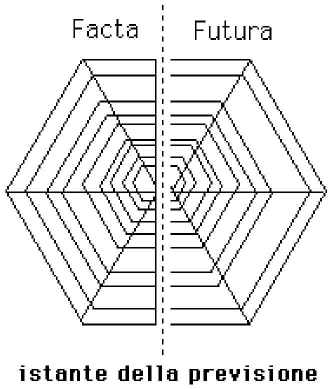
Concetto di previsione

Immagino il sistema degli eventi, passati e futuri, come una ragnatela. Se la si tocca in un punto ci saranno reazioni moltiplicative in tutti i fili



Alcune linee di reazione sono note, altre possono essere documentate, altre sono ipotizzabili, altre ancora sono sconosciute e tali rimarranno fino a che la conoscenza del sistema non sarà completa.

Il concetto della previsione da noi adottato è che il sistema degli eventi futuri sia un complemento di quello del passato e che attraverso la conoscenza delle reazioni in questo sia possibili stabilire le reazioni sui fili del futuro

Possibilità e limiti delle previsioni

Distinguiamo gli eventi in due tipi

FACTA - avvenimenti che si collocano nel passato

FUTURA- avvenimenti che si collocano nell'avvenire

Il loro punto di incontro è quell'istante brevissimo in cui la delusione cede il passo alla speranza

In quanto soggetti agenti possiamo intervenire solo sui FUTURA: se qualcosa non è ancora accaduto è almeno concepibile l'idea di agire per modificarne il corso

D'altra parte, è possibile conoscere e descrivere solo i FACTA. Ciò che sarà può solo essere prefigurato: profezie, congetture, prospettive, proiezioni, etc.

Concetto di previsione/2

Dicesi PREVISIONE la descrizione di eventi futuri che si basa sulla conosenza di eventi passati e su di un insieme di ipotesi

Quindi, la previsione altro non è che l'estensione ai FUTURA delle regolarità accertate per i FACTA

Su quali basi logiche si fonda tale estensione? Lo schema è riconducibile alla induzione per enumerazione

Dato che per "n" volte si è trovato che gli "α" sono dei "β" e che in nessuno di questi casi si è trovato che un "β" non fosse un "α", le due affermazioni

1) Il prossimo "α" sarà anche un "β"

2) Tutti gli "α" sono anche dei "β"

diventano sempre più verosimili man mano che "n" si avvicina all'infinito

Le previsioni/3

Il principio dell'induzione non può essere assunto come fondamento generale delle previsioni perchè si rivela talvolta falso.

Possiamo però seguirlo in questo senso:

L'aver osservato che certi eventi si sono manifestati finora in una data maniera non autorizza a dedurne che essi continueranno a presentarsi nel medesimo modo in futuro.

Nulla però vieta di pensare che, fra tutte le possibili manifestazioni, la più plausibile sia la ripetizione nei modi e nelle forme consuete.

Anzi, tale metodo della PREVISIONE ANNUNCIATA è il criterio tipico adottato nelle scienze empiriche:

In presenza di certe condizioni si prevede il verificarsi di un evento. Se questo succede, si ha una conferma, ma sono richiesti ulteriori accertamenti. Più accertamenti arrivano, più sicuri siamo della previsione

Le previsioni nelle scienze sociali

Esistono eventi caratterizzati da una notevole stabilità nel loro manifestarsi, ma ne esistono altri assai più mutevoli.

- **I primi sono oggetto delle SCIENZE FISICHE**
- **I secondi sono oggetto delle SCIENZE SOCIALI**

La loro prevedibilità è molto ineguale:

E' retorico domandarsi se un grave, lasciato libero, cadrà oppure rimarrà librato nell'aria. L'idea invece che un aumento di prezzo induca una contrazione della domanda è solo plausibile.

Le regolarità empiriche riscontrate nelle scienze sociali sono molto più imprecise e approssimate che nelle scienze fisiche. E in molti contesti sono talmente incerte da far dubitare persino della loro utilità

Le previsioni in campo economico

In campo economico le previsioni vengono solitamente distinte secondo l'orizzonte temporale di riferimento (con molta incertezza però sui limiti di tempo che li differenziano)

- ***A brevissimo termine (fino a ad un mese)***
  previsioni JIT (just-in-time)

- ***A breve termine (fino ad un anno)***

  Hanno un ruolo di primo piano i fattori accidentali o erratici:scioperi, leggi speciali, catastrofi naturali, etc. oppure stagionali

- ***A medio termine (da 1 a 5-10 anni)***

  Il ruolo centrale è svolto dalle fasi di espansione e contrazione che coinvolgono più settori di attività

- ***A lungo termine (dai 10 anni in poi)***

  Dominano i fattori demografici, le modifiche strutturali del sistema economico, l'evoluzione tecnologica, il sistema dei valori, etc.

