Corso di Laurea di Economia

Insegnamento di Metodi Matematici per l'Economia – a.a. 2011/2012

Prof. Domenico De Giovanni

Studio della seguente funzione:

$$f(x) = (x-1)\,e^{\frac{x-1}{x}}$$

- Dominio

$D(f) = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$

Trattasi di una funzione continua e derivabile in $D(f)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-1)\,e^{1-\frac{1}{x}} = -\infty$ (in quanto $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$)

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-1)\,e^{1-\frac{1}{x}} = -\infty$ (in quanto $\lim_{x\to 0^-} e^{1-\frac{1}{x}} = +\infty$)

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1)\,e^{1-\frac{1}{x}} = 0$ (in quanto $\lim_{x\to 0^+} e^{1-\frac{1}{x}} = 0$)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)\,e^{1-\frac{1}{x}} = +\infty$ (in quanto $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$)

- Ricerca degli asintoti obliqui (all'infinito).

Sia $x \neq 0$:

i) $\frac{f(x)}{x} = \frac{x-1}{x}e^{\frac{x-1}{x}}$ $\qquad y = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$

Il limite per x tendente a $+\infty$ ($-\infty$) di $\frac{f(x)}{x}$ sarà il risultato della "composizione"

$\lim_{x\to+\infty} = \frac{x-1}{x} = 1^-$, $\quad \lim_{y\to 1^-} = ye^{y} = e$

($\lim_{x\to-\infty} = \frac{x-1}{x} = 1^+$, $\lim_{y\to 1^+} = ye^y = e$)

Quindi $\lim_{x\to+\infty} = \frac{f(x)}{x} = e$, $\lim_{x\to-\infty} = \frac{f(x)}{x} = e$

ii) $f(x) - ex = x\left[\frac{x-1}{x} e^{\frac{x-1}{x}} - e\right] = \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{1-\frac{1}{x}} - e}{\frac{1}{x}}$

Determinare il limite per x tendente a +∞ (-∞) può ricondursi al calcolo del limite per $y = \frac{1}{x}$ a 0^+ (0^-) di

$$\frac{(1-y)e^{1-y} - e}{y}$$

Trattandosi di rapporti di infinitesimi e rapporto di funzioni derivabili, possiamo considerare il rapporto delle loro derivate:

$\frac{-e^{1-y} + (1-y)e^{1-y}(-1)}{1} = e^{1-y}[-1-1+y]$ ed il limite per x tendente a 0.

Così:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - ex] = -2e$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - ex] = -2e$$

In conclusione, $y = ex - 2e$ è l'equazione dell'asintoto obliquo a "+∞ " e a "-∞ ".

- Derivate

- La derivata prima della funzione:

$$f'(x) = D\left[(x-1)e^{1-x^{-1}}\right] = e^{1-\frac{1}{x}}\left[1 + x^{-1} - x^{-2}\right] = e^{1-\frac{1}{x}} \frac{x^2+x-1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0,\ x \in D(f) \Leftrightarrow x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

x_1 punto di max relativo

x_2 punto di min relativo

f(x) crescente in $\left(-\infty,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ e in $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$

f(x) decrescente in $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},0\right)$ e in $\left(0,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

NB:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{1-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to +\infty} e^{1-y}\left[1+y-y^2\right]$$

$$\lim_{x\to +\infty} e^{1-y}\left[1+y-y^2\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left[1+y-y^2\right]}{e^{y-1}}=0 \quad \text{così} \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x)=0$$

- La derivata seconda della funzione:

$$Df'(x)=D\left[e^{1-x^{-1}}\left(1+x^{-1}-x^{-2}\right)\right]=e^{1-\frac{1}{x}}\left(x^{-2}+x^{-3}-x^{-4}-x^{-2}+2x^{-3}\right)=e^{\frac{x+1}{x}}\left(3x^{-3}-x^{-4}\right)=e^{\frac{x+1}{x}}\,\frac{3x-1}{x^4}$$

