Riservato alla Commissione

Prova scritta del 15/02/2011 **Turno 1 compito A**

Primo esercizio	Secondo esercizio	Terzo esercizio	Quarto esercizio	Punteggio complessivo - Annotazioni

UNIVERSITA' DELLA CALABRIA

Facoltà di Economia

METODI MATEMATICI PER L'ECONOMIA

Corso di laurea in Economia Aziendale, A.A. 2010/2011

(*Massabò - Lamantia*)

Cognome |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| ***Nome*** |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Matricola |_|_|_|_|_|_|_| >>> LEGGERE CON ATTENZIONE LE AVVERTENZE E FIRMARE <<<

Avvertenze: La durata della prova e' di 120 minuti. Non è consentito uscire dall'aula prima di 90 minuti dall'inizio della prova. Lo studente è tenuto a riportare sul presente foglio il procedimento essenziale seguito nella risoluzione di ciascun esercizio ed i relativi risultati. **Al termine della prova la Commissione non ritirerà null'altro all'infuori del presente foglio. I fogli non compilati e firmati non verranno valutati.** *Non è consentito consultare testi ed appunti.* Non è consentito l'uso di eserciziari e calcolatrici grafiche. Non è consentito uscire né muoversi dal proprio posto prima della fine della prova. **In assenza del procedimento l'esercizio non verrà valutato.** Il punteggio ottenuto in ogni esercizio dipenderà dalla chiarezza e dalla completezza delle spiegazioni fornite. Tenere esposto il libretto di iscrizione ed un valido documento di riconoscimento per il controllo dell'identità. **A chiunque venisse trovato in contravvenzione rispetto a queste regole, verrà ritirata e annullata la prova.**

Firma ____

1. Studiare la funzione:

$$f(x)=e^{-x}|x-1| = \begin{cases} e^{-x}(x-1) & x \geq 1 \\ e^{-x}(1-x) & x<1 \end{cases}$$

e tracciarne il grafico.

Insieme di definizione, intersezioni con l'asse delle ascisse e segno della funzione.

Insieme di definizione $\mathbb{R}$

Intersezioni con l'asse delle ascisse $\Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Segno della funzione $e^{-x}>0, \forall x\in\mathbb{R}$

$|x-1|>0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\Rightarrow f(x)>0 \quad \forall x \neq 1$

Limiti agli estremi degli intervalli di definizione ed eventuali asintoti

GLI ESTREMI DELL'INTERVALLO DI DEFINIZIONE SONO $-\infty$ E $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \underset{x>1}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{-x}(x-1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{e^x} \underset{\frac{\infty}{\infty}\text{ USO DE L'HOPITAL}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \underset{x<1}{=} \lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{(1-x)}_{\to+\infty} = +\infty$$

(NON È UNA FORMA INDETERMI[NATA]

Derivata prima, monotonia ed eventuali punti di non derivabilità

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}(x-1)+e^{-x}, & x>1 \\ -e^{-x}(1-x)-e^{-x}, & x<1 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x}(2-x) & x>1 \\ e^{-x}(x-2) & x<1 \end{cases}$$

dato che $e^{-x}>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ il segno di $f'(x)$ è dato da

- $\underline{x>1}$ $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2-x>0 \Leftrightarrow x<2$, quindi se $x\in(1,2)$ è $f'(x)>0$; se $x\in(2,+\infty)$ è $f'(x)<0$
- $\underline{x<1}$ $f'(x)>0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$; essendo $x<1$ risulta essere $f'(x)<0$

	1	2	
Segno $f'(x)$	$-$	$+$	$-$
Monotonia $f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-} e^{-x}(x-2) = -\frac{1}{e} \neq \lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} e^{-x}(2-x) = \frac{1}{e} \Rightarrow f \text{ non è derivabile in } x=1$$