Metodi diversi per tempi diversi

La differenza tra gli insiemi di variabili influenti nel brevissimo, breve, medio e lungo periodo implica un diverso approccio alle previsioni rispettive

- Per il LUNGO TERMINE la previsione non può limitarsi alla mera estensione del passato, ma comprendere varie alternative anche accompagnate da considerazioni qualitative (scenari).

- Per il BREVISSIMO TERMINE la previsione è condizionata dalla situazione presente che si ritiene senz'altro continuata nell'immediato futuro. In genere basta traslare la previsione di un solo periodo

- Per il BREVE TERMINE la previsione è legata all'inerzia intrinseca in ogni evoluzione dinamica e che impedisce repentini cambiamenti. In questo caso le previsioni si estendono per più periodi, ma non troppi.

Le previsioni a medio termine

C'è qui una "Terra di nessuno" che divide l'immaginazione creativa delle tecniche qualitative ed i modelli matematici delle tecniche quantitative

Analisi e conoscenza dell'evoluzione passata sono essenziali, ma più per individuare le relazioni fra variabili e regolarità di comportamento che non come fattore di predeterminazione del futuro.

In molte analisi economiche l'interesse si accentra su di un periodo tra i 12 e 24 mesi.

Tale orizzonte è abbastanza ampio per dare spazio ad elementi decisionali, ma ancora breve perché si possa sentire l'influenza del passato più recente.

Le valutazioni dello stato presente e dell'evoluzione a medio termine sono note come DIAGNOSI CONGIUNTURALI. Qui trovano largo impiego le tecniche di decomposizione delle serie storiche e altri metodi di previsione

Previsione Naive/1

Il metodo di previsione più semplice, che non costa nulla e che tutti possono applicare è il seguente

$$\hat{y}_{n+1} = k y_n \quad \text{dove} \begin{cases} y_n = \text{ultimo valore conosciuto} \\ k = \text{fattore di proporzionalità} \\ \hat{y}_{n+1} = \text{valore previsto nel prossimo periodo} \end{cases}$$

Se k=1 allora la previsione coincide con l'ultimo valore noto. Altre scelte sono

$$k = \left(\frac{y_n}{y_1}\right)^{\frac{1}{n}}; \qquad k = \frac{\sum_{t=2}^{n} \frac{y_i}{y_{i-1}}}{n-1}$$

Il primo usa il tasso di crescita (composto) della serie.

Il secondo la variazione relativa media da un periodo all'altro

La previsione NAIVE/1 ha pochissima memoria dei valori passati ed è inutile per dati a forte stagionalità. Funziona bene quando c'è un marcato trend

AT93

Esempio

Per i seguenti dati si ha:

Anno	Trim	t	y_t
1986	1	1	10.8
	2	2	9.8
	3	3	9.4
	4	4	9.8
1987	1	5	9.9
	2	6	9
	3	7	8.6
	4	8	9.4
1988	1	9	9.7
	2	10	9.1
	3	11	9
	4	12	9.8
1989	1	13	9.8
	2	14	9
	3	15	8.6
	4	16	9.1

Previsione per il primo trimestre '90

$$k = 1 \Rightarrow \hat{y}_{17} = 9.100$$

$$k = 0.9856 \ (\text{V\%Media}) \Rightarrow \hat{y}_{17} = 8.969$$

$$k = 0.9893 \ (\text{tasso}) \Rightarrow \hat{y}_{17} = 9.003$$

Tutte le previsioni sembrano sottostimare il valore per il primo trimestre

AT93

Previsione Naive/2

Come si è visto, la presenza di stagionalità rende scadente il metodo Naive/1 dato che ignora del tutto le influenze stagionali.

Un metodo di previsione deve tener conto dei fattori dominanti della serie. La stagionalità può essere inclusa nel metodo naive con lo schema:

$$\hat{y}_{n+1} = k y_{n+1-s}; \quad s \text{ è il periodo della stagionalità}$$

il valore previsto è proporzionale al valore stagionale precedente.

Le determinazioni di "k" seguono le serie parziali costituite dal succedersi dei valori stagionali

1986	1	10.8
1987	5	9.9
1988	9	9.7
1989	13	9.8

$$k = 1 \Rightarrow \hat{y}_{17} = 9.80$$
$$k = 1.03(V\%) \Rightarrow \hat{y}_{17} = 10.13$$
$$k = 0.68(\text{tasso}) \Rightarrow \hat{y}_{17} = 6.64$$

Le cose sembrano andare meglio, ma il metodo è troppo fragile per essere realmente affidabile

Metodo della media

Il metodo naive ha il difetto di sfruttare poco le informazioni ultime della serie che in fondo dovrebbero contenere le informazioni più valide per la previsione

Un metodo, analogo a quelli Naive è il metodo della media che agisce secondo i seguente schemi