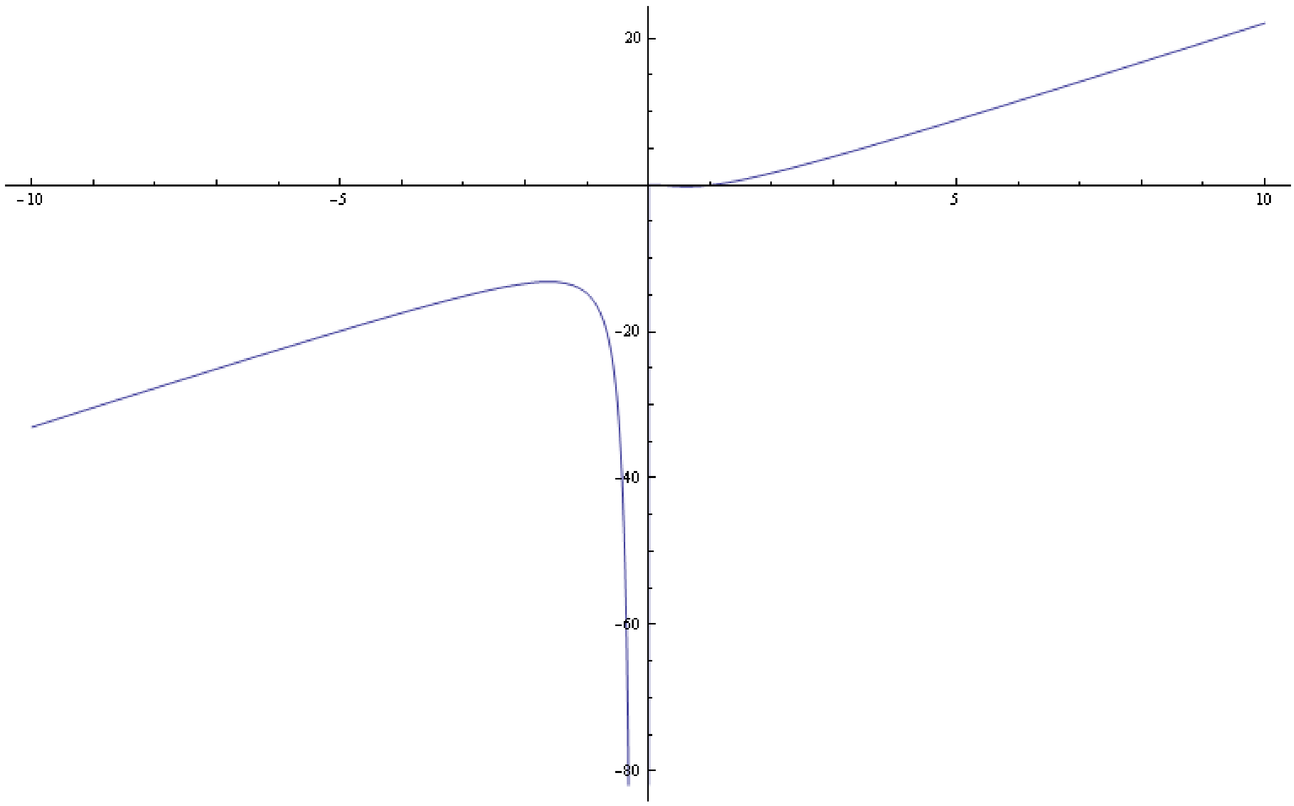
$$f''(x)=0,\quad x\in D(f'')\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

$f''(x)<0 \quad x\in(-\infty,0)$, $\qquad f(x)$ è concava in $(-\infty,0)$

$f''(x)<0 \quad x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$, $\qquad f(x)$ è concava in $\left(0,\frac{1}{3}\right)$

$f''(x)>0 \quad x\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$, $\qquad f(x)$ è convessa in $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$

Grafico di $f(x)$



Si riporta il particolare riguardante il punto di minimo relativo.