I numeri indici

E' una categoria di rapporti statistici molto diffusa perché agevola il confronto di valori in occasioni diverse

L'integrazione planetaria delle relazioni economiche rende necessaria la corretta comparazione del PIL, del livello dei prezzi, della qualità della vita

Fin dalla sua origine la Statistica (allora Aritmetica Politica) è stata usata per valutare le risorse di uno Stato, la sua capacità di produzione, la leva militare.

Ancora oggi uno dei compiti fondamentali dell'ISTAT ha al centro la definizione del livello generale dei prezzi

Classificazione dei numeri indici

BASE FISSA: Il riferimento è costante per tutti i termini della serie

BASE MOBILE: Il riferimento cambia ad ogni termine (concatenamento)

ELEMENTARI: riguardano un solo fenomeno

SINTETICI: riguardano un insieme di fenomeni che ci interessa trattare in modo aggregato

Detti anche indici complessi

Numeri indice elementari

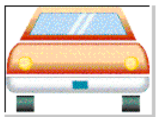
I numeri indici elementari sono il rapporto percentuale tra i dati osservati in una serie di occasioni, con il dato già osservato in una occasione di riferimento

$$\text{Numero indice} = \frac{\text{Intensità o numerosità osservata}}{\text{Intensità o numerosità di riferimento}} * 100$$

"Occasione" significa che la rilevazione è stata effettuata secondo un preciso ordinamento: spaziale, temporale o altro

Esempio: confronto del prezzo di listino per la Audi 80 1.8 E

Paese	Prezzo	Numeri indici Italia=100
Italia	24 531 850	100.00
Germania	21 837 400	89.02
Belgio	21 280 000	86.74
Francia	19 734 000	80.44
Spagna	32 388 000	132.02



Simbologia per gli indici elementari

Indicheremo i numeri indici elementari con la seguente notazione:

$${}_xI_t = \frac{Y_t}{Y_x} * 100 \qquad \text{per } t=0,1,2, ...,$$

che si legge: numero indice base x per l'occasione "t".

Il numero indice a base fissa esprime la variazione percentuale tra il dato corrente ("t") ed il dato di riferimento ("x")

I numeri indici a base mobile (o concatenati) a partire dalla intensità "t" saranno indicati con i simboli:

$${}_{t-1}I_t = \frac{Y_t}{Y_{t-1}} * 100 \qquad \text{per } t= 1,2, ...,$$

Il numero indice a base mobile esprime la variazione percentuale tra il dato corrente ("t") ed il dato dell'occasione precedente ("t-1")

Esempio per gli indici elementari

Si abbia la serie (Y1=7, Y2=9, Y3=11, Y4=15, Y5=8) e si voglia calcolare la serie dei numeri indice base fissa "3" e a base mobile.

Serie di indici a base fissa				Serie di indici a base mobile			
Num. Ind	Formula	Calcolo	Valori	Num. Ind	Formula	Calcolo	Valori
3|1	$\frac{Y1}{Y3}*100$	$\frac{7}{11}*100$	63.64	–	–	--	-
3|2	$\frac{Y2}{Y3}*100$	$\frac{9}{11}*100$	81.82	1|2	$\frac{Y2}{Y1}*100$	$\frac{9}{7}*100$	128.5
3|3	$\frac{Y3}{Y3}*100$	$\frac{11}{11}*100$	100.00	2|3	$\frac{Y3}{Y2}*100$	$\frac{11}{9}*100$	122.2
3|4	$\frac{Y4}{Y3}*100$	$\frac{15}{11}*100$	136.36	3|4	$\frac{Y4}{Y3}*100$	$\frac{15}{11}*100$	136.3
3|5	$\frac{Y5}{Y3}*100$	$\frac{8}{11}*100$	72.72	4|5	$\frac{Y5}{Y4}*100$	$\frac{8}{15}*100$	53.2

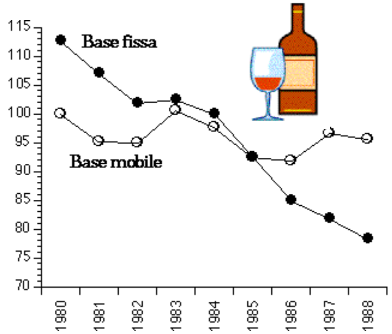
Da notare che i numeri indici a base mobile possono iniziare solo un periodo dopo l'avvio della serie

Talvolta il primo dato della base mobile si pone uguale a 100

Esempio

I dati in tabella riguardano il consumo medio annuo di vino in Italia. Calcolare gli indici elementari a base fissa '84 e gli indici a base mobile a partire dal 1980.

Anni	Vino (litri)	Base fissa '84	Base mobile
1980	90.6	112.55	100.00
1981	86.2	107.08	95.14
1982	81.9	101.74	95.01
1983	82.4	102.36	100.61
1984	80.5	100.00	97.69
1985	74.4	92.42	92.42
1986	68.3	84.84	91.80
1987	65.9	81.86	96.49
1988	63.0	78.26	95.60



L'indice a base fissa ha natura di statica comparata ed evidenzia un netto declino che non è invece apparente nell' indice a base mobile che ha natura dinamica

I fenomeni a decadenza lenta (esponenziale) si ritrovano spesso in questo tipo di grafico

Numeri indici e variazioni relative

Non esiste differenza logica tra numeri indici e variazioni relative

$$ {}_xI_t - 100 = {}_xI_t - {}_xI_x = \left(\frac{Y_t}{Y_x}\right)*100 - \left(\frac{Y_x}{Y_x}\right)*100 = $$

$$ = \left[\frac{Y_t - Y_x}{Y_x}\right]*100 $$

Il primo è un calcolo più rapido perché evita la sottrazione, ma la seconda dà una informazione più diretta

Se il numero indice è 226.3 in un'occasione "t" ed è 235.2 in un'altra "s" lo scarto assoluto sarà 235.2-226.3=8.9

vuol dire che l'incremento <u>subito dalla variabile</u> è pari all'8.9% del valore che aveva nell'occasione base "x"

$$ {}_xI_t - {}_xI_s = \left(\frac{Y_t}{Y_x} - \frac{Y_s}{Y_x}\right)*100 = \left(\frac{Y_t - Y_s}{Y_x}\right)*100 $$

Numeri indici e variazioni relative/2

Che cosa misura la variazione percentuale (o relativa) dell'indice?

$$ \left(\frac{{}_xI_t - {}_xI_s}{{}_xI_t}\right)*100 = \left(\frac{\frac{Y_t}{Y_x} - \frac{Y_s}{Y_x}}{\frac{Y_t}{Y_x}}\right)*100 = \left(\frac{\frac{Y_t - Y_s}{Y_x}}{\frac{Y_t}{Y_x}}\right)*100 = \left(\frac{Y_t - Y_s}{Y_t}\right)*100 $$

Misura la variazione relativa nei <u>valori originali</u> (3.93%).

La variazione relativa del numero indice a base fissa coincide con la variazione relativa della variabile originaria.

Proprietà dei numeri indici elementari

I numeri indice elementari godono di varie proprietà

- Invarianza rispetto ai cambiamenti di scala
- Reversibilità delle basi
- Circolarità
- Positività (perché si applicano a valori positivi)

Invarianza per le modifiche di scala

Scaturisce dalla natura di rapporti dei numeri indici: se si moltiplica ogni intensità per la medesima costante, la serie dei numeri indici rimane invariata.

Consideriamo due serie in rapporto di proporzionalità

$$Y_t \quad t = 1, 2, \ldots, \qquad\qquad W_t = aY_t \quad t = 1, 2, \ldots,$$

La serie degli indici calcolata sulle "Y" e la stessa di quella calcolata sulle "X"

$${}_xI_t = \frac{W_t}{W_x} * 100 = \frac{aY_t}{aY_x} * 100 = \frac{Y_t}{Y_x} * 100$$

Esempio: andamento della spesa sanitaria

Anni	Spesa In miliardi	N.I 1984=100	Spesa In milioni	N.I 1984=100
1980	18034.14	53.04	1803414	53.04
1981	21869.21	64.32	2186921	64.32
1982	25710.36	75.62	2571036	75.62
1983	28500.87	83.83	2850087	83.82
1984	34000.47	100.00	3400047	100.00
1985	42969.59	126.38	4296959	126.38
1986	43974.25	129.34	4397425	129.33
1987	46585.38	137.02	4658538	137.01
1988	47983.64	141.13	4798364	141.13
1989	55870.05	164.32	5587005	164.32
1990	61233.52	180.10	6123352	180.10

La serie dei numeri indici è identica sia che la spesa sia in miliardi che in milioni.

L'invarianza si applica sia a quelli a base fissa che a base mobile

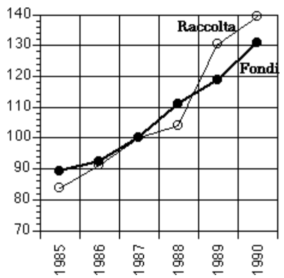
Utilità grafica

Trattandosi di numeri puri (rispetto a trasformazioni moltiplicative), i numeri indici permettono di rappresentare insieme valori espressi in unità molto eterogenee

ESEMPIO

In tabella si riportano le serie storiche riguardanti la raccolta lorda (in miliardi di dollari) ed il numero di fondi monetari negli USA

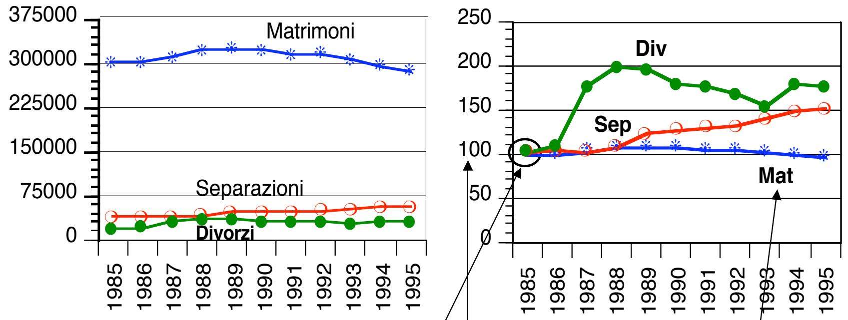
Anno	Raccolta	Fondi
1985	730.1	348
1986	792.3	360
1987	869.1	389
1988	903.4	432
1989	1134.6	463
1990	1211.8	509



Le due serie, numericamente diverse, coesistono in uno stesso grafico basato sui numeri indici.