DATI NON STAGIONALI

$$\hat{y}_{n+1} = \frac{y_n + y_{n-1} + y_{n-2} + \ldots + y_{n-m+1}}{m}$$

dove "m" è il numero di termini: solitamente da 3 a 6

DATI STAGIONALI

$$\hat{y}_{n+1} = \frac{y_{n-s+1} + y_{n-2s+1} + \ldots + y_{n-as+1}}{a}$$

dove "s" è la stagionalità ed "a" il numero di anni su cui è estesa la media

Esempio sul metodo della media

Consideriamo sempre i dati dell'esempio precedente

1986	1	10.8
1987	5	9.9
1988	9	9.7
1989	13	9.8

$$\hat{y}_{17} = \frac{y_{13} + y_9 + y_5 + y_1}{4} =$$

$$= \frac{10.8 + 9.9 + 9.7 + 9.8}{4} = 10.0'5$$

E' anche possibile usare medie ponderate invece di medie semplici. Così si possono pesare di più i valori recenti e meno i valori passati

Ad esempio: $$\hat{y}_{17} = \frac{16y_{13} + 8y_9 + 4y_5 + 2y_1}{30} = 9.85$$

Da notare che il valore previsto in base alle medie non potrà mai andare oltre il valore più piccolo o più grande tra quelli già osservati e ciò può essere un limite

Si possono usare i pesi negativi

Metodo della media cumulativa

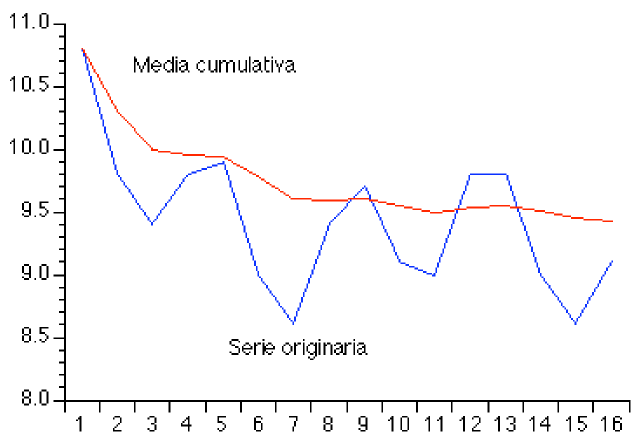
Un metodo che che si colloca in posizione intermedia tra le medie mobili e le previsioni naive si basa sulla media cumulativa:

A partire dal primo termine si calcola una media che include via cia un numero crescente di termini:

$$\mu_t = \frac{\sum_{i=1}^{t} y_i}{t}$$

Anno	Seq.	Valore	M.Cum.
1986	1	10.8	10.80
	2	9.8	10.30
	3	9.4	10.00
	4	9.8	9.95
1987	5	9.9	9.94
	6	9	9.78
	7	8.6	9.61
	8	9.4	9.59
1988	9	9.7	9.60
	10	9.1	9.55
	11	9	9.50
	12	9.8	9.53
1989	13	9.8	9.55
	14	9	9.51
	15	8.6	9.45
	16	9.1	9.43

La previsione è data dagli ultimi tre termini nella progressione delle medie: (9.51+9.45+9.43)/3=9.46



Questa tecnica ha il difetto di generare medie con termini non comparabili, ma tende a ripulire l'andamento della serie e ciò la rende apprezzabile per previsioni a corto raggio.

Teoria del metodo della media

Si ipotizza che le osservazioni siano generate dal seguente meccanismo

$$y_t = \beta + e_t \qquad con \quad E(e_t) = 0, \quad E\left(E_t^2\right) = \sigma^2, \quad E(e_t e_{t-1}) = 0$$

Dove β è costante e gli e_t sono formano una sequenza di errori a media nulla, incorrelati ed a varianza costante.

Se β fosse noto il valore che minimizza l'errore quadratico medio di previsione da assegnare all'osservazione nel periodo (n+r) sarà

$$y_{n+r} = \beta + e_{n+r} \Rightarrow \quad \hat{y}(r) = \beta$$

La previsione è non distorta nel senso che ha media nulla e varianza fissa

$$E\left[y_{n+r} - \hat{y}(r)\right] = E\left[\beta + e_{n+r} - \beta\right] = E\left[e_{n+r}\right] = 0$$

$$E\left[y_{n+r} - \hat{y}(r)\right]^2 = E\left[\beta + e_{n+r} - \beta\right]^2 = E\left[e_{n+r}\right] = \sigma^2$$

Teoria del metodo della media/2

Se β è incognito occorre stimarlo con i minimi quadrati. Ciò implica

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \Rightarrow \hat{y}(r) = \hat{\beta}$$

Poiché il livello è costante, ogni dato contribuisce con lo stesso peso ad formare il previsore

che corrisponde al metodo della media (se la serie è stagionale occorre calcolare una media per ogni periodo).