$x=1$ punto angoloso e punto di minimo (assoluto) per $f(x)$

$x=2$ punto di max relativo per $f($

Derivata seconda, convessità e punti di flesso

$$f''(x) = \begin{cases} -e^{-x}(2-x)-e^{-x}, & x>1 \\ -e^{-x}(x-2)+e^{-x}, & x<1 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x}(-3+x), & x> \\ e^{-x}(3-x), & x<1 \end{cases}$$

$\underline{x>1}$ $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>3$, f convessa per $x>3$

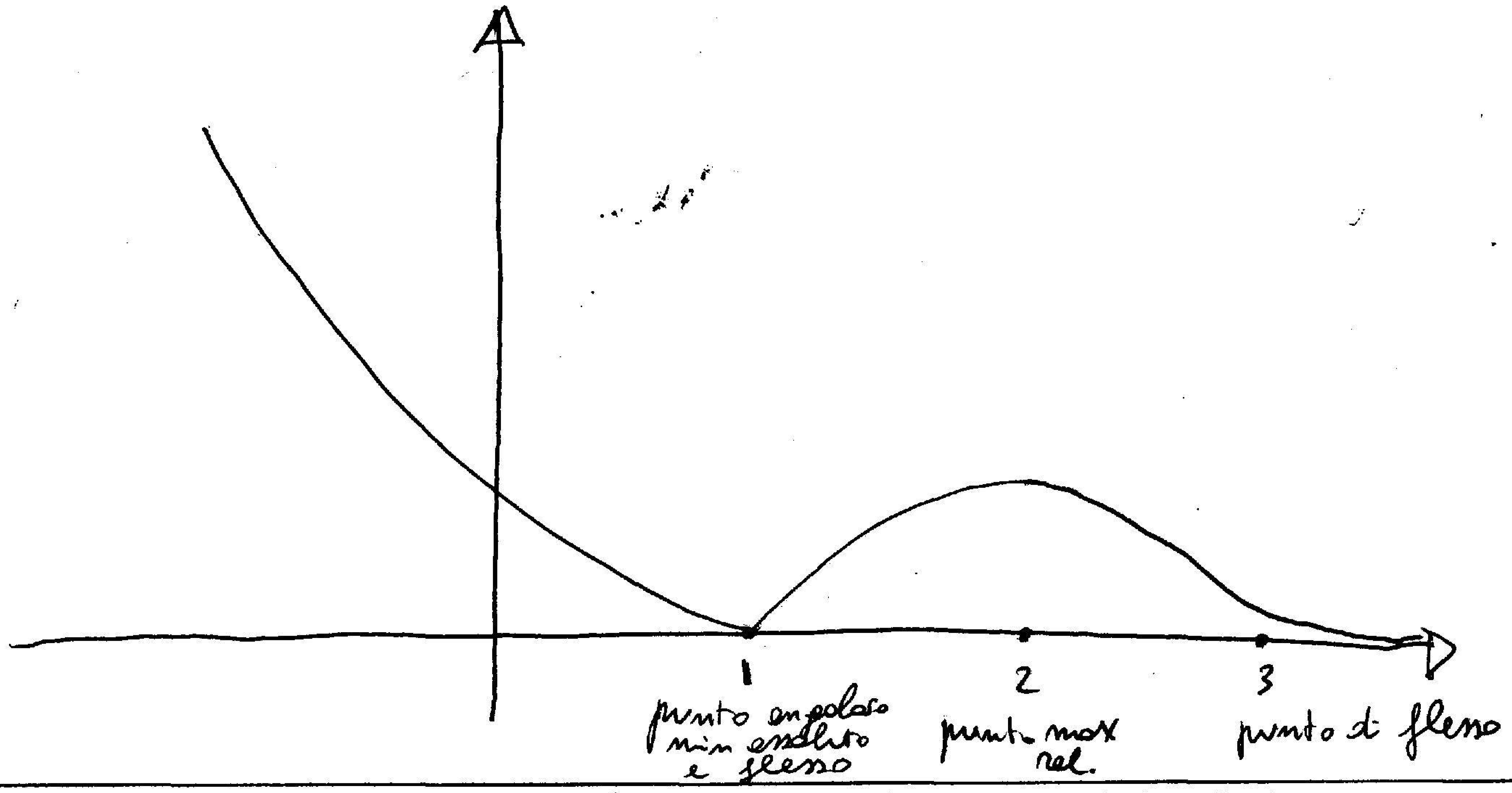
$f''(x)<0 \Leftrightarrow x<3$, f concava $1<x<3$