Trasformazione in numero indice

Serie storiche molto diverse possono condividere lo stesso grafico se trasformate in numero indice



Questo punto si perde

Le scale perdono i valori naturali

Le etichette (o label) sono state abbreviate

La reversibilità delle basi

Noto il numero indice base "x" per "t" sia da questo ricostruibile il numero indice base "t" per "x".

$$\sqrt{{}_xI_t * {}_tI_x} = \sqrt{\left[\left(\frac{Y_t}{Y_x}\right)*100\right]*\left[\left(\frac{Y_x}{Y_t}\right)*100\right]} = \sqrt{\frac{Y_t}{Y_x}*\frac{Y_x}{Y_t}*100^2} = 100 \Rightarrow {}_xI_t = \frac{100^2}{{}_tI_x}$$

Tale proprietà consente di passare da una serie di numeri indici a base fissa ad una corrispondente serie a base mobile.

$${}_{t-1}I_t = \frac{Y_t}{Y_{t-1}}*100 = \left[\frac{\left(\frac{Y_t}{Y_x}\right)*100}{\left(\frac{Y_{t-1}}{Y_x}\right)*100}\right]*100 = \frac{{}_xI_t}{{}_xI_{t-1}}*100$$

Esempio per la reversibilità

Per passare dalla base fissa a alla base mobile basterà dividere ciascun termine della serie a base fissa per il precedente

$${}_{t-1}I_t = \frac{{}_xI_t}{{}_xI_{t-1}}*100 = \frac{\frac{Y_t}{Y_x}*100}{\frac{Y_{t-1}}{Y_x}*100}*100 = \left(\frac{Y_t}{Y_x}*\frac{Y_x}{Y_{t-1}}\right)*100 = \frac{Y_t}{Y_{t-1}}*100$$

Data la serie '83-'88 dei viaggiatori (sbarcati) in navigazione aerea.

Anno	Viagg.	Base Fissa	Operazione	Base Mobile
1983	14759	100.00		-
1984	15528	105.21	(105.21/100.00)*100.00	105.21
1985	16376	110.96	(110.96/105.21)*100.00	105.47
1986	16838	114.09	(114.09/110.96)*100.00	102.82
1987	18724	126.87	(126.87/114.09)*100.00	111.21
1988	19867	134.61	(134.61/126.87)*100.00	106.10

In pratica si passa dalla serie a base fissa quella in base mobile costruendo gli indici in base mobile della <u>serie degli indici</u> in base fissa

Circolarità

Consente di ottenere un indice passando attraverso tutti gli altri

Permette inoltre di passare da una serie a base mobile ad una a base fissa.

$$\frac{\prod_{j=x}^{t-1} {}_jI_{j+1}}{100^{t-x-1}} = \frac{{}_xI_{x+1}*{}_{x+1}I_{x+2}*\ldots*{}_{t-2}I_{t-1}*{}_{t-1}I_t}{100^{t-x-1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{Y_{x+1}}{Y_x}\right)*100\left(\frac{Y_{x+2}}{Y_{x+1}}\right)*100*\ldots*\left(\frac{Y_{t-1}}{Y_{t-2}}\right)*100*\left(\frac{Y_t}{Y_{t-1}}\right)}{100^{t-x-1}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{Y_t}{Y_x}\right)*100^{t-x}}{100^{t-x-1}} = \left(\frac{Y_t}{Y_x}\right)*100 = {}_xI_t$$

Formula ovviamente valida per t>x.

Circolarità/2

Se il periodo corrente "t" è precedente a quello base "x" lo schema non cambia, ma si articolerà in due passi:

1. Si calcola prima: $${}_xI_t = \frac{100^2}{{}_tI_x} = \frac{100^2}{\frac{\prod_{j=t}^{x-1}{}_jI_{j+1}}{100^{x-t-1}}} = \frac{100^{x-t+1}}{\prod_{j=t}^{x-1}{}_jI_{j+1}}$$

2. Si sfrutta la reversibilità delle basi per calcolare: $${}_xI_t = \frac{100^2}{{}_tI_x}$$

Serie 1983-'87 delle importazioni di cacao (in migliaia di quintali). Dalla Base Mobile si passa alla Base Fissa 1984

Anno	Imp.	Base M.	Operazioni	Base F.
1982	2351	-	100^3/(90.66*104.72)	105.33
1983	2462	104.72	100^2/90.66	110.30
1984	2232	90.66		100.00
1985	2812	126.25		126.25
1986	2516	89.47	(126.25*89.47)/100	112.96
1987	2639	104.89	(126.25*89.47*104.89)/100^2	119.04
1988	2704	102.46	(126.25*89.47*104.89*102.46)/100^3	121.39

Esempio per la circolarità

Costruzione della serie in numeri indici a base mobile ed ottenimento della serie a base fissa '84.

t<x Ricostruzione del dato in base fissa '84 dell'82

$$_{82}I_{84} = \frac{\prod_{j=82}^{83} {}_jI_{j+1}}{100^{84-82-1}} = \frac{_{82}I_{83} * {}_{83}I_{84}}{100^1} = \frac{104.72 * 90.66}{100^1} = 94.93$$

$$_{84}I_{82} = \frac{100^2}{94.93} = 105.33$$

t>x Ricostruzione del dato in base fissa '84 dell'88

$$_{84}I_{88} = \frac{\prod_{j=84}^{88} {}_jI_{j+1}}{100^{88-84-1}} = \frac{_{84}I_{85} * {}_{85}I_{86} * {}_{86}I_{87} * {}_{87}I_{88}}{100^3}$$

$$= \frac{126.25 * 89.47 * 104.89 * 102.46}{100^1} = 121.39$$

Cambiamento di base

La reversibilità consente il cambiamento della base con grande facilità
Partiamo dalla serie in base fissa nell'occasione "x"

$$_xI_t = \frac{Y_t}{Y_x} * 100 \quad \text{per } t = 0,1,2,\ldots$$

e cerchiamo di passare alla serie con base fissa nell'occasione "w"

$$_wI_t = \frac{Y_t}{Y_w} * 100 \quad \text{per } t = 0,1,2,\ldots$$

il problema si risolve facilmente se si moltiplicano i termini della serie in vecchia base per la quantità

$$C(x,w) = \frac{Y_x}{Y_w}$$ **detta coefficiente di raccordo**

Tale rapporto è talvoltca conoscibile in via diretta

Cambiamento di base/2

Lo schema è perciò

(Serie nuova base) = Coefficiente di racccordo * (Serie in vecchia base)

Infatti

$$_wI_t = \frac{Y_x}{Y_w} * {}_xI_t = \frac{Y_x}{Y_w} * \frac{Y_t}{Y_x} * 100 = \frac{Y_t}{Y_w} * 100$$

Se non si conoscono i valori originali, ma solo i numeri indici, il coefficiente di raccordo si ricava dall'identità

$$C(x,w) = \frac{Y_x}{Y_w} = \frac{100}{\frac{Y_w}{Y_x} * 100} = \frac{100}{_xI_w}$$

il coefficiente di raccordo si ottiene moltiplicando per 100 il reciproco dell'indice in vecchia base della nuova

Esempio

Da base '82 a base '85

Nuova serie= Raccordo X Vecchia serie

VOCI	1981	1982	1983	1984	1985
Valori	7	21	28	35	14
Indici 1982=100	33.33	100.0	133.33	166.67	66.67
Raccordo	1.5* 33.33	1.5*100.0	1.5*133.33	1.5*166.67	1.5*66.67
Indici 1985=100	50.00	150.00	200.00	250.00	100.0

il coefficiente di raccordo, noti i valori originari si ricava subito:

$$C(82,85) = \frac{Y_{82}}{Y_{85}} = \frac{21}{14} = 1.5$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere utilizzando l'indice base '82 dell'85

$$C(82,85) = \frac{100}{_{82}I_{85}} = \frac{100}{66.67} = 1.4999$$

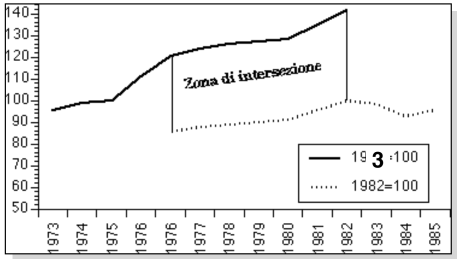
Non sempre sono noti i valori originali e bisogna arrangiarsi con i numeri indice

Raccordo di serie in basi diverse

Disponendo di serie a base fissa diversa si deve costruire una serie in base unica. La procedura è simile al cambiamento di base.

ESEMPIO. Raccordare le due serie in una serie unica base '83

Anno	1975=100	1983=100	serie racc.
1973	95.52		67.56
1974	98.75		69.84
1975	100.00		70.73
1976	110.82		78.38
1977	120.28	85.07	85.07
1978	123.56	87.39	87.39
1979	125.72	88.92	88.92
1980	127.06	89.86	89.86
1981	128.21	90.68	90.68
1982	135.00	95.48	95.48
1983	141.39	100.00	100.00
1984		98.27	98.27
1985		92.54	92.54
1986		95.38	95.38



Poiché è richiesto il raccordo a base '83 occorre cambiare quella a base '75. Si ha quindi bisogno del coefficiente Y75/Y83 che però non è noto direttamente.

Si può ricavare dalla relazione $c(75,83) = 100/\,_{75}I_{83}$

Tutti i valori della prima colonna, fino al '76, devono essere moltiplicati per 100/141.39.

Bollettino Mensile di Statistica ISTAT

Tav. 13-8 — Numeri indici del costo della vita valevoli ai fini dell'applicazione della scala mobile delle retribuzioni nei settori dell'industria, commercio, agricoltura e altri settori interessati

A - Indici trimestrali

Trimestri di accertamento	Indici ottenuti dal calcolo	Indici arrotondati	Punti variaz. contingenza	Trimestri di accertamento	Indici ottenuti dal calcolo	Indici arrotondati	Punti variaz. contingenza	Trimestri di accertamento	Indici ottenuti dal calcolo	Indici arrotondati	Punti variaz. contingenza
I) BASE: AGOSTO-OTTOBRE 1974 = 100 (b)											
Nov74-Gen75	105,52	106	+ 6	Feb78-Apr78	167,09	167	+ 5	Feb81-Apr81	269,25	269	+ 14
Feb75-Apr75	108,86	109	+ 3	Mag78-Lug78	173,44	173	+ 6	Mag81-Lug81	279,17	279	+ 10
Mag75-Lug75	111,65	112	+ 3	Ago78-Ott78	178,02	178	+ 5	Ago81-Ott81	287,75	288	+ 9
Ago75-Ott75	114,21	114	+ 2	Nov78-Gen79	183,59	184	+ 6	Nov81-Gen82	297,33	297	+ 9
Nov75-Gen76	117,41	117	+ 3	Feb79-Apr79	192,38	192	+ 8	Feb82-Apr82	309,30	309	+ 12
Feb76-Apr76	123,39	123	+ 6	Mag79-Lug79	198,40	198	+ 6	Mag82-Lug82	322,35	322	+ 13
Mag76-Lug76	130,13	130	+ 7	Ago79-Ott79	205,95	206	+ 8	Ago82-Ott82	334,83	335	+ 13
Ago76-Ott76	134,47	134	+ 4	Nov79-Gen80	214,30	214	+ 8	Nov82-Gen83	348,52	349	+ 14
Nov76-Gen77	143,27	143	+ 9	Feb80-Apr80	226,07	226	+ 12	Feb83-Apr83	358,58	359	+ 10
Feb77-Apr77	148,93	149	+ 6	Mag80-Lug80	234,38	234	+ 8	Mag83-Lug83	367,53	368	+ 9
Mag77-Lug77	154,21	154	+ 5	Ago80-Ott80	243,66	244	+ 10	Ago83-Ott83	376,16	376	+ 8
Ago77-Ott77	157,70	158	+ 4	Nov80-Gen81	255,39	255	+ 11				
Nov77-Gen78	161,91	162	+ 4								
II) BASE: AGOSTO-OTTOBRE 1982 = 100 (c)											
Nov82-Gen83	104,08		+ 4	Feb84-Apr84	120,45 (e)		+ 4	Mag85-Lug85	133.24		+ 3
Feb83-Apr83	107,14		+ 3	Mag84-Lug84	122,87		+ 2	Ago85-Ott85	134,50		+ 1
Mag83-Lug83	109,82		+ 2	Ago84-Ott84	124,11		+ 2				
Ago83-Ott83	112.41		+ 3	Nov84-Gen85	126,39		+ 2				
Nov83-Gen84	116,91 (d)		+ 4	Feb85-Apr85	130 87		+ 4				