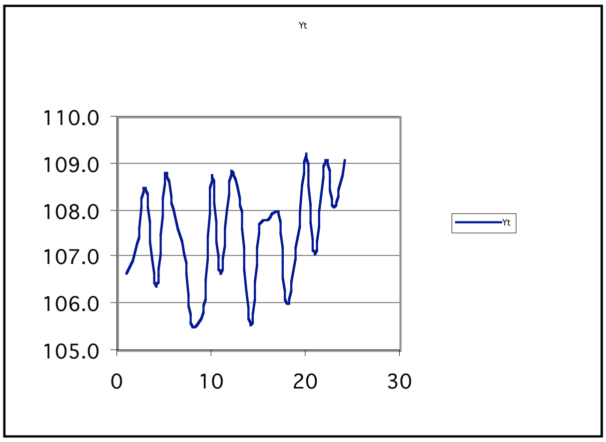
La previsione è la stessa per ogni periodo futuro. L'intervallo di confidenza è

$$\hat{\beta} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\hat{\sigma}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)}, \quad \hat{\beta} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\hat{\sigma}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)}; \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \hat{\beta}\right)}{n-1}}$$

α è il livello di confidenza e $t_{\alpha/2,n-1}$ è il quantile della t-Student corrispondente al livello (1-α)

Esempio

t	Yt
1	106.64
2	107.29
3	108.49
4	106.39
5	108.77
6	108.01
7	107.04
8	105.49
9	105.80
10	108.75
11	106.64
12	108.79
13	108.26
14	105.56
15	107.72
16	107.78
17	107.95
18	106.03
19	107.43
20	109.23
21	107.06
22	109.08
23	108.06
24	109.07



All'aumentare del livello di confidenza la previsione diventa più attendibile, ma meno precisa

$$\hat{\beta} = 107.56 \;\Rightarrow\; \hat{\sigma}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1.16$$

$$99\% : 107.56 - 3.10 * 1.16, \quad 107.56 + 3.10 * 1.16 \Rightarrow 103.96, 111.15$$

$$95\% : 107.56 - 2.81 * 1.16, \quad 107.56 + 2.81 * 1.16 \Rightarrow 104.31, 110.81$$

Aggiornamento del previsore

Ipotizziamo di trovarci al tempo n+1 e di effettuare una previsione di r periodi

$$\hat{y}_{n+1}(r) = \frac{(y_1 + y_2 + \ldots + y_n + y_{n+1})}{n+1} = \frac{[y_{n+1} + n\hat{y}_n(r)]}{n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{n+1}\right) y_{n+1} + \left(\frac{n}{n+1}\right)\hat{y}_n(r)$$

La previsione a partire dal periodo (n+1) è la media ponderata della previsione per Il periodo (n+1) già effettuata al periodo n ed il dato più recente.

Un'angolatura alternativa è la seguente:

$$\hat{y}_{n+1}(r) = \frac{[y_{n+1} - \hat{y}_n(r) + \hat{y}_n(r) + n\hat{y}_n(r)]}{n+1} = \frac{[y_{n+1} - \hat{y}_n(r) + (n+1)\hat{y}_n(r)]}{n+1}$$

$$= \hat{y}_n(r) + \frac{[y_{n+1} - \hat{y}_n(r)]}{n+1}$$

La previsione a partire dal periodo (n+1) è alla previsione già effettuata al periodo n corretta di una frazione fissa dell'errore di previsione che si è verificato al periodo (n+1)

Correlazione seriale

Nel modello semplice di regressione lineare si ipotizzano errori incorrelati.

Se però il modello è applicato a serie storica tale ipotesi non è realistica.

Correlazione seriale fra variabili casuali di una sequenza ordinata significa che le variabili casuali collocate in periodi regolarmente distanziati hanno una certa dipendenza lineare

La correlazione seriale è misurata dalle autocovarianze ed autocorrelazioni di lag k (cioè spaziate di k circostanze temporali)

$$\gamma_k = Cov(y_t, y_{t-k}) = E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)], \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Tale formula presuppone che la media $E(y_t)=\mu$ sia costante nel tempo e che Le autocovarianze dipendano solo dal lag k, ma non dal tempo t

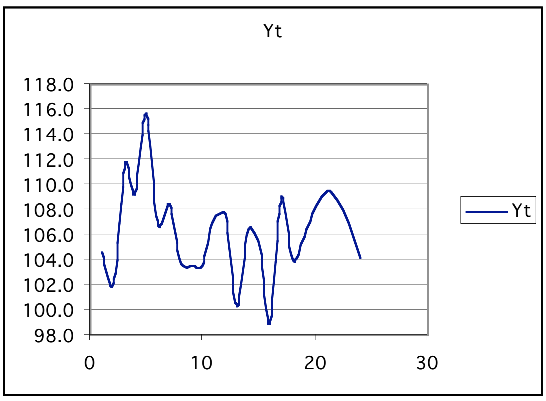
E' evidente che $\gamma_k = \gamma_{-k}$

