Prova scritta del 01/03/2011 Turno 2 compito A

Riservato alla Commissione

Primo esercizio	Secondo esercizio	Terzo esercizio	Quarto esercizio	Punteggio complessivo - Annotazioni

UNIVERSITA' DELLA CALABRIA

Facoltà di Economia

METODI MATEMATICI PER L'ECONOMIA

Corso di laurea in Economia Aziendale, A.A. 2010/2011

(*Massabò - Lamantia*)

Cognome |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| ***Nome*** |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Matricola |_|_|_|_|_|_|_| >>> LEGGERE CON ATTENZIONE LE AVVERTENZE E FIRMARE <<<

Avvertenze: La durata della prova e' di 120 minuti. Non è consentito uscire dall'aula prima di 90 minuti dall'inizio della prova. Lo studente è tenuto a riportare sul presente foglio il procedimento essenziale seguito nella risoluzione di ciascun esercizio ed i relativi risultati. **Al termine della prova la Commissione non ritirerà null'altro all'infuori del presente foglio. I fogli non compilati e firmati non verranno valutati.** *Non è consentito consultare testi ed appunti.* Non è consentito l'uso di eserciziari e calcolatrici grafiche. Non è consentito uscire né muoversi dal proprio posto prima della fine della prova. **In assenza del procedimento l'esercizio non verrà valutato.** Il punteggio ottenuto in ogni esercizio dipenderà dalla chiarezza e dalla completezza delle spiegazioni fornite. Tenere esposto il libretto di iscrizione ed un valido documento di riconoscimento per il controllo dell'identità. **A chiunque venisse trovato in contravvenzione rispetto a queste regole, verrà ritirata e annullata la prova.**

Firma ____________________________________

1. Studiare la funzione:

$$f(x)=\log\left(\frac{(x-1)^2}{x^2}\right)$$

e tracciarne il grafico.

Insieme di definizione

BISOGNA PORRE L'ARGOMENTO DEL LOG > 0

$(x-1)^2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$x^2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow$ INSIEME DI DEFINIZIONE $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

Limiti agli estremi degli intervalli di definizione ed eventuali asintoti orizzontali e verticali

$$\lim_{x\to\pm\infty}\log\left[\frac{(x-1)^2}{x^2}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\log\left[\frac{x^2-2x+1}{x^2}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\log\left[\frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}}\right]$$

$$=\log 1=0$$

$y=0$ RETTA DI ASINTOTO ORIZZONTALE

$$\lim_{x\to 0^\pm}\log\frac{\overbrace{(x-1)^2}^{\to 1}}{\underbrace{x^2}_{\to 0^+}}=+\infty$$, dato che l'argomento del log diverge a $+\infty$

$$\lim_{x\to 1^\pm}\log\frac{\overbrace{(x-1)^2}^{\to 0^+}}{\underbrace{x^2}_{\to 1}}=-\infty$$, dato che l'argomento del log converge a 0^+

$x=0$ e $x=1$ ASINTOTI VERTICALI

$$f(x) = \log h(x)\ , \quad f'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$$

Derivata prima

$$f'(x) = \frac{\cancel{x}}{(x-1)^2} \cdot \frac{2(x-1)\cdot x^2 - 2x(x-1)^2}{x^{\cancel{4}\,2}} = \frac{\cancel{(x-1)}\left[\cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} + 2x\right]}{(x-1)^{\cancel{2}} \cdot x^2}$$

$$= \frac{2}{x(x-1)}$$

Segno della derivata prima, monotonia della funzione ed eventuali punti di max/min relativi e/o assoluti

Il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $x(x-1)$

	0	1	
$- - -$	$+ +$	$+ +$	$x > 0$
$- - -$	$- -$	$+ +$	$(x-1) > 0$
$+$ ↗	$-$ ↘	$+$ ↗	

f crescente in $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty$

f decrescente in $(0,1)$

$x=0$ e $x=1$ <u>NON</u> SONO PUNTI DI MAX E MIN RELATI DATO CHE f NON É DEFINI IN QUESTI PUNTI

Derivata seconda

$$f''(x) = \frac{-2(2x-1)}{[x(x-1)]^2} = \frac{-4x+2}{[x(x-1)]^2}$$

Segno della derivata seconda, convessità della funzione ed eventuali punti di flesso

Il denominatore di $f''(x)$ è sempre >0 $\forall x \in$ Insieme di definizione.