B - Indici semestrali

Semestri di accertamento	Indici ottenuti dal calcolo	variaz. perc.	Semestri di accertamento	Indici ottenuti dal calcolo	variaz. perc.	Semestri di accertamento	Indici ottenuti dal calcolo	variaz. perc.
BASE: AGOSTO-OTTOBRE 1982 = 100 (c)								
Nov85-Apr86	137,64 (f)	+ 2,33	Nov88-Apr89	162,43	+ 3,43	Nov91-Apr92	(g) 196,36	+ 2,53
Mag86-Ott86	141,63	+ 2,90	Mag89-Ott89	167,31	+ 3,00	Mag92-Ott92	201,86	+ 1,78
Nov86-Apr87	145,33	+ 2,61	Nov89-Apr90	173,47	+ 3,68	Nov92-Apr93	205,22	+ 1,65
Mag87-Ott87	149,09	+ 2,59	Mag90-Ott90	179,28	+ 3,35	Mag93-Ott93	210,91	+ 2,77
Nov87-Apr88	153,02	+ 2,64	Nov90-Apr91	187,06	+ 4,34	Nov93-Apr94	215,30	+ 2,08
Mag88-Ott88	157,05	+ 2,63	Mag91-Ott91	193,63	+ 3,51	Mag94-Ott94	219.19	+ 1,81
						Nov94-Apr95	226,74	+ 3,44
						Mag95-Ott95	234,30	+ 3,33

Numeri Indici Sintetici

I fenomeni che si presentano in pratica sono in genere troppo complessi perchè basti l'analisi di una solo variabile.

- **Perchè la loro natura è intrinsecamente multivariata**
  - **Il livello dei prezzi**
  - **La produzione industriale**
  - **La criminalità**
  - **L'andamento della borsa**
- **Perchè si possono osservare solo indirettamente o solo a mezzo dell'accostamento di indicatori eterogenei**
  - **Capacità imprenditoriale**
  - **Disponibilità all'automazione**

In tali occasioni è possibile studiare il fenomeno attraverso un indice sintetico

Esempio sui titoli di borsa

Giorno	Titolo	Quotaz.	Azioni
15/4/85	SELM	3,400	93,500
	SELM Risp.	3,740	1,000
	Tecnomasio	800	50,000
16/4/85	SELM	3,280	98,400
	SELM Risp.	3,970	758
	Tecnomasio	810	55,400
17/4/85	SELM	3,120	99,200
	SELM Risp.	4,000	793
	Tecnomasio	820	54,600
18/4/85	SELM	3,150	96,700
	SELM Risp.	3,928	850
	Tecnomasio	805	53,000
19/4/85	SELM	3,170	95,000
	SELM Risp.	3,804	890
	Tecnomasio	790	60,900

A questi indici è dedicato poi uno studio separato

Per avere una idea del trend di questo gruppo di titoli si potrebbe calcolare una media per ogni chiusura e su queste costruire un numero indice

Giorni	15/4	16/4	17/4	18/4
Media Aritmetica	2,647	6,687	2,647	2,628
Num.ind. BF 15/4	100.00	101.51	100.00	99.28

Questa scelta ha lo svantaggio di assegnare ad ogni azione lo stesso peso (1/n) e non sempre questo è realistico

Impraticabilità della media semplice

I pesi uguali non possono essere applicati se i prodotti sono eterogenei in quanto sarebbero le varie unità di misura a stabilire l'importanza dei prodotti

Basterebbe alterare le scale di misurazione per ottenere risultati diversi.

ESEMPIO Con i dati della tabella seguente calcolare il numero indice 1979=100, delle quantità trattate di anno in anno

$$ {}_xI_t = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} Q_{it}}{n}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} Q_{ix}}{n}} * 100 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{ix}} * 100 $$

L'indice è dominato dalle misure solo numericamente più importanti

Anno	Carne Kg	Uova Dozzine	Acqua Bottiglie	Vino Litri	Stoffe Mtq	Totale Quantità	Num. Indice
1978	50	14	230	28	210	512	100.0
1979	60	18	290	32	270	670	130.8
1980	75	20	320	34	310	759	148.2
1981	78	22	313	37	290	740	144.5

Totale delle valutazioni

Supponiamo di aver rilevato, in ogni anno il prezzo unitario di alcune merci (espresso in eurolire) di una quantità fissa e di una tipologia comparabile:

Anno	Merce Misura	Carne Kg	Uova Dozzine	Acqua Miner. Bottiglie	Vino Litri	Stoffe m^2	Totale Prezzi	Prezzo Medio	Numero indice
1978		11.5	4.9	0.8	3.1	31.2	51.5	10.30	100.00
1979		12.4	5.1	0.7	3.2	32.7	54.1	10.82	105.05
1980		12.5	5.1	0.7	3.4	33.4	55.1	11.02	101.85
1981		12.3	5.2	0.6	3.6	34.5	56.2	11.24	102.00

$$ {}_xI_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}} * 100 = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}}{n}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}}{n}} * 100 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) P_{it}}{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) P_{ix}} * 100 $$

L'indice basato sulla media aritmetica semplice dei prezzi è dominato dai cambiamenti nei prodotti numericamente (in prezzo) più importanti: le stoffe e la carne e questo è illogico perché ignora l'importanza relativa nell'ambito del mercato.

Media non ponderata degli indici

In alternativa si potrebbero calcolare i numeri indici per ciascun prodotto e solo successivamene calcolarne una media, ovvero costruire un INDICE SINTETICO NON PONDERATO

$$ {}_xI_t^U = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) {}_xI_t^i $$

Anno	Carne	Uova	Acqua Miner.	Vino	Stoffe	N.I.
1978	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
1979	107.83	104.08	87.50	103.23	104.81	101.49
1980	108.70	104.08	87.50	109.68	107.05	103.40
1981	106.96	106.12	75.00	116.13	110.58	102.96

I due procedimenti hanno portato a risultati simili, ma tra loro c'è una grande differenza: il primo è un rapporto di medie l'altro è una media di rapporti

Problemi con l'indice non ponderato

Il numero indice sintetico con pesi uguali risolve il problema della comparabilità. Ha però ha il difetto di dare la stessa importanza alle variazioni di tutti i soggetti dell'indice.

$$ {}_xI_t^U = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) {}_xI_t^i $$

Giorno	SELM	SELM Risp.	Tecnomasio	Media Ar.
15/4	100.00	100.00	100.00	100.00
16/4	96.47	106.15	101.25	101.29
17/4	91.76	106.95	102.50	100.40
18/4	92.65	105.03	100.63	99.44
19/4	93.24	101.71	98.75	97.90

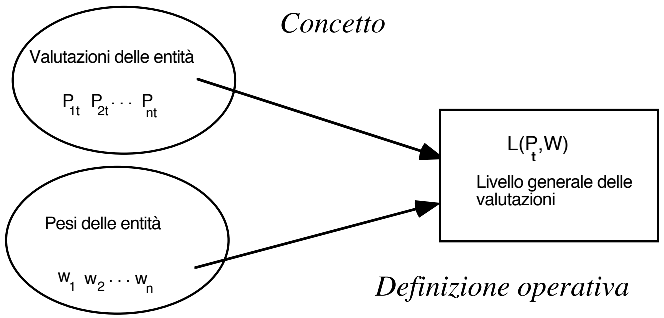
non fa distinzione tra le Selm ordinarie e le Selm a risparmio nonostante l'enorme differenza di importanza nel volume degli scambi;

L' andamento dell'indice sintetico è determinato dalle Selm a risparmio le cui maggiori oscillazioni più si riflettono nella media aritmetica.

Livello generale delle valutazioni

E' una variabile multidimensionale non osservabile e non misurabile direttamente.

Occorre darne una definizione perché si possa proporne poi la misura in modo indiretto.



$$w_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$L(p_1, p_2, \ldots, p_n; w_1, w_2, \ldots, w_n) : \left(R^+\right)^n \otimes [0,1]^n \rightarrow R^+$$

Desiderata di L(w,P)

IDENTITA'. Se in due diverse occasioni: la "x" e la "t" si riscontrano le stesse valutazioni:

$$P_{ix} = P_{it} \ \ \forall \ \text{"}i\text{"}, \ allora \ \ L(P_x, W) = L(P_t, W)$$

non deve cambiare il livello generale.

OMOGENEITA' LINEARE. Se si cambia l'unità di conto delle valutazioni, il livello generale cambia allo stesso modo:

$$P_{it}^* = aP_{it} \ \ \forall \ \text{"}i\text{"} \ \ con \ \ a > 0 \ \ allora \ \ L\left(P_t^*, W\right) = aL(P_t, W)$$

se le valutazioni sono espresse ad esempio in euro invece che in lire, il livello generale sia pure espresso in euro.

Desiderata di L(w,P)/2

MONOTONICITA'. Se da una occasione "x" si passa ad una occasione "t" in cui almeno una valutazione è aumentata e le altre rimaste uguali, il livello generale deve aumentare:

$$P_{ix} < P_{it} \ \ per \ \ almeno \ \ un \ \text{"}i\text{"} \ \ allora \ \ L(P_x, W) < L(P_t, W)$$

Ogni aumento del livello generale avvertirà che uno o più delle valutazioni singole si sono incrementate.