Condizione di stazionarietà

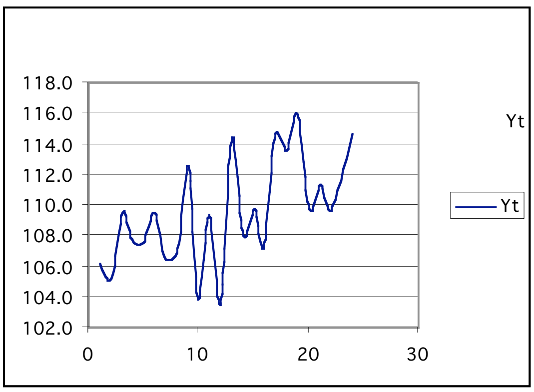
Una serie è stazionaria se non ha trend oppure se questo è stato rimosso.

Quindi la serie storica ha un andamento stazionario se l'asse intorno a cui Ruota rimane lo stesso nel tempo e se le fluttuazioni intorno all'asse hanno varianza costante

Stazionaria



Non stazionaria



Questo tipo di serie sono stazionarie "in media e varianza"

Autocorrelazioni

L'autocorrelazione di lag k è data da

$$\rho_k = \frac{Cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{[Var(y_t)Var(y_{t-k})]}} = \frac{\gamma_k}{\sqrt{\gamma_0\gamma_0}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

L'insieme delle autocorrelazioni considerate come funzioni del lag k è noto Come CORRELOGRAMMA oppure FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

E' evidente che

$$\rho_k = \rho_{-k}, \quad k = 1,2,\ldots, \quad \rho_0 = 1$$

Stima delle autocorrelazioni

L'equivalente campionario delle autocorrelazioni è

$$r_k = \frac{\dfrac{\sum_{t=k+1}^{n}(y_t-\mu_y)(y_{t-k}-\mu_y)}{n}}{\dfrac{\sum_{t=1}^{n}(y_t-\mu_y)^2}{n}} = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(y_t-\mu_y)(y_{t-k}-\mu_y)}{\sum_{t=1}^{n}(y_t-\mu_y)^2} \quad per \quad k = 1,2,\ldots,$$

Dove μ_y è la media campionaria delle Y.

Nel caso in cui ρ_k=0 per ogni k>Q la varianza dello stimatore r_k è

$$Var(r_k) \cong \frac{1}{n}\left(1 + 2\sum_{k=!}^{Q}\rho_k^2\right)$$

Quindi se

$$|r_k|\sqrt{n} > 1.96 \quad per \ un \ qualche \ k \ (ma \ non \ troppo \ grande)$$

Potremmo asserire, al 5%, che c'è autocorrelazione nella serie storica (Q=0)

Verifica del modello a media costante

Si ipotizza che i valori ruotino in modo indipendente e stabile intorno ad un livello medio mantenuto costante

Per asseverare la fondatezza di tale modello occorre determinare il correlogramma dei residui (y_t-β)

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n} \left(y_t - \hat{\beta}\right)\left(y_{t-k} - \hat{\beta}\right)}{\sum_{t=1}^{n} \left(y_t - \hat{\beta}\right)^2} \qquad k = 1,2,\ldots,$$

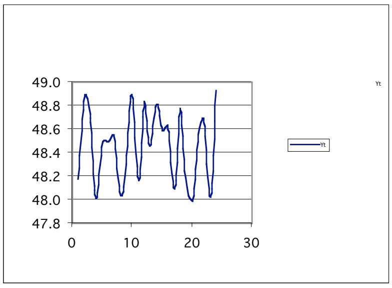
Il modello potrà ritenersi adeguato se tutti gli r_k verificano la condizione di non significatività

$$\left|r_k\right| < \frac{1.96}{\sqrt{n}} \qquad k = 1,2,\ldots$$

AT93

Esempio

t	Yt
1	48.41
2	48.31
3	48.08
4	48.20
5	48.35
6	48.38
7	48.56
8	48.35
9	48.98
10	48.51
11	48.68
12	48.13
13	48.75
14	48.37
15	48.85
16	48.07
17	48.16
18	48.27
19	48.57
20	48.75
21	48.95
22	48.74
23	48.80
24	48.22