$$f''(x) > 0 \iff -4x+2 > 0 \iff x < \frac{1}{2} \quad (x \neq 0)$$

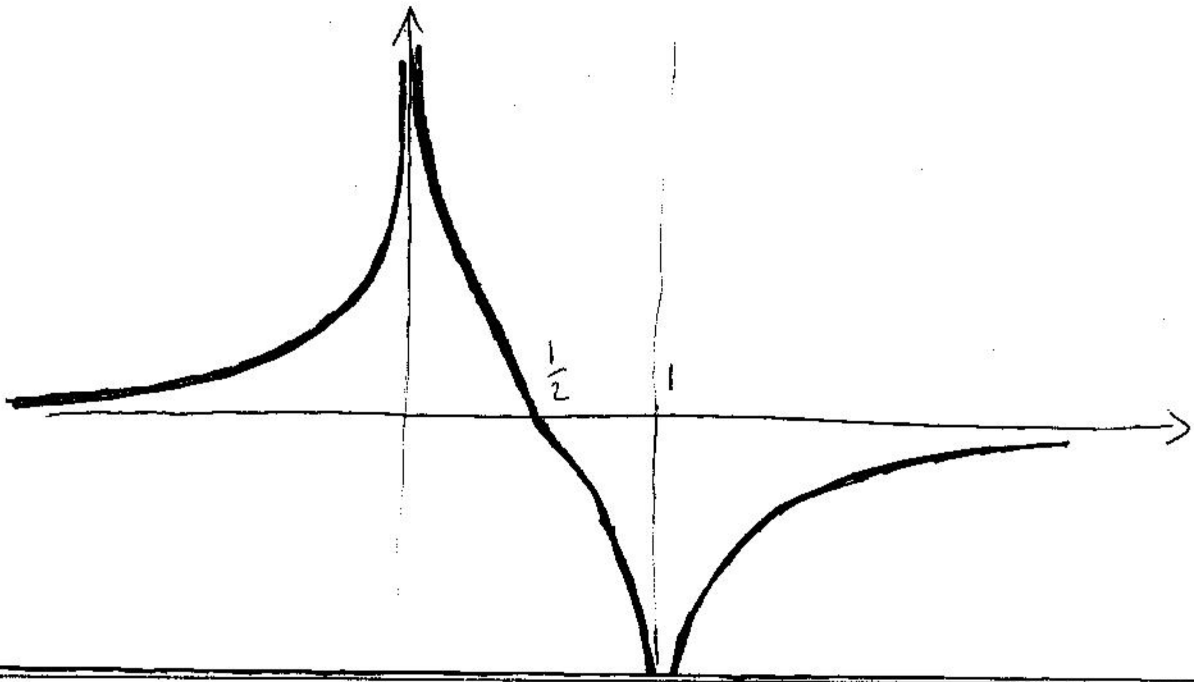
$$f''(x) < 0 \iff -4x+2 < 0 \iff x > \frac{1}{2} \quad (x \neq 1)$$

f convessa in $(-\infty, 0)$ e in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

f concava in $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e in $(1, +\infty)$

$x = \frac{1}{2}$ punto di flesso

Grafico



2. Discutere, al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2ax + 2y - z = 0 \\ -ax + 2ay - 2z = a + 4 \\ -4x - 2ay + 2z = 0 \end{cases}$$

MATRICE INCOMPLETA $A = \begin{bmatrix} 2a & 2 & -1 \\ -a & 2a & -2 \\ -4 & -2a & 2 \end{bmatrix}$, $|A| = -2a^2 - 4a +$

$|A| = 0 \iff a = \begin{cases} -4 \\ 2 \end{cases}$, Se $a \neq -4$ oppure $a \neq 2$ $\quad 2(A) = 3 = r(A|b)$

$\Rightarrow \begin{matrix} a \neq -4 \\ a \neq 2 \end{matrix}$ Sistema possibile e determinato (T. di Cramer)

$\boxed{a = -4}$ LA MATRICE COMPLETA É IN QUESTO CASO

$A|b = \left[A \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} -8 & 2 & -1 \\ 4 & -8 & -2 \\ -4 & 8 & 2 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right]$; $r(A|b) = 2 = r($ dato che estraggo $\begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow$ Se $a = -4$ ho ∞^1 soluzioni

$\boxed{a = 2}$ $A|b = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 6 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, ESTRAGGO $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 6 \\ -4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 48$

$r(A|b) = 3 > 2(A) = 2$ SISTEMA IMPOSSIBILE

3. Calcolare il valore del seguente integrale indefinito, e determinare la primitiva che passa per il punto di coordinate $(1/3, e)$:

$$\int x^2 \left[\log(3x) - e^{2x}\right] dx$$

$$\int x^2 \left[\log 3x - e^{2x}\right] dx = \int x^2 \log 3x \, dx - \int x^2 e^{2x} dx$$

A B

A $\int x^2 \log 3x \, dx = \frac{x^3}{3} \log 3x - \int \frac{\cancel{x^3}^{\,x^2}}{3} \frac{1}{\cancel{x}} dx$

per parti

$$= \frac{x^3}{3} \log 3x - \frac{x^3}{9} + c$$

$$\boxed{\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + c \quad \text{è immediato}}$$

B $\int x^2 e^{2x} dx = x^2 \frac{e^{2x}}{2} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \int e^{2x} \cdot x \, dx =$

per parti

ancora per parti

$$= x^2 \frac{e^{2x}}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx\right] =$$

$$= x^2 \frac{e^{2x}}{2} - x \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + c.$$ Pongo

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \log 3x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} e^{2x} + \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4} + c$$

deve essere $F\left(\frac{1}{3}\right) = e$

$$-5 \frac{e^{2/3}}{36} - \frac{1}{243} + c = e \Rightarrow c = e + \frac{5}{36} e^{2/3} + \frac{1}{243}$$

$$c \simeq 2{,}9929$$