Tra tutte le possibili funzioni rispondenti alle tre condizioni precedenti si considera la formula che segue:

$$L(P_t, W, r) = \left[\sum_{i=1}^{n} P_{it}^r w_i\right]^{\frac{1}{r}}$$

dove "r" è un intero positivo. Di solito si ha r=1 (media aritmetica) oppure "r" tendente a zero (media geometrica)

Formule per gli indici sintetici

Gli INDICI SINTETICI si costruiscono come media ponderata di indici elementari

$${}_xI_t^{(S)} = \sum_{i=1}^{n} W_i * {}_xI_t^{(i)} \qquad \text{con i pesi tali che} \quad W_i \ge 0 \quad i=1,2,\ldots,n; \quad \sum_{i=1}^{n} W_i = 1$$

Il sistema dei pesi riporta proporzionatamente le variazioni intervenute in tutti i prodotti considerati

Poichè l'indice sintetico è una combinazione lineare degli indici elementari, il peso W_i indica di quanto varierà l'indice sintetico se l'indice elementare aumenta di una unità (fermi restando gli altri indici elementari)

$$\frac{\partial L(P_t, W)}{\partial \, {}_xI_t^i} = w_i$$

Il caso della media semplice degli indici elementari ricade nella formula generale con pesi *W_i=1/n per i=1,2,...,n*

Esempio di costruzione

A partire dalle rilevazioni seguenti

			CITTA'		
Prodotti	Como	Padova	Latina	Taranto	Palermo
Te	800	900	850	950	900
Caffè	700	750	800	850	900

Calcolare un indice dei prezzi Latina=100 secondo i seguenti schemi:

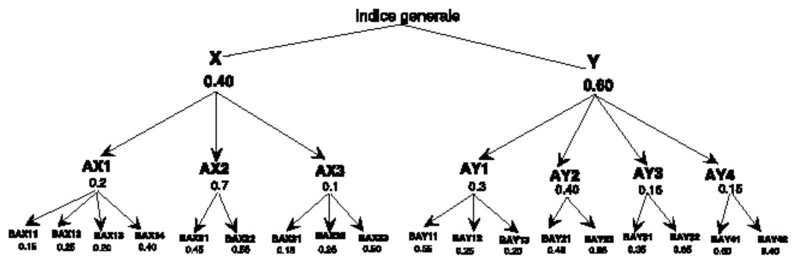
a) Indice elementare basato sulla media aritmetica dei prezzi;

b) Indice sintetico costruito dando pesi uguali ai due prodotti;

c) Indice sintetico costruito dando peso 0.7 al caffè.

Città	T	C	M_a	I_{Ma}	I_T	I_C	$(I_T+I_C)/2$	$0.3I_T+0.7I_C$
Como	800	700	750	90.91	94.12	87.50	90.81	89.49
Padova	900	750	825	100.00	105.88	93.75	99.82	97.39
Latina	850	800	825	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
Taranto	950	850	900	109.09	111.76	106.25	109.01	107.90
Palermo	900	900	900	109.09	105.88	112.50	109.19	110.51

Schema di aggregazione



il sistema dei pesi può derivare da una sequenza gerarchica di sottosistemi di ponderazione legati a composizione merceologica, suddivisione territoriale, etc.

Ogni sottosistema ha somma unitaria.
Il peso effettivo di ogni bene o servizio deriva dal prodotto dei pesi ai vari livelli gerachici che lo interessano

Considerazioni sugli indici di prezzo

L 'approccio aggregato attenua diverse obiezioni e riserve sugli indici sintetici

La tipologia di confezione
Luogo d 'acquisto
Metodo di pagamento
Prossimità alla scadenza della data di consumazione
Sconti e promozioni
Tipo di acquirente

I numeri indici dei prezzi NON possono stabilire che i prezzi siano...

Più alti a Milano che a Cosenza,
Nei capoluoghi di provincia più che nei comuni montani
Per i ricchi meno che per i poveri
Per i lavoratori dipendenti più che per quelli autonomi
Per i disoccupati diversamente che per gli occupati,
Per gli anziani che non per i giovani

Quello che si può ragionevolmente richiedere è che dicano se il livello dei prezzi varia di più o di meno per qualcuna delle categorie indicate

Simbologia

P_{it} — Valutazioni numerarie del prodotto "i" appartenent ad un paniere di altri "n" prodotti, realizzate nell'occasione "t"

Q_{it} — Le quantità del prodotto "i" scambiate ne medesima occasione "t"

$V_t = \sum_{i=1}^{n} P_{it} * Q_{it}$ — Valore complessivo dello scambio relativo agli "n" prodotti trattati nell'occasione "t"

L'uso dei "prezzi" 8valori numerari) rende comparabili quantità e servizi che altrimenti non potrebbero essere coinvolti in uno stesso calcolo

Il numero indice sintetico potrebbe allora essere istituito tra i termini della serie dei valori poiché questa è relativa ad unico "prodotto"

Formula del valore

Il valore nell'occasione "x" è contrapposto ad valore di riferimento

$$\text{Base fissa}:\quad {}_xI_t^V = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{ix}} * 100$$

Variazione relativa del valore complessivo di scambio tra due distinte occasioni

$$\text{Base mobile}:\quad {}_{t-1}I_t^V = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i,t-1}Q_{i,t-1}} * 100$$

Risolve il problema della comparazione per le manifestazioni di un fenomeno complesso quale il livello generale delle valutazioni

Formula del valore/2

Il valore nell'occasione "x" è contrapposto ad valore di riferimento

$$ {}_xI_t^V = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{ix}} * 100 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{P_{ix}}{P_{ix}}\right) P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{ix}} * 100 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{P_{ix}}{P_{ix}}\right) * 100\right] P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{ix}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{P_{it}}{P_{ix}}\right) 100 \frac{P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{ix}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{P_{it}}{P_{ix}}\right) 100 \left[\frac{P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{ix}}\right] = \sum_{i=1}^{n} {}_xI_t^i w_i$$

E' una media ponderata, ma la somma dei pesi non è necessariamente uno.
Potrebbe essere un difetto: non è garantita l'internalità della media.

Il livello generale non sarà sempre compreso tra l'indice più piccolo e più grande

il confronto è di scarso aiuto visto che le variazioni potrebbero essere dovute sia a cambiamenti nelle quantità che a cambiamenti nelle valutazioni

Esempio

Date le informazioni contenute nella tabella

	1980		1981		1982	
Beni	Qit	Pit	Qit	Pit	Qit	Pit
Zucchero	40	10	35	12	30	14
Farina	80	15	75	16	70	18
Latte	20	7	15	10	14	12
Uova	27	35	25	40	22	35

calcolare il numero indice sintetico con la formula del valore con base 1981

Anni	Calcolo	Valore	Indice
1980	40*10+80*15+20*7+27*35	2685	96.93
1981	35*12+75*16+15*10+25*40	2770	100.00
1982	30*14+70*18+14*12+22*35	2618	94.51

Nonostante i difetti trova Comunque impiego in alcuni indici di borsa

Il confronto diretto dei singoli beni non era informativo.

L'azione unificante dei prezzi permette di stabilire che il livello dei 4 beni è più alto nel 1981 che nel 1982.

Valori reali e virtuali

Oltre ai valori effettivi scambiati nelle occasioni a confronto, ci sono due valori figurativi che sono di estremo interesse

Reali

		Quantità "x"	"t"
Valutazioni	"x"	$P_{ix}Q_{ix}$	$P_{ix}Q_{it}$
	"t"	$P_{it}Q_{ix}$	$P_{it}Q_{it}$

Virtuali

$\sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{it}$ **Valore complessivo delle entità all'occasione "t" se fossero in vigore le valutazioni dell'occasione "x"**

$\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{ix}$ **Valore complessivo delle entità all'occasione "t" se con le valutazioni di questa si fossero trattate le quantità della "x"**

Formula di Laspeyres

La formula di Laspeyres confronta il valore di un aggregato di prodotti rilevato nell'occasione base con il valore che lo stesso aggregato avrebbe avuto se le quantità "x" fossero valutate con le quotazioni "t"

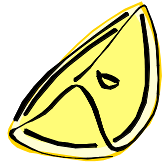
$$ {}_xI_t^{(L)} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}*Q_{ix}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}*Q_{ix}} \right)*100 $$

La formula di Laspeyres ricade nella classe degli indici sintetici:

$$ {}_xI_t^{(L)} = \sum_{i=1}^{n} W_i * {}_xI_t^{(i)} ; \qquad W_i = \frac{P_{ix}*Q_{ix}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}*Q_{ix}} $$

i pesi, determinati nell'occasione base, sono pari al rapporto tra la valutazione del prodotto i-esimo e la valutazione complessiva degli "n" prodotti coinvolti nell'indice.

Esempio

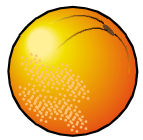


Date le informazioni contenute nella tabella

	1983		1984		1985	
Beni	Qit	Pit	Qit	Pit	Qit	Pit
Arance	20	100	15	110	23	102
Limoni	10	120	18	101	14	105
Mandarini	25	125	30	115	40	103

Calcolare il numero indice sintetico con la formula di Laspeyres con base 1985.

Anni	Calcolo		Serie	Indice
1983	23*100 + 14*120 + 40*125	=	34715000	135.99
1984	23*110 + 14*101 + 40*115	=	29553160	115.77
1985	23*102 + 14*105 + 40*103	=	$\boxed{25527520}$	100.00



Interpretazione statistica

Vogliamo stimare la media “b” del rapporto dei prezzi “P_{is}/P_{ir}” ipotizzando:

$$ \frac{p_{ir}}{p_{is}} = b + e_i $$

Inoltre, si ritiene che: $E(e_i) = 0; \quad Var(e_i) = \frac{\sigma^2}{w_{ix}}$

Lo stimatore ai minimi quadrati (con errori eteroschedastici) è:

$$ \hat{b} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} \sqrt{w_{ix}} \left(P_{it} / P_{ix} \right) \sqrt{w_{ix}} \right]}{\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{w_{ix}} \right)^2} = Laspeyres $$

Lo stesso ragionamento si potrà sviluppare per l’indice delle quantità

Formula di Paasche

Confronta il valore di un aggregato di prodotti rilevato nell'occasione "t" con il valore che lo stesso aggregato avrebbe avuto se le quantità della "t" fossero state valutate con le quotazioni della "x"

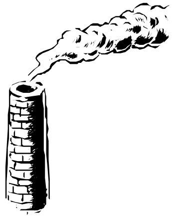
$$ {}_xI_t^{(P)} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}*Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}*Q_{it}} \right)*100 $$

Anche la formula di Paasche è riconducibile alla espressione degli indici sintetici:

$$ {}_xI_t^P = \sum_{i=1}^{n} w_{ix} \left({}_xI_t^i \right), \qquad w_{ix} = \frac{p_{ix} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{ix} q_{it}} $$

N.B. I pesi nella Laspeyres sono fissi. Nella Paasche variano di occasione in occasione

Esempio



Date le informazioni contenute nella tabella

	1978		1979		1980	
Beni	Q_{it}	P_{it}	Q_{it}	P_{it}	Q_{it}	P_{it}
Zinco	152	28	161	26	168	21
Rame	124	43	132	40	127	46
Piombo	187	61	175	68	172	70

Calcolare il numero indice sintetico con la formula di Paasche con base 1978

Anni	Calcolo	Serie	Indice
1978	152*28 + 124*43 + 187*61	= 9517159	100.00
	152*28 + 124*43 + 187*61	= 9517159	
1979	161*26 + 132*40 + 175*68	=11756860	96.52
	161*28 + 132*43 + 175*61	=12181395	
1980	168*21 + 127*46 + 172*70	=11781140	92.90
	168*28 + 127*43 + 172*61	=12682205	

Proprietà dell'identità

Si riflette nel fatto che il numero indice sintetico deve essere uguale a 100 se, nel passare dall'occasione "x" alla "t" (o viceversa), le valutazioni non subiscono nessuna modifica.