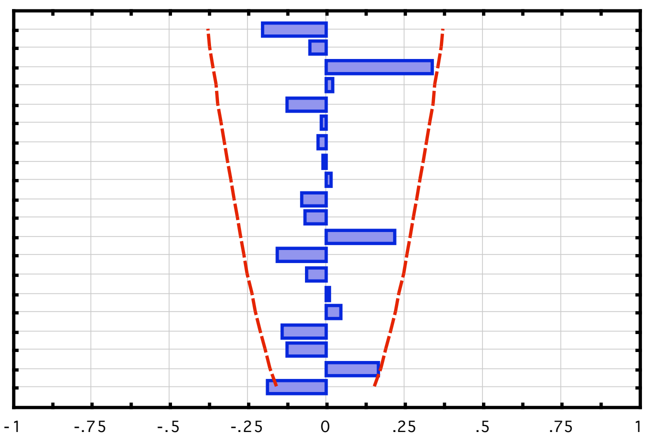


Per k>20 non si riesce a calcolare bene il Coefficiente di autocorrelazione

C'è il sospetto di trend

Autocorrelation Function
V1
(Standard errors are white-noise estimates)

Lag	Corr.	S.E.	Q	p
1	-.203	.1920	1.12	.2899
2	-.054	.1878	1.20	.5481
3	+.338	.1834	4.60	.2037
4	+.021	.1790	4.61	.3295
5	-.126	.1745	5.14	.3994
6	-.014	.1698	5.14	.5255
7	-.028	.1651	5.17	.6390
8	-.008	.1601	5.17	.7388
9	+.015	.1550	5.18	.8181
10	-.077	.1498	5.44	.8596
11	-.068	.1443	5.67	.8947
12	+.217	.1387	8.10	.7770
13	-.155	.1328	9.46	.7371
14	-.061	.1266	9.69	.7842
15	+.012	.1201	9.70	.8380
16	+.047	.1132	9.88	.8730
17	-.141	.1059	11.65	.8210
18	-.123	.0981	13.28	.7777
19	+.166	.0895	16.67	.6120
20	-.189	.0801	22.26	.3265



AT93

Esercizio

A partire dai dati sull'andamento dei consumi domestici di elettricità, stimare il consumo prevedibile per il gennaio '79

Mese	1975	1976	1977	1978
Gennaio	53299	59088	64516	64624
Febbraio	50716	54530	61705	64283
Marzo	48595	48656	52686	59283
Aprile	46036	45365	47118	49722
Maggio	42424	42786	44086	46764
Giugno	45741	45262	49481	51533
Luglio	52275	53312	59748	60266
Agosto	55310	57556	61541	62366
Settembre	53057	53746	57687	60883
Ottobre	44430	47296	50599	52656
Novembre	43824	48582	47568	49440
Dicembre	50442	56893	55611	57458

a) Metodo naive

b) Metodo della media (con intervallo di previsione al 99%)

c) Media con pesi: {-3/2,-1/2,1, 2}

N.B. Tenete conto della stagionalità

Livellamento esponenziale
(No trend No seasonality)

I metodi di livellamento esponenziale ES (exponential smoothing) sono nati negli anni '50 e diventati subito popolari perché producono stime affidabili con pochi dati.

La previsione per il prossimo periodo è pari alla previsione per il periodo corrente più un aggiustamento proporzionale all'errore già avvenuto

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha(y_t - \hat{y}_t)$$

dove "α" è il fattore di correzione (si ipotizza che $0 < \alpha < 1$)

All'avvicinarsi di "α" ad "1" aumenta l'incidenza del fattore di correzione. Se il parametro si avvicina allo zero l'errore di previsione perde gradualmente la sua importanza

Se α=1 il metodo ES coincide con il metodo naive con k=1

Livellamento esponenziale/2

Il valore prossimo previsto è una media ponderata tra il valore già previsto ed il valore certo del periodo precedente. Infatti:

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha y_t - \alpha \hat{y}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_t$$

All'avvicinarsi di "α" ad "0" perde importanza il valore passato ed aumenta quella della previsione precedente (processo AUTOADATTIVO).

L'ipotesi di serie storica a media costante comporta che tutti i valori diano lo stesso contributo alla formazione della previsione corrente.

Tale ipotesi è spesso indifendibile e conviene passare ad un modello in cui la media possa variare nel tempo.

Livellamento esponenziale/3

C'è però un'altra interpretazione dell'ES che è molto illuminante

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_t$$
$$\hat{y}_t = \alpha y_{t-1} + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1}$$
$$\hat{y}_{t-1} = \alpha y_{t-2} + (1-\alpha)\hat{y}_{t-2}$$

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha)\left[\alpha y_{t-1} + (1-\alpha)\left[\alpha y_{t-2} + (1-\alpha)\hat{y}_{t-2}\right]\right]$$
$$= \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 \hat{y}_{t-2}$$

In generale

$$\hat{y}_{n+1} = \alpha \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha)^i y_{n-i+1}$$

il principio è quello della media mobile ponderata : tutti i valori passati della serie contribuiscono al valore futuro, ma non con lo stesso peso.

