Prova scritta del 01/03/2011 **Turno 1 compito A**

Riservato alla Commissione

Primo esercizio	Secondo esercizio	Terzo esercizio	Quarto esercizio	Punteggio complessivo - Annotazioni

UNIVERSITA' DELLA CALABRIA

Facoltà di Economia

METODI MATEMATICI PER L'ECONOMIA

Corso di laurea in Economia Aziendale, A.A. 2010/2011

(*Massabò - Lamantia*)

Cognome |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__| ***Nome*** |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

Matricola |__|__|__|__|__|__|__|__| >>> LEGGERE CON ATTENZIONE LE AVVERTENZE E FIRMARE <<<

Avvertenze: La durata della prova e' di 120 minuti. Non è consentito uscire dall'aula prima di 90 minuti dall'inizio della prova. Lo studente è tenuto a riportare sul presente foglio il procedimento essenziale seguito nella risoluzione di ciascun esercizio ed i relativi risultati. **Al termine della prova la Commissione non ritirerà null'altro all'infuori del presente foglio. I fogli non compilati e firmati non verranno valutati.** *Non è consentito consultare testi ed appunti*. Non è consentito l'uso di eserciziari e calcolatrici grafiche. Non è consentito uscire né muoversi dal proprio posto prima della fine della prova. **In assenza del procedimento l'esercizio non verrà valutato.** Il punteggio ottenuto in ogni esercizio dipenderà dalla chiarezza e dalla completezza delle spiegazioni fornite. Tenere esposto il libretto di iscrizione ed un valido documento di riconoscimento per il controllo dell'identità. **A chiunque venisse trovato in contravvenzione rispetto a queste regole, verrà ritirata e annullata la prova.**

Firma____

1. Studiare la funzione:

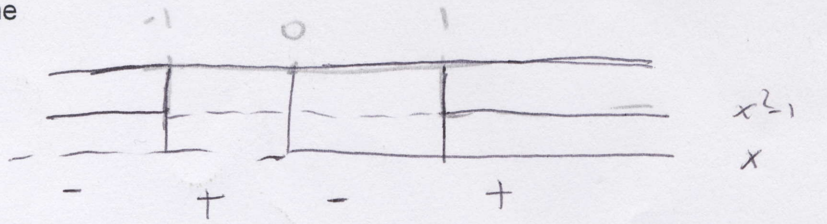
$$f(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$$

e tracciarne il grafico.

Insieme di definizione

$\frac{x^2-1}{x} > 0$

$x > 0$



$\Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Limiti agli estremi degli intervalli di definizione ed eventuali asintoti orizzontali e verticali

$\lim_{x\to -1^+} \lg\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = \lg\left(\frac{0^-}{-1}\right) = -\infty$ Asintoto Verticale

$\lim_{x\to 0^-} \lg\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = \lg\left(\frac{-1}{0^-}\right) = +\infty$ Asintoto Verticale

$\lim_{x\to 1^+} \lg\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = \lg\left(\frac{0}{1}\right) = -\infty$ Asintoto Verticale

$\lim_{x\to +\infty} \lg\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = +\infty$

Derivata prima

$$f'(x) = \frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{2x^2-(x^2-1)}{x^2} = \frac{x^2+1}{(x^2-1)x}$$

Segno della derivata prima, monotonia della funzione ed eventuali punti di max/min relativi e/o assoluti

$f'(x)=0$ mai.