Sia la formula di Laspeyres che quella di Paasche verificano tale condizione. Infatti:

$$ {}_xI_x^L = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{ix}}{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{ix}} * 100 = 1*100 = 100; \qquad {}_tI_t^L = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{it}Q_{it}} * 100 = 1*100 = 100; $$

$$ {}_xI_x^P = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{ix}}{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{ix}} * 100 = 1*100 = 100; \qquad {}_tI_t^P = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{it}Q_{it}} * 100 = 1*100 = 100; $$

Proprietà della omogeneità

Sia la formula di Laspeyres che quella di Paasche verificano tale condizione. Infatti:

$$ {}_xI_t^L = \frac{\sum_{i=1}^n P'_{ix}Q_{ix}}{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{ix}} * 100 = \frac{\sum_{i=1}^n aP_{ix}Q_{ix}}{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{ix}} * 100 = a\frac{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{ix}}{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{ix}} * 100 = a\,{}_xI_t^L $$

$$ {}_xI_t^P = \frac{\sum_{i=1}^n P'_{it}Q_{ix}}{\sum_{i=1}^n P_{it}Q_{ix}} * 100 = \frac{\sum_{i=1}^n aP_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{it}Q_{ix}} * 100 = a\frac{\sum_{i=1}^n P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{it}Q_{ix}} * 100 = a\,{}_xI_t^P $$

Le due formule portano allo stesso risultato se tutte le valutazione subiscono una modifica moltiplicativa rispetto alla valutazione base

Se tutti gli indici elementari aumentano del 2% anche quello sintetico aumenta del 2%

Un aumento del 2% nel sintetico non dà alcuna indicazione su quello che succede negli elementari se non che è prevalso l'aumento.

Proprietà della monotonicità

Trattandosi di medie aritmetiche ponderate verificano certamente la proprietà di monotonicità. Infatti:

$$ \frac{\partial L\left({}_tI_x^{(L)}\right)}{\partial\, {}_xI_t^i} = \frac{P_{ix}Q_{ix}}{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{ix}} > 0 \qquad \frac{\partial L\left({}_tI_x^{(P)}\right)}{\partial\, {}_xI_t^i} = \frac{P_{ix}Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{ix}Q_{it}} > 0 $$

Nella formula di Laspeyres l'effetto è prevedibile a priori in quanto il peso è prefissato;

Nella formula di Paasche dipende dal livello raggiunto dalle quantità dell'occasione corrente. Non può essere prestabilito, ma va appurato di volta in volta.

Confronto Paasche - Laspeyres (valutazioni)

Formula di Laspeyres

La struttura dei pesi è fissa (stabilità)

$$\frac{\partial L\left({}_tI_x^{(L)}\right)}{\partial\, {}_xI_t^i} = \frac{P_{ix}Q_{ix}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{ix}}$$

Si aggiorna rilevando solo i nuovi prezzi

E' poco significativo per occasioni lontane dalla base (a meno di cambiare base)

Produce valori più alti in fase di aumento dei prezzi e valori più bassi in fase di calo dei prezzi

Tende a sovrastimare gli aumenti di prezzo

(tendenziosità positiva)

Formula di Paasche

La struttura dei pesi varia (dinamicità)

$$\frac{\partial L\left({}_tI_x^{(P)}\right)}{\partial\, {}_xI_t^i} = \frac{P_{ix}Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{it}}$$

Si aggiorna rilevando i nuovi prezzi e le nuove quantità

Il cambiamento della base produce risultati approssimativi

Produce valori più bassi in fase di aumento dei prezzi e valori più alti in fase di calo dei prezzi

Tende a sottostimare gli aumenti di prezzo

(tendenziosità negativa)

Esempio

Beni	Occasione 1		Occasione 2	
	Quantità	Prezzo	Quantità	Prezzo
A	40	10	35	12
B	80	15	75	16
C	20	7	15	10
D	27	35	25	40

Sviluppiamo le due formule per l'occasione "1" in base occasione "2".

$$\sum P_{i1}Q_{i1} = 2685;\quad \sum P_{i2}Q_{i2} = 2770;\quad {}_2I_1^L = 88.63$$

$$\sum P_{i2}Q_{i1} = 3040;\quad \sum P_{i1}Q_{i2} = 2455;\quad {}_2I_1^P = 108.32$$

Nel passare dalla "2" alla "1" si ha una diminuzione del valore complessivo (da 2'770 a 2'685) che è dovuta soprattutto ad una diminuzione dei prezzi (le quantità all'occasione 2 sono costate 2'770 con i prezzi correnti con un costo di 2'455 se fossero state acquistate ai prezzi della "1").

Formula di Laspeyres per le quantità

La formula di Laspeyres è altrettanto utile quando si configura come una media aritmetica ponderata degli indici elementari di quantità

$${}_tI_x^{(L*)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Q_{it}}{Q_{ix}}\right) * P_{it}Q_{ix}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{ix}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{ix}}$$

L'unica differenza è nel numeratore che ora moltiplica le quantità correnti per i prezzi della base:

Valore del paniere di oggi se fosse valutato ai prezzi di allora rapportato al valore complessivo di allora.

Serve per costruire indici della produzione, del fatturato, della criminalità, etc.

Formula di Paasche per la quantità

La formula di Paasche è altrettanto utile quando si configura come una media aritmetica ponderata delgi indici elementari di quantità

$${}_tI_x^{(P*)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Q_{ix}}{Q_{it}}\right) * P_{it}Q_{it}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{ix}}$$

La sola differenza è nel denominatore che ora moltiplica le quantità base per i prezzi correnti invece delle quantità correnti per i prezzi base.

Valore del paniere di oggi se fosse rapportato al valore del paniere composto con le quantità base, ma valutate ai prezzi attuali

Relazione tra Laspeyres e Paasche

E' dovuta a von Bortkiewicz

$$\frac{{}_tI_x^{(P)}}{{}_tI_x^{(L)}} = \frac{{}_tI_x^{(P*)}}{{}_tI_x^{(L*)}} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{ix}}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{ix}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{ix}} * \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{ix}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{it}} =$$

dove ρ è il coefficiente di correlazione tra gli indici semplici dei prezzi e gli indici semplici delle quantità. σ_p è lo scarto quadratico medio dei primi e σ_q quello dei secondi.

$$= 1 + \rho * \frac{\sigma_p}{{}_tI_x^{(L)}} * \frac{\sigma_q}{{}_tI_x^{(L*)}}$$

Quindi la formula di Paasche dà un valore superiore o inferiore a quella di Laspeyres secondo che la correlazione tra prezzi e quantità sia positiva o negativa.

Coincidono se ρ=0.

Formule miste

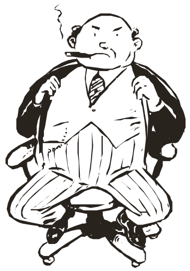
Le formule di Laspeyres e Paasche generano a loro volta due altri schemi che sono però molto meno usati:

$$Fisher: {}_xI_t^F = \sqrt{{}_xI_t^P \; {}_xI_t^L}; \quad Sidgwick: {}_xI_t^S = \frac{{}_xI_t^P + {}_xI_t^L}{2};$$

$$Edgeworth - Marshall - Bowley: \frac{{}_xI_t^L * \sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{ix} + {}_xI_t^L \sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{ix} + \sum_{i=1}^{n} P_{ix}Q_{it}}$$

Tutte queste formule sono delle medie (geometrica, aritmetica e ponderata) di Paashe e Laspeyres per cui da esse ci si attendono dei valori intermedi (proprietà della internalità delle medie) tra i due indici.

Settimana borsistica



L'indice di Fisher fu definito "ideale" perché verifica la reversibilità delle basi e compensa le opposte tendenziosità.

Tuttavia, a causa delle difficoltà di aggiornamento, non ha avuto applicazioni estensive.

L'indice EMB (Marshall-Edgeworth-Bowley) tiene conto delle quantità del periodo base e del periodo corrente e ciò è utile se i cambiamenti sono drastici.

Epoca	Vt=∑PitQit	∑PixQit	∑PitQix	Laspeyres	Paasche	Fisher	E.M.B.
15-04-1985	361'640.0	339'699.0	375'048.6	106.35	106.46	106.40	106.40
16-04-1985	370'746.3	358'577.4	364'462.3	103.35	103.39	103.37	103.36
17-04-1985	357'448.0	360'614.6	347'498.0	98.54	99.33	98.93	99.93
18-04-1985	350'734.8	351'642.4	351'769.4	99.75	99.74	99.74	99.75
19-04-1985	352'646.6	352'646.6	352'646.6	100.00	100.00	100.00	100.00

Non esistono differenze apprezzabili tra le varie formule e questo è un segno della stabilità dello scambio nel periodo studiato.

Metodo dell'occasione tipica (Lowe)

Invece di ponderare le valutazioni con le quantità vase (Laspeyres) o con quelle correnti (Paasche) si pondera con delle quantità fittizie o standard.

$${}_tI_x^{(S)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{is}}{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{is}}$$

dove le Q_{is} sono le quantità fittizie. Ad esempio la media aritmetica

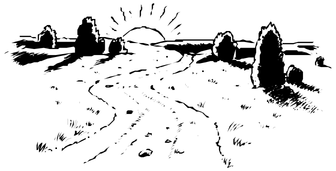
$$Q_{is} = \frac{\sum_{j=x}^{t} Q_{ij}}{t - x + 1}$$

L'indice MEB è un caso particolare della formula dsi Lowe: le quantità standard sono ottenute come semisomma delle quantità bae e di quelle correnti.

Esempio

Di seguito si riporta la tabella su prezzi e quantità di alcuni cereali in tre periodi significativi.