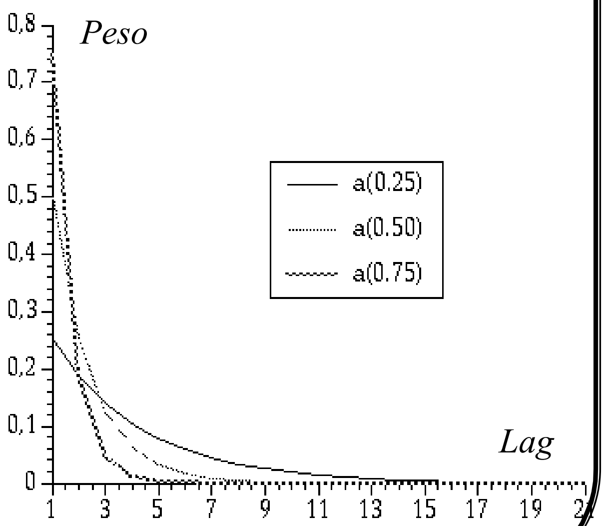
Anzi, i pesi decrescono man mano che il periodo di riferimento si allontana. Questo è un risultato EURISTICO

Note sul fattore di correzione

E' da osservare che la somma dei pesi nello schema di ES dipende da "α" e da "n", ma all'aumentare di "n" tende rapidamente ad uno

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(1-\alpha)^{i} = \alpha \sum_{i=1}^{n}(1-\alpha)^{i} = \alpha\left[\frac{1-(1-\alpha)^{n+1}}{1-(1-\alpha)}\right]$$
$$= 1-(1-\alpha)^{n+1}$$

α	y_t	y_{t-1}	y_{t-2}	y_{t-3}
0.1	0.1	0.09	0.081	0.0729
0.5	0.5	0.25	0.125	0.0625
0.8	0.8	0.16	0.032	0.0064



Più alto è il fattore più rapida è la caduta del contributo dei valori passati e più alto è il peso dei valori più recenti

AT93

Scelta ragionata del fattore di correzione

Il fattore " α" influenza l'accuratezza della previsione e deve perciò essere formulato in modo che l'errore di previsione sia il più piccolo possibile.

La scelta di " α" è un processo di prove ed errori: è noto che i valori vicini allo zero livellano la serie molto di più dei valori prossimi ad uno.

Se la serie è molto oscillatoria si scelgono valori bassi che frenano le reazioni all'aggiornamento dovuto a forze di espansione o di contrazione.

Se invece ha una struttura ben marcata e con poche oscillazioni si opterà per un valore più alto)

In generale si dovrebbe avere:

$$\boxed{0.01 \leq \alpha \leq 0.30}$$

N.B.

$$\begin{cases} \alpha = 0 & \text{Tutti i valori – remoti o recenti – contano ugualmente} \\ \alpha = 1 & \text{Conta solo l'informazione ultima passata} \end{cases}$$

AT93

Implementazione dell'ES

Il meccanismo ricorsivo $\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_t$

Può essere riscritto come $\hat{y}_n(1) = (1-\alpha)y_t + \alpha\hat{y}_{n-1}(1)$

E può essere usato per attivare la previsione in ogni momento della serie.

In pratica si parte dal primo dato

$$\hat{y}_1(1) = (1-\alpha)y_1 + \alpha\hat{y}_0(1)$$

che viene usato per la previsione successiva

$$\hat{y}_2(1) = (1-\alpha)y_2 + \alpha\hat{y}_1(1)$$

E così via fino all'n-esimo dato

Stima del valore iniziale

Per avviare il processo di ES si deve fare una scelta per il valore iniziale: $\hat{y}_0(1)$

Applicando sequenzialmente la formula di ES si vede che

$$\hat{y}_n(1) = (1-\alpha)\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha^{n-i}y_i\right] + \alpha^n\hat{y}_0(1)$$

L'impatto della prima previsione è trascurabile se n è grande: se n=50 e α=.8 per il secondo addendo si avrebbe

$$0.8^{50}\left[\hat{y}_0(1)\right] = 0.000014\left[\hat{y}_0(1)\right]$$

Tra le varie scelte possibili di $\hat{y}_0(1)$ ricordiamo le due più semplici

1) Media dei primi m valori (per i vari termini)

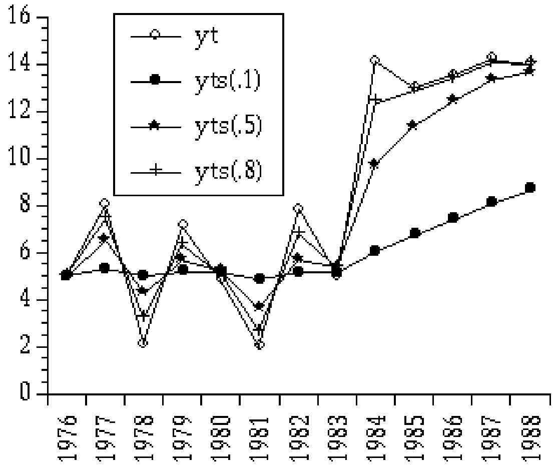
2) si pone $\hat{y}_1 = y_1 \Rightarrow \hat{y}_2 = y_1$ ovvero la stima "naive"

Esempio

Ecco un esempio su dati annuali. Come valore iniziale si è usata la stima naive.