$x=3$ $\underline{\text{punto di flesso}}$

$x<1$ $f''(x)>0 \Leftrightarrow x<3$, f convessa ~~per~~ $x<1$

N.B. $x=1$ è un punto di $\underline{\text{flesso}}$ dato che f è convessa $x<1$, concava $x>1$

Grafico



2. Determinare per quali valori del parametro $b \in \mathbf{R}$ la seguente serie converge e calcolarne il valore

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 7\left(\frac{4b}{-5b^2+1}\right)^n \qquad q = \frac{4b}{-5b^2+1}\ ;\ -1 < q < 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{4b}{-5b^2+1} - 1 < 0 \\ \dfrac{4b}{-5b^2+1} + 1 > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{5b^2+4b-1}{-5b^2+1} < 0 \quad \text{I} \\ \dfrac{-5b^2+4b+1}{-5b^2+1} > 0 \quad \text{II} \end{cases}$$

In entrambe le disequazioni il denominatore $-5b^2+1$

$-5b^2+1 > 0$, $b \in \left(-\frac{1}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right)$

I $\quad 5b^2+4b-1 > 0$ risolvo $5b^2+4b-1 = 0 \to \dfrac{-4 \pm 6}{10} = -1,\ \dfrac{1}{5}$

$\to \quad b < -1 \ \cup \ b > \frac{1}{5}$

-1	$-\frac{1}{\sqrt5}$	$\frac15$	$\frac{1}{\sqrt5}$		
+	−	−	+	+	NUM
−	−	+	+	−	DEN
−	+	−	+	−	

$$S_{\text{I}} = (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt5}, \frac15\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt5}, +\infty\right)$$

II $\quad -5b^2+4b+1 > 0$ risolvo $-5b^2+4b+1 = 0 \quad \dfrac{4 \pm 6}{10} = -\frac15,\ 1$

$\to -\frac15 < b < 1$

$-\frac{1}{\sqrt5}$	$-\frac15$	$\frac{1}{\sqrt5}$	1		
−	−	+	+	−	NUM
−	+	+	−	−	DEN
+	−	+	−	+	

$$S_{\text{II}} = \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt5}\right) \cup \left(-\frac15, \frac{1}{\sqrt5}\right) \cup (1, +\infty)$$

$$S = S_{\text{I}} \cap S_{\text{II}} = (-\infty, -1) \cup \left(-\frac15, \frac15\right) \cup (1, +\infty)$$

Il valore della serie si ottiene dalla formula $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q}$ togliendo però il primo termine dato che n parte da 1

3. Calcolare il valore del seguente integrale definito:

$$\int_5^6 \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{x}=t\ ;\ x=t^2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dt\end{array}}$$

$$\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}} = 2\int \frac{dt}{t^2-4} = 2\int \frac{dt}{(t+2)(t-2)} =$$

$$\frac{1}{(t+2)(t-2)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-2}$$

$$A(t-2) + B(t+2) = 1 \rightarrow t(A+B) + 2(B-A)$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2B-2A=1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} A=-B \\ -2A-2A=1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} A=-\frac{1}{4} \\ B=\frac{1}{4} \end{array}$$

$$= 2\left[-\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t-2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\log|t+2| + \frac{1}{2}\log|t-2| + c =$$

$$= -\frac{1}{2}\log|\sqrt{x}+2| + \frac{1}{2}\log|\sqrt{x}-2| + c$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}\log(\sqrt{x}+2) + \frac{1}{2}\log(\sqrt{x}-2)$$

$$\int_5^6 \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}} = F(6) - F(5) = 0,28742$$