	Anno 1986		Anno 1987		Anno 1988	
Cereali	Prezzi	Quantità	Prezzi	Quantità	Prezzi	Quantità
Grano	2.00	1 019	2.18	935	2.25	900
Orzo	1.32	21	1.06	28	0.95	35
Riso	5.09	39	4.80	56	4.50	60
Avena	1.11	40	1.17	35	1.15	36
Sorgo	1.05	234	1.00	230	1.10	220



Calcoliamo il numero indice dei prezzi - metodo dell'occasione tipica baase 1986- adottando per quantità le medie aritmetiche delle quantità sui tre anni.

$$ {}_{86}I_{87}^{(T)} = 105.62 $$

$$ {}_{86}I_{88}^{(T)} = 108.44 $$

Cereali	1986 Prezzi	1987 Prezzi	1988 Prezzi	Quantità standard
Grano	2.00	2.18	2.25	$\frac{1019+935+900}{3} = 952$
Orzo	1.32	1.06	0.95	$\frac{21+28+35}{3} = 28$
Riso	5.09	4.80	4.50	$\frac{39+56+60}{3} = 52$
Avena	1.11	1.17	1.15	$\frac{40+35+36}{3} = 37$
Sorgo	1.05	1.00	1.10	$\frac{234+230+220}{3} = 228$

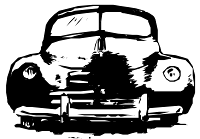
Scelta del paniere

Ci si può limitare ad una selezione di prodotti più rappresentativi, cioè scelti tra quelli le cui variazioni di danno una chiara indicazione sul senso e sulla grandezza delle variazioni subite da prodotti dello stesso genere (prodotti leader).

Occorre inoltre che i prodotti scelti siano facilmente individuabili e che presentino caratteristiche merceologiche e commerciali uniformi nel tempo e nello spazio.

Il progresso tecnico che elimina dal mercato prodotti obsoleti e ne introduce di nuovi porta spesso a rivedere la composizione del paniere.

Tali variazioni sono indispensabili per tenere dietro all'evolversi, sempre più rapido, dei gusti e quindi dei consumi. però le scelte non sono senza conseguenze e vanno chiarite e motivate.



Esempio

PRODOTTI CHE ESCONO, PRODOTTI CHE ENTRANO

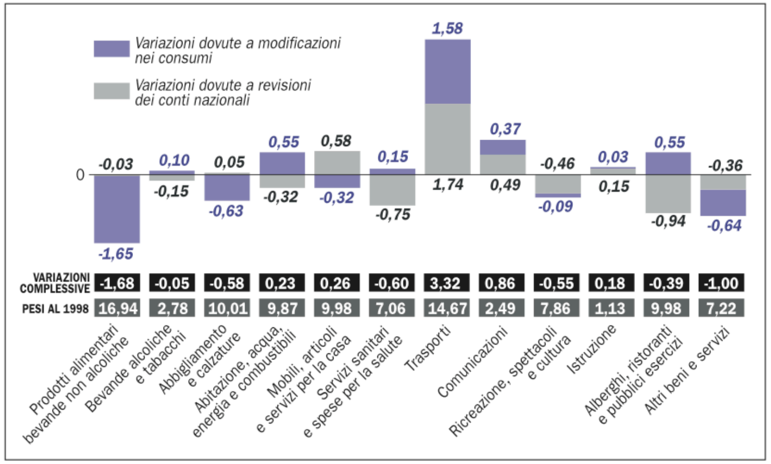
Prodotti eliminati e inseriti nel paniere utilizzato per il calcolo degli indici dei prezzi al consumo

ESCONO		ENTRANO
	PRODOTTI ALIMENTARI E BEVANDE NON ALCOLICHE	
■ Camomilla ■ Omogeneizzati di frutta ■ Cognac ■ Risotto surgelato ■ Pastine dietetiche ■ Miele ■ Fichi secchi		■ Pizza surgelata ■ Tortellini ■ Wurstel ■ Cereali per colazione ■ Ovetto di cioccolata
	ABBIGLIAMENTO E CALZATURE	
■ Fazzoletti ■ Sottoveste ■ Cappello uomo		
	MOBILI, ARTICOLI E SERVIZI PER LA CASA	
■ Fornello camping ■ Mollette per panni		■ Pentola a pressione ■ Forno a microonde ■ Condizionatore d'aria ■ Tavolo da pranzo ■ Divano ■ Colonna libreria ■ Specchio da bagno ■ Colonna da bagno ■ Lampada da terra ■ Riparazione mobili ■ Ammorbidente ■ Piatti usa e getta ■ Tovaglioli di carta ■ Lavaggio trapunta matrimoniale
	SERVIZI SANITARI E SPESE PER LA SALUTE	
■ Lastra al torace ■ Iniezione intramuscolare		■ Prestazione di pedicure o podologo ■ Ecografia ■ Fisioterapia ■ Lenti a contatto usa e getta
	TRASPORTI	
■ Tappetini auto		■ Riparazione auto – sostituzione paraurti anteriore ■ Riparazione auto – sostituzione e verniciatura portiera
	RICREAZIONE, SPETTACOLI E CULTURA	
■ Tenda da campeggio a 5 posti		■ Modem ■ Abbonamento ad internet ■ Noleggio videocassetta ■ Videocamera ■ Tosaerba ■ Floppy disk ■ Corso di danza ■ Corso di nuoto ■ Ingresso in discoteca ■ Spettacolo teatrale non lirico ■ Abbonamento a partita di calcio ■ Giochi elettronici ■ Attrezzo per body building ■ Equipaggiamento subacqueo ■ Carta per fotocopie ■ Zaino scolastico ■ Visita veterinaria ■ Toletta per cani
	ALBERGHI, RISTORANTI E PUBBLICI ESERCIZI	
■ Camera albergo (generico)		■ Pasto al fast-food ■ Camera albergo (cat. 4-5 stelle) ■ Camera albergo (cat. 3 stelle) ■ Camera albergo (cat. 2 stelle) ■ Camera albergo (cat. 1 stella)
	ALTRI BENI E SERVIZI	
■ Rasoio elettrico		■ Assicurazione moto e motocicli ■ Assorbenti igenici ■ Frequenza ad asilo nido

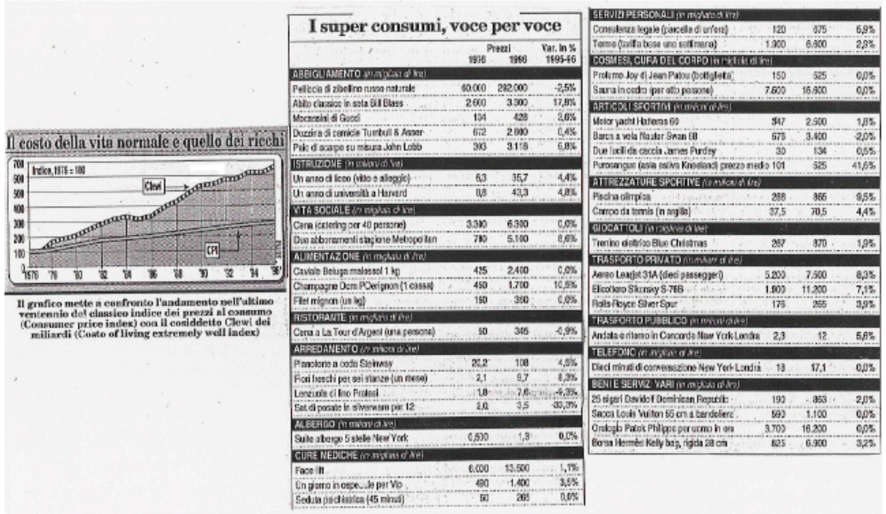
Esempio: continua

COME CAMBIANO I PESI DELL'INDICE NIC

Variazioni dei pesi dei capitoli di spesa dell'indice NIC fra il 1995 e il 1998 (valori percentuali)



Superconsumi



Il costo della vita normale e quello dei ricchi

Il grafico mette a confronto l'andamento nell'ultimo ventennio del classico indice dei prezzi al consumo (Consumer price index) con il cosiddetto Clewi dei miliardi (Costo of living extremely well index)

I super consumi, voce per voce

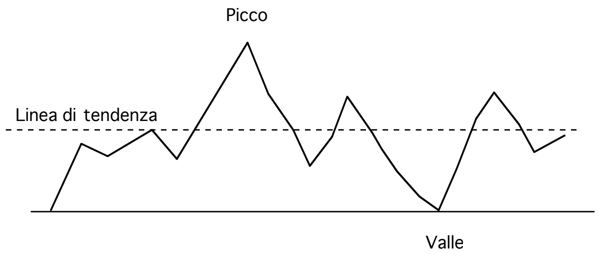
	Prezzi 1976	Prezzi 1996	Var. in % 1995-96
ABBIGLIAMENTO *(in migliaia di lire)*			
Pelliccia di zibellino russo naturale	60.000	292.000	-2,5%
Abito classico in seta Bill Blass	2.600	3.300	17,8%
Mocassini di Gucci	134	428	3,6%
Dozzina di camicie Turnbull & Asser	672	2.000	0,4%
Paio di scarpe su misura John Lobb	393	3.118	6,8%
ISTRUZIONE *(in milioni di lire)*			
Un anno di liceo (vitto e alloggio)	6,3	35,7	4,4%
Un anno di università a Harvard	8,8	43,3	4,8%
VITA SOCIALE *(in migliaia di lire)*			
Cena (catering per 40 persone)	3.390	6.390	0,0%
Due abbonamenti stagione Metropolitan	780	5.100	8,6%
ALIMENTAZIONE *(in migliaia di lire)*			
Caviale Beluga malossol 1 kg	425	2.400	0,0%
Champagne Dom Pérignon (1 cassa)	450	1.700	10,6%
Filet mignon (un kg)	150	380	0,0%
RISTORANTE *(in migliaia di lire)*			
Cena a La Tour d'Argent (una persona)	50	345	-0,9%
ARREDAMENTO *(in milioni di lire)*			
Pianoforte a coda Steinway	20,2	108	4,5%
Fiori freschi per sei stanze (un mese)	2,1	9,7	8,3%
Lenzuola di lino Pratesi	1,8	7,6	-6,3%
Set di posate in silverware per 12	2,0	3,5	-33,3%
ALBERGO *(in milioni di lire)*			
Suite albergo 5 stelle New York	0,500	1,3	0,0%
CURE MEDICHE *(in migliaia di lire)*			
Face lift	6.000	13.500	1,1%
Un giorno in ospedale per Vip	490	1.400	3,5%
Seduta psichiatrica (45 minuti)	50	265	0,0%
SERVIZI PERSONALI *(in migliaia di lire)*			
Consulenza legale (parcella di un'ora)	120	675	6,9%
Terme (tariffa base una settimana)	1.900	6.600	2,9%
COSMESI, CURA DEL CORPO *(in migliaia di lire)*			
Profumo Joy di Jean Patou (bottiglietta)	150	525	0,0%
Sauna in cedro (per otto persone)	7.600	16.600	0,0%
ARTICOLI SPORTIVI *(in milioni di lire)*			
Motor yacht Hatteras 60	347	2.500	1,8%
Barca a vela Nautor Swan 68	575	3.400	-2,0%
Due fucili da caccia James Purdey	30	134	0,5%
Purosangue (asta estiva Keeneland) prezzo medio	101	525	41,6%
ATTREZZATURE SPORTIVE *(in milioni di lire)*			
Piscina olimpica	288	865	9,5%
Campo da tennis (in argilla)	37,5	70,5	4,4%
GIOCATTOLI *(in migliaia di lire)*			
Trenino elettrico Blue Christmas	267	870	1,9%
TRASPORTO PRIVATO *(in milioni di lire)*			
Aereo Learjet 31A (dieci passeggeri)	5.200	7.500	8,3%
Elicottero Sikorsky S-76B	1.900	11.200	7,1%
Rolls-Royce Silver Spur	175	265	3,9%
TRASPORTO PUBBLICO *(in milioni di lire)*			
Andata e ritorno in Concorde New York-Londra	2,3	12	5,6%
TELEFONO *(in migliaia di lire)*			
Dieci minuti di conversazione New York-Londra	18	17,1	0,0%
BENI E SERVIZI VARI *(in migliaia di lire)*			
25 sigari Davidoff Dominican Republic	190	863	2,0%
Sacca Louis Vuitton 65 cm a bandoliera	590	1.100	0,0%
Orologio Patek Philippe per uomo in oro	3.700	16.200	0,0%
Borsa Hermès Kelly bag, rigida 28 cm	825	6.900	3,2%

Scelta della base

Conviene assumere come occasione base quella in cui il fenomeno studiato presenti una intensità "normale" cioè non un valore di picco né un valore di valle.