$f'(x)>0 \iff (x^2-1)x>0$

		-1		0		1	
x^2-1	+		$-$		$-$		+
x	$-$		$-$		+		+
	$-$		+		$-$		+
	$\notin D$		crescente		$\notin D$		crescente

funzione crescente in $x\in(-1,0)$

funzione crescente in $x\in(1,+\infty)$

Derivata seconda

$$f''(x) = \frac{2x^2(x^2-1)-(x^2+1)(3x^2-1)}{(x^2-1)^2x^2} = \frac{2x^4-2x^2-3x^4-3x^2+1}{(x^2-1)^2x^2} =$$

$$= \frac{-x^4-4x^2+1}{(x^2-1)^2x^2}$$

Segno della derivata seconda, convessità della funzione ed eventuali punti di flesso

$y=x^2 \Rightarrow -y^2-4y+1=0 \iff y=\frac{4\pm\sqrt{20}}{-2} = -2\pm\sqrt{5} = \begin{cases} -2+\sqrt{5}>0 \\ -2-\sqrt{5}<0 \end{cases}$

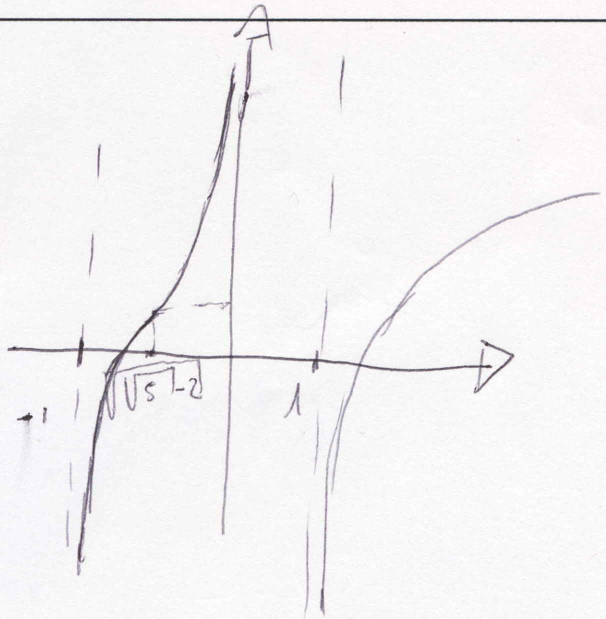
$x=\pm\sqrt{y}$; l'unica soluzione possibile sono $x=\sqrt{-2+\sqrt{5}}$

$x=\sqrt{-2+\sqrt{5}}$

-1		$-\sqrt{\sqrt{5}-2}$		0		$\sqrt{\sqrt{5}-2}$		1	
	+								$-$
$\notin D$	concava		convessa		$\notin D$		$\notin D$		concava

flesso

Grafico



2. Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbf{R}$ la seguente serie converge e calcolarne il valore

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4a}{a^2+3}\right)^n$$

$$\begin{cases} \frac{4a}{a^2+3} < 1 \\ \frac{4a}{a^2+3} > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4a-a^2-3}{a^2+3} < 0 \\ \frac{4a+a^2+3}{a^2+3} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a-a^2-3 < 0 & \text{1ª dis.} \\ 4a+a^2+3 > 0 & \text{2ª dis.} \end{cases}$$

1ª dis.

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2} = 2 \pm 1 = \begin{cases} a=3 \\ a=1 \end{cases}$$

Soluzioni 1ª disequazione $a \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

2ª disequazione

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = -2 \pm 1 = \begin{cases} a=-3 \\ a=-1 \end{cases}$$

soluzioni 2ª dis. $a \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$

Soluzioni sistema

-3 -1 1 3

← 1ª dis.
← 2ª dis.

Risultato: La serie converge per

$a \in (-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$

Per tali valori

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4a}{a^2+3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{4a}{a^2+3}} - 1$$

3. Calcolare il valore del seguente integrale definito:

$$\int_5^{10} \frac{3-\log(2x)}{x[\log(2x)]^2}\,dx$$

$$\int \frac{3-\lg(2x)}{x\,\lg(2x)^2}\,dx =$$

$$t = \lg(2x)$$

$$x = \frac{e^t}{2}$$

$$dx = \frac{e^t}{2}\,dt$$

$$= \int \frac{(3-t)\,\cancel{e^t}\,dt}{\frac{e^t}{2}\,t^2} = \int \frac{3-t}{t^2}\,dt = 3\int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{3}{t} - \lg|t| + C = \frac{-3}{\lg(2x)} - \lg|\lg(2x)| + C.$$