Corso di Laurea di Economia

Insegnamento di Metodi Matematici per l'Economia – a.a. 2011/2012

Prof. Domenico De Giovanni

Studio della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3(x+1)^2}$$

- Dominio

$D(f) = (-\infty, +\infty)$

- Asintoti

$y = x + \frac{2}{5}$ Asintoto obliquo (a "$+\infty$" e "$-\infty$")

- Derivata

Ricordando che $h^{-1}(y) = \sqrt[5]{y}$ è l'inversa di $h(x) = x^5$ e, pertanto, derivabile in $y \in \Re \setminus \{0\}$, la funzione $f(x)$ è derivabile in $(-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,+\infty) = D(f')$.

$$f'(x) = Df(x) = D\left[x^3(x+1)^2\right]^{1/5} = \frac{1}{5}\left[x^3(x+1)^2\right]^{1/5-1}\left[3x^2(x+1)^2 + x^3 2(x+1)\right] = \frac{1}{5}\,\frac{5x^4 + 8x^3 + 3x^2}{\left[x^3(x+1)^2\right]^{4/5}}$$

$f'(x) = 0$ per $x \in D(f')$: consideriamo il polinomio al numeratore:

$$5x^4 + 8x^3 + 3x^2 = x^2\left[5x^2 + 8x + 3\right] = x^2(x+1)\left(x + \frac{3}{5}\right)$$

Quindi:

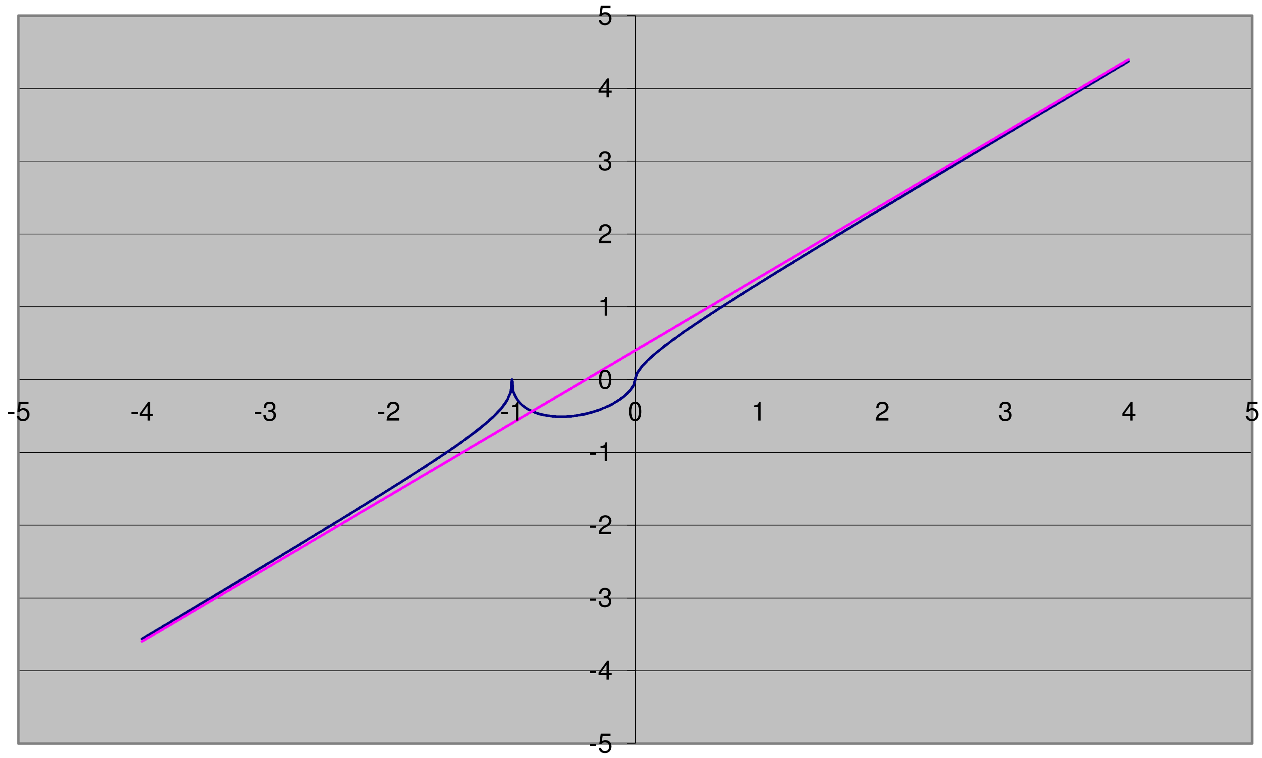
$$f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x \in D(f') \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{5}$$

N.B.: il segno di $f'(x)$ per $x \in D(f')$ = il segno del polinomio $5x^4 + 8x^3 + 3x^2$

$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -1^+} f'(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$

Grafico di $f(x)$:



La funzione $f^{'}(x)$ è derivabile in $D(f^{'})$, si ricava così:

$$f^{2}(x)=Df^{'}(x)=D\left\{\frac{1}{5}\,\frac{5x^{4}+8x^{3}+3x^{2}}{\left[x^{3}(x+1)^{2}\right]^{4/5}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{5}\,\frac{\left[20x^{3}+24x^{2}+6x\right]\left[x^{3}(x+1)^{2}\right]^{4/5}-\left[5x^{4}+8x^{3}+3x^{2}\right]\frac{4}{5}\left[x^{3}(x+1)^{2}\right]^{4/5-1}D\left[x^{3}(x+1)^{2}\right]}{\left[x^{3}(x+1)^{2}\right]^{8/5}}=$$

$$=\frac{1}{5}\,\frac{\left[20x^{3}+24x^{2}+6x\right]\left[x^{3}(x+1)^{2}\right]-\left[5x^{4}+8x^{3}+3x^{2}\right]\frac{4}{5}\left[5x^{4}+8x^{3}+3x^{2}\right]}{\left[x^{3}(x+1)^{2}\right]^{8/5+1/5}}=$$

$$=\frac{1}{25}\,\frac{-6x^{6}-12x^{5}-6x^{4}}{\left[x^{3}(x+1)^{2}\right]^{9/5}}=-\frac{6}{25}\,\frac{x^{4}\left(x^{2}+2x+1\right)}{x^{27/5}\,(x+1)^{18/5}}=-\frac{6}{25}\,\frac{x^{4}(x+1)^{2}}{x^{27/5}\,(x+1)^{18/5}}=-\frac{6}{25}\,\frac{1}{x^{7/5}\,(x+1)^{8/5}}$$

In conclusione:

$f(x)$ è convessa in $(-\infty,-1)$

$f(x)$ è convessa in $(-1,0)$

$f(x)$ è concava in $(0,+\infty)$