Non sempre è possibile seguire questo suggerimento: se la serie considerata è inserita in un gruppo di altre serie, la comodità di disporle su di una base comune potrebbe portare ad una scelta inadatta per qualcuna di esse.

La base non può essere mantenuta troppo a lungo: occorre talvolta tenere conto di eventi eccezionali esterni, oppure di esasperazioni interne che possono modificare profondamente le condizioni di rilevazione: iperinflazione, catastrofi naturali, turbolenze gravi sui mercati valutari, etc.



Cambiamento della base-indici sintetici

La modifica della base comporta la revisione del sistema di pesi su cui si basano gli indici sintetici. Infatti il passaggio

$$ {}_xI_t^{(S)} = \sum_{i=1}^{n} W_{ix} * {}_xI_t^{(i)} \quad \Rightarrow \quad {}_yI_t^{(S)} = \sum_{i=1}^{n} W_{iy} * {}_yI_t^{(i)} $$

Si effettua applicando ad ogni numero indice elementare uno specifico coefficiente di raccordo

$$ c_{L,i}(x,y) = \frac{p_{yi} q_{yi}}{p_{yi} q_{xi}}, \; i = 1,\ldots,n, \quad c_{P,i}(x,y) = \frac{p_{xi}}{p_{yi}} = \frac{100}{{}_xI_y^i}, \quad i = 1,\ldots,n $$

Moltiplicando poi l'intero indice per il rapporto tra i valori fittizi delle due basi

$$ K_L(x,y) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ix} q_{ix}}{\sum_{i=1}^{n} p_{iy} q_{iy}} \right] \qquad K_P(x,y) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ix} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{iy} q_{it}} \right] $$

Da notare che se i pesi rimanessero costanti si potrebbe effettuare il cambiamento di base operando sui soli indici elementari

Cambiamento della base indici sintetici/2

Nella formula di Laspeyres implica una radicale revisione dei pesi

$$ {}_yI_t^{(L)} = K_L(x,y) \sum_{i=1}^{n} c_{L,i}(x,y) \left({}_xI_t^i \right) $$

questo vale anche per l'indice di Paasche, anche se le conseguenze sono meno rilevanti poiché i pesi già cambiano da periodo a periodo

$$ {}_yI_t^{(P)} = K_P(x,y) \sum_{i=1}^{n} c_{P,i}(x,y) \left({}_xI_t^i \right) $$

Verificate la considerazione sui seguenti dati scegliendo come prima base l'occasione "1" per poi passare alla base "2"

Beni	Occasione 1		Occasione 2		Occasione 3	
	Q.	P.	Q.	P.	Q.	P.
A	121	110	128	120	125	115
B	22	770	27	760	31	780
C	874	430	927	440	966	410

Tavola Istat coefficienti di raccordo

PREZZI AL CONSUMO

Tav. 13-6 — Numeri indici per le famiglie di operai e impiegati (a)

Medie e indici mensili - Serie ricostruita con la classificazione 1995

Periodi		Indice generale	Alimentazione	Abbigliamento calzature	Abitazione acqua elettricità combustibili	Mobili arredi e servizi per la casa	Servizi sanitari e spese per la salute	Trasporti	Ricreazione spettacoli e cultura	Istruzione	Alberghi caffè e ristoranti	Altri beni e servizi
		Base: 1992 = 100										
1995	MEDIA	114,1	111,8	111,0	115,2	112,2	106,8	125,7	109,9	113,2	115,7	115,1
1995	Gen	110,7	108,6	108,8	114,6	109,1	107,8	116,3	107,4	109,1	113,4	111,6
	Feb	111,6	109,2	108,9	114,8	110,2	107,3	116,0	107,0	109,5	114,5	112,0
	Mar	112,3	110,1	109,4	116,5	110,4	105,4	120,1	105,1	110,2	115,5	113,2
	Apr	113,1	110,9	110,3	117,7	110,7	105,6	120,9	105,4	110,6	116,1	113,5
	Mag	113,5	111,7	110,5	118,1	111,4	105,5	121,7	109,1	111,3	116,6	114,3
	Giu	114,4	112,3	110,9	118,2	112,1	107,0	123,2	108,8	112,1	116,8	115,9
	Lug	114,5	112,2	111,0	118,7	112,3	107,1	123,3	109,2	112,7	117,2	116,2
	Ago	114,9	112,4	111,4	118,8	113,2	107,0	124,0	109,8	112,9	117,4	116,4
	Set	115,2	112,8	111,3	119,9	113,8	107,2	124,3	110,1	115,2	117,7	116,5
	Ott	115,8	113,3	112,4	123,1	113,6	107,5	124,7	110,4	117,6	118,1	116,7
	Nov	115,3	113,5	110,1	123,5	114,8	107,5	125,8	111,1	118,1	118,4	117,0
	Dic	115,7	113,6	110,3	123,9	114,9	107,5	125,8	111,0	118,3	118,5	117,3
		COEFFICIENTI DI RACCORDO TRA LA BASE 1992 = 100 E LA BASE 1995 = 100										
		1,141	1,118	1,110	1,182	1,122	1,068	1,224	1,053	1,182	1,167	1,151
		BASE 1995 = 100										
1996	Gen	102,4	102,3	102,5	103,0	102,3	102,0	102,6	102,0	103,2	104,2	107,1

Gli indici dei prezzi al consumo

il procedimento di costruzione è complesso: parte da una scelta ragionata di beni e servizi che rimane fissa per un certo tempo.

Su questi si rilevano prezzi e quantità vigenti su una scelta di punti vendita per una selezione di comuni e province.

L'aggregazione degli indici semplici di prezzo per area, merce, consumatori fornisce il valore finale dell'indice sintetico

L'avvertenza generale è che con tali indici non si misura l'andamento del costo della vita, ma solo una sua grossolana approssimazione .

Il costo della vita dipende da molti ed importanti fattori che non sempre appaiono in forma di merci e di prezzi ovvero in una struttura fissa di consumi

Gli indici dei prezzi al consumo

Tra gli indici più importanti che l'ISTAT è tenuto a calcolare vi sono:

- **L'indice dei prezzi al consumo per l'intera collettività nazionale**
- **L'indice dei prezzi al consumo per le famiglie di operai ed impiegati**
- **L'indice del costo della vita (scala mobile)**

La differenza tra i primi due è che dal secondo sono esclusi i lavoratori dipendenti non agricoli.

Inoltre il primo è rilevato in tutti i capoluoghi di provincia mentre il secondo solo in 20.

Il terzo indice è la base per aggiornare prestiti, adeguare salari e stipendi, etc. E' ormai in disuso

Riferimento

Sinossi di alcuni numeri indice sintetici elaborati dall'Istat

Fenomeni	Dati di base	Raggruppamenti	Calcoli: Fasi	Calcoli: Formule
		1 - Indici dei prezzi		
		1.1 - All'ingrosso (1950 = 100; mensile)		
Prezzi relativi alle transazioni commerciali tra imprese.	Campione ragionato di 375 prodotti venduti nei mercati più rappresentativi.	Per settori e branche produttive. Per utilizzazione dei prodotti.	Indici elementari per ciascuna varietà di prodotto e per piazza; Idem per varietà di prodotto, ma a livello nazionale. Idem per ciascun prodotto, a livello nazionale; Indici sintetici per branca produttiva ed utilizzazione dei prodotti; Indice generale nazionale.	Rapporto di prezzi; Media aritmetica semplice; Idem c.s.; Media aritmetica ponderata tipo Laspeyres; Idem c.s.
		1.2 - Alla produzione (1980 = 100; mensile)		
Prezzi relativi alle transazioni tra produttori industriali e le altre unità economiche.	Campione ragionato di 1.400 prodotti; Campione di 3.100 imprese industriali.	Per categorie di prodotti; Per branche produttive.	Indici elementari per ciascun prodotto e impresa; Indici elementari nazionali per ciascun prodotto; Indici sintetici per categorie di prodotti; Indici sintetici per branca produttiva; Indice generale nazionale.	Rapporto di prezzi; Media aritmetica semplice; Media aritmetica ponderata tipo Laspeyres; Idem c.s.; Idem c.s.
		1.3 - Al consumo per l'intera collettività nazionale (1985 = 100; annuale)		
Prezzi relativi alle transazioni tra imprese e famiglie.	Campione ragionato di 878 beni e servizi osservati in un campione di punti di vendita ubicati nei capoluoghi di provincia.	Per territorio; Per classi o funzioni di consumo.	Indici elementari per ciascun bene e servizio per ogni capoluogo di provincia;	Media aritmetica semplice dei prezzi nei singoli punti di vendita e successivo rapporto tra prezzi medi;

Riferimento/2

Sinossi di alcuni numeri indice sintetici elaborati dall'Istat

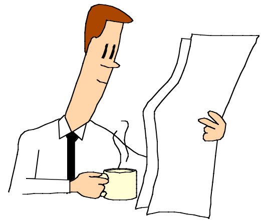
Fenomeni	Dati di base	Raggruppamenti	Calcoli: Fasi	Calcoli: Formule
			Indici elementari per regione;	Media aritmetica ponderata tipo Laspeyres;
			Indici elementari nazionali;	*Idem* c.s.;
			Indici sintetici per classi di consumo;	*Idem* c.s.;
			Indice generale nazionale.	*Idem* c.s.
1.4 - Al consumo per le famiglie di operai e impiegati (1989 = 100, mensile)				
Prezzi relativi alle transazioni tra imprese e famiglie di lavoratori dipendenti non agricoli.	Campione ragionato di 336 beni e servizi osservati in un campione di punti di vendita nei capoluoghi di provincia.	Per capoluogo di provincia;	Indici elementari per ciascun bene o servizio per ogni capoluogo di provincia;	Media aritmetica semplice dei prezzi nei punti di vendita e successivo rapporto tra prezzi medi;
		Per categorie e capitoli di spesa.	Indici sintetici per capitoli di spesa per ogni capoluogo di provincia;	Media aritmetica ponderata tipo Laspeyres;
			Indice generale per ogni capoluogo di provincia;	*Idem* c.s.;
			Indici sintetici per categorie e capitoli di spesa a livello nazionale;	*Idem* c.s.;
			Indice generale nazionale.	*Idem* c.s.

