}$		
$-$		$+$		$-$		$+$	Segno f''
$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	Concavità f

Grafico



2. Discutere, al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - ay = 2a \\ -ax + ay = -3a \\ x - 3ay = a \end{cases}$$

Si tratta di un sistema 3×2 (3 eq. in 2 incognite

La matrice incompleta è $A = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & a \\ 1 & -3a \end{bmatrix}$

" " completa è $A|b = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 2a \\ -a & a & -3a \\ 1 & -3a & a \end{array}\right]$

Calcoliamo il determinante di $A|b$

$|A|b| = a^2(-7 + 5a) \neq 0 \iff a \neq 0, \; a \neq \frac{7}{5}$

- per $a \neq 0$ oppure $a \neq \frac{7}{5}$ rango $(A|b) = 3 >$ rango(A)
  $\Rightarrow$ Sistema IMPOSSIBILE
- per $a = 0$ rango(A) = rango$(A|b) = 1$, Sistema indeterminato ∞^1 soluzioni
- per $a = \frac{7}{5}$ rango(A) = rango$(A|b) = 2$, Sistema determinato
  Il rango è 2 perché il minore $\begin{bmatrix} 1 & -7/5 \\ -7/5 & 7/5 \end{bmatrix}$ ha det. $\neq 0$

. Calcolare il valore del seguente integrale definito, e determinare la primitiva che passa per il punto di coordinate $(e,1)$:

$$\int \frac{dx}{x\left(\log^2(x)+2\log(x)+1\right)}$$

Risolvo per sostituzione ponendo $\left[\begin{array}{l} \log x = t \\ \frac{1}{x}\,dx = dt \end{array}\right.$

$$\int \frac{dx}{x\,(\log^2 x + 2\log x + 1)} = \int \frac{dt}{t^2+2t+1} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2} = \int z^{-2}\,dz = -z^{-1} + c$$

$t+1 = z$
$dt = dz$

$$= -(t+1)^{-1} + c = -(\log x + 1)^{-1} + c$$

pongo $F(x) = -\dfrac{1}{\log x + 1} + c$ deve essere

$F(e) = 1$ cioè $F(e) = -\dfrac{1}{2} + c = 1$

deve essere $c = \dfrac{3}{2}$, $\boxed{F(x) = -\dfrac{1}{\log x + 1} + \dfrac{3}{2}}$