Notizie sull'indice dei prezzi

Sui "media" le notizie sull'inflazione riguardano quasi sempre l'indice mensile dei prezzi al consumo per l'intera collettività nazionale

Variazione percentuale rispetto al mese precedente

$$\Delta_t = \left(\frac{{}_xI_t^{(L)}}{{}_xI_{t-1}^{(L)}} - 1 \right) * 100$$



Esempio:

Mese	Indice	Var.perc	Var.Ass.
Gennaio	102,31		
Febbraio	102,76	0,44	0,45
Marzo	102,92	0,16	0,16
Aprile	103,34	0,41	0,42
Maggio	103,79	0,44	0,45

In molti casi la controversia se applicare la variazione percentuale o quella assoluta dell'indice è stata risolta in tribunale

Notizie sull'indice dei prezzi/2

Tasso tendenziale di inflazione

$$\partial_t = \left(\frac{{}_xI_t^{(L)}}{{}_xI_{t-12}^{(L)}} - 1 \right) * 100$$

Variazione percentuale dell'indice rispetto al corrispondente mese dell'anno precedente.

ANNO	Mese	Indice	1994	Mese		Var.perc	Var.Ass.
1993	Gennaio	102,31		Gennaio	106,66		
	Febbraio	102,76		Febbraio	107,03	4,16	4,27
	Marzo	102,92		Marzo	107,28	4,24	4,36
	Aprile	103,34		Aprile	107,55	4,07	4,21
	Maggio	103,79		Maggio	107,93	3,99	4,14

Il tasso tendenziale risente molto degli effetti stagionali e di shock contingenti che possono variare notevolmente da un mese all'altro

Notizie sull'indice dei prezzi/3

Tasso medio di inflazione

$$\delta_t = \left(\frac{{}_xI_t^{(L)}}{\sum_{i=1}^{k} {}_xI_{t-13+i}^{(L)} \Big/ 12} - 1 \right) * 100$$

Variazione percentuale rispetto al valor medio dell'indice calcolato per i 12 mesi (a volte 24) precedenti quello in corso

Mese		Var.perc	Var.Ass.
Gennaio	106,66	1,18	1,24
Febbraio	107,03	1,53	1,61
Marzo	107,28	1,76	1,86
Aprile	107,55	2,02	2,13
Maggio	107,93	2,38	2,51
Media '93	105,42		

Il tasso medio, basato su di una media annuale (o biennale) è poco sensibile a fattori stagionali e congiunturali. E' più affidabile, ma meno diretto

Deflazione delle serie monetarie

Serve per seguire l'evoluzione del valore di un prodotto riferendosi solo alle quantità fisiche e non ai cambiamenti del prezzo:

SERIE A PREZZI COSTANTI ovvero le SERIE DEFLAZIONATE o IN TERMINI REALI

per fare questo occorre usare sempre lo stesso prezzo

Anno	Quantità	Prezzo Panino	Incasso P.Cor.	N.I.P. 1985=100	Incasso P.Cos.
1985	7000	700	4,900,000.00	100	4,900,000
1990	8200	1050	8,610,000.00	150	5,740,000
1995	9500	1400	13,300,000.00	200	6,650,000

Gli incassi nominali tra l'85 ed il '95 sono quasi triplicati, ma i prezzi correnti sono raddoppiati. Quanta parte dell'incasso è un aumento effettivo?

Dobbiamo eliminare l'influenza del cambiamento dei prezzi ovvero uniformare la valutazione delle quantità nel corso del tempo.

Formule per la deflazione

Data la serie numeraria a "prezzi correnti"

$$V_t = P_t Q_t$$

espressa cioè nei prezzi del periodo "t".

Per passare alla serie con valutazioni costanti, "x", occorre moltiplicare per il deflattore (reciproco dell'indice dei prezzi x 100)

$$V_t' = Vt^*\frac{100}{xIt} \quad = \cancel{Pt^*}Qt^*\frac{\cancel{100}^*Px}{\cancel{Pt^*100}} \quad = PxQt$$

Dove

V_t' **Serie deflazionata**

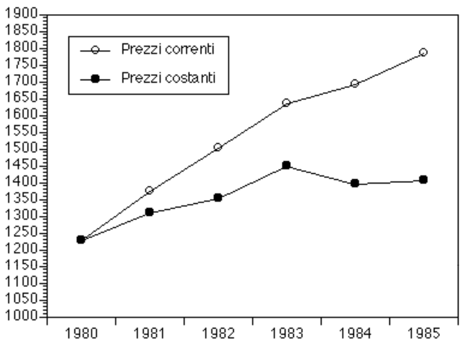
$\frac{100}{xIt}$ **Deflattore**

Conoscendo l'indice dei prezzi si possono riportare tutte le valutazioni ad una stessa epoca

Esempio

il direttore dell'ufficio vendite ha richiesto la serie del valore venduto depurata da effetti inflazionistici. L'ufficio addetto dispone delle informazioni seguenti:

Anno	Vendite Pre. Cor.	Costo della vita	Vendite Pre. Cos.
1980	1228	100	1228
1981	1374	105	1309
1982	1501	111	1352
1983	1635	113	1447
1984	1691	122	1396
1985	1784	127	1407



I calcoli non sono complessi e si realizzano con il foglio elettronico.

Anche il grafico può essere così ottenuto

il grafico mostra che l'inflazione ha nascosto l'aumento dell'83 ed il trend decrescente dopo tale data.
Se si riprendono le corrette ragioni di scambio l'andamento reale delle vendite è subito evidente

Deflazione di serie aggregate

Se D_t è il valore di un aggregato a prezzi "x" e V_t è il valore a prezzi "t" si ha:

$$D_t = V_t \frac{\left({}_x J_t^L\right)}{\left({}_x I_t^V\right)} = \left(\sum_{i=1}^{n} P_{it} Q_{it}\right)\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} P_{ix} Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ix} Q_{ix}}\right]\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} P_{ix} Q_{ix}}{\sum_{i=1}^{n} P_{it} Q_{it}}\right] = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} Q_{it}$$

il deflattore corrisponde al Laspeyres delle quantità diviso per l'indice del valore.

Se fosse noto il Paasche per i prezzi la deflazione sarebbe facile:

$$D_t = \frac{V_t}{\left({}_x I_t^P\right)} = \left(\sum_{i=1}^{n} P_{it} Q_{it}\right)\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} P_{ix} Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{it} Q_{it}}\right] = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} Q_{it}$$

Non è necessario conoscere le quantità correnti:bastano quelle dell'epoca base.

Questo schema si può usare con la formula di Laspeyres qualora i due indici fossero ritenuti molto prossimi.

Rivalutazione di prestiti

Un uso importante dei numeri indici è la rivalutazione monetaria che talvolta viene richiesta a tutti coloro che sono debitori di somme di denaro per evitare ai creditori il danno dovuto al diminuito potere d'acquisto.

Esempio

il 2/86 si è chiesto un prestito di 5 milioni da restituire nel 9/92 a potere d'acquisto invariato (senza interessi).

Per stimare l'importo occorre conoscere il numero indice dei prezzi al consumo per l'intera collettività nazionale.

Se tale indice fosse disponibile in base '86 il calcolo sarebbe immediato.

$$D = 5000000 * \frac{{}_{86}I_{92}}{100} \longleftarrow \text{Reciproco del deflattore perchè si va all'indietro}$$

$${}_{86}I_{92} = 107.23 \Rightarrow D = 5000000 * \frac{107.23}{100} = 5361500$$

Rivalutazione dei prestiti/2

Non sempre l'indice lo si ha alla base voluta. Supponiamo che sia in base '80

$${}_{80}I_{86} = 105.28; \qquad {}_{80}I_{92} = 119.61$$

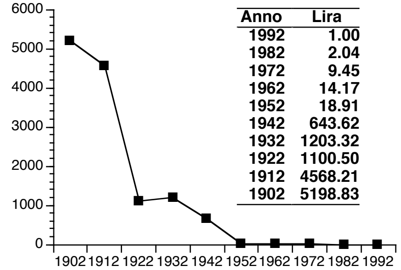
Raccordo tra le basi: $${}_{80}I_{92}^{pc} * \frac{100}{{}_{80}I_{86}^{Pc}} \cong {}_{86}I_{92}^{Pc} = 119.61 * \frac{100}{105.28} = 113.61$$

Importo rivalutato: $$D = 500000\frac{113.61}{100} = 5680500$$

il deflattore derivato dall'indice dei prezzi al consumo (famiglie di operai e impiegati) è anche noto come "Potere di acquisto della lira"

Una lira del 1992 vale quasi 19 lire del 1952 ovvero una lira del 1952 varrebbe 19 lire nel 1992

Tali valutazioni non sono esatte, ma danno un'idea abbastanza corretta delle modifiche negli stili di vita



Anno	Lira
1992	1.00
1982	2.04
1972	9.45
1962	14.17
1952	18.91
1942	643.62
1932	1203.32
1922	1100.50
1912	4568.21
1902	5198.83

Rivalutazione dei prestiti/3

Si supponga che, nel 2003, si debba adeguare all'aumento del costo della vita un canone di 210 euro dell'agosto 2001.

Per ottenere il nuovo canone bisogna recuperare gli indici per i due anni e supponiamo che siano disponibili in base 2000

$${}_{00}I_{03}^{PC} = 112.2; \quad {}_{00}I_{01}^{PC} = 116.7$$

Per costruire l'indice base 2000 per il 2001, necessario per deflazionare, si deve effettuare il cambio di base

$${}_{03}I_{01}^{PC} \cong {}_{00}I_{01}^{PC}\left[\frac{100}{{}_{00}I_{03}^{PC}}\right] = 112.2 * \left[\frac{100}{116.7}\right] = 95.2916.$$

Il potere di acquisto tra il 2001 e il 2003 si è ridotto del 4.71%. La legge dell'equo canone riconosce il diritto a recuperare fino al 75% cioè per una percentuale non superiore a 0.75*0.0471=3.75%. Se si opta per la quota massima consentita, l'affitto sarà: 1.0375*210=217.88 euro.