Quando la serie è analizzata la prima volta, l'ES si applicato a tutti i termini

			diversi valori di α		
Anno	**T**	**yt**	**yts(.1)**	**yts(.5)**	**yts(.8)**
1976	1	5.0	5	5	5
1977	2	8.0	5.30	6.50	7.40
1978	3	2.1	4.98	4.30	3.16
1979	4	7.1	5.19	5.70	6.31
1980	5	4.8	5.15	5.25	5.10
1981	6	2.0	4.84	3.63	2.62
1982	7	7.8	5.13	5.71	6.76
1983	8	5.0	5.12	5.36	5.35
1984	9	14.1	6.02	9.73	12.35
1985	10	13.0	6.72	11.36	12.87
1986	11	13.5	7.39	12.43	13.37
1987	12	14.2	8.08	13.32	14.03
1988	13	14.0	8.67	13.66	14.01



In questo caso il valore migliore per "α" è 0.8 in quanto segue meglio la serie.

Quindi la previsione più accurata per l'88 è 14.01

Si intuisce che la scelta di "α" deve essere preceduta da diverse prove

AT93

Scelta automatica di α

Il fattore "α" determina l'intensità con la quale i valori passati influenzano le Previsioni future.

Valori piccoli di "α" daranno risposte lente ai cambiamenti di livello, ma saranno più stabili.
Valori elevati rendono le previsioni più sensibili ai cambiamenti quindi più vicine all'andamento reale, ma anche più legate a fatti episodici e irregolari.

Un modo per scegliere "α" meno soggettivamente è il seguente:

Per una scansione di valori di "α" 0.05 - 0.30, passo 0.5 si calcola

$$SSE(\alpha) = \sum_{i=1}^{n}\left[y_t - \hat{y}_{t-1}(1)\right]$$

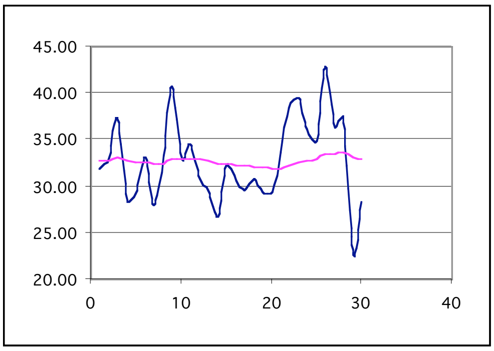
Il valore di "α" cui corrisponde il minimo di SSE sarà quello prescelto per tutte le previsioni

AT93

Esempio

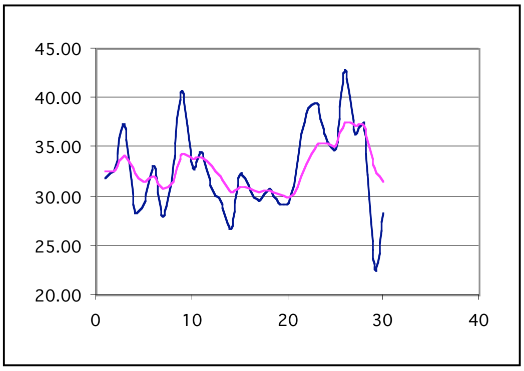
t	Yt
1	31.90
2	33.18
3	37.44
4	28.57
5	29.22
6	33.11
7	27.94
8	33.31
9	40.82
10	32.90
11	34.45
12	30.78
13	29.55
14	26.82
15	32.17
16	30.72
17	29.63
18	30.89
19	29.35
20	29.39
21	33.60
22	38.47
23	39.58
24	36.08
25	34.98
26	42.81
27	36.28
28	37.44
29	22.79
30	28.40

α	SSE(α)
0.05	607.68
0.10	621.67
0.15	629.71
0.20	633.34
0.25	633.69
0.30	631.96
0.35	629.37
0.40	626.96
0.45	625.52
0.50	625.59
0.55	626.32



Il valore di "α" da applicare è α=0.05
Tuttavia lo smussamento è eccessivo.

Un altro candidato è α=0.30, ma l'efficacia è dubbia



AT93

Leaving-one-out

In fase di costruzione del meccanismo di ES si può ben sacrificare un dato per mettere a punto il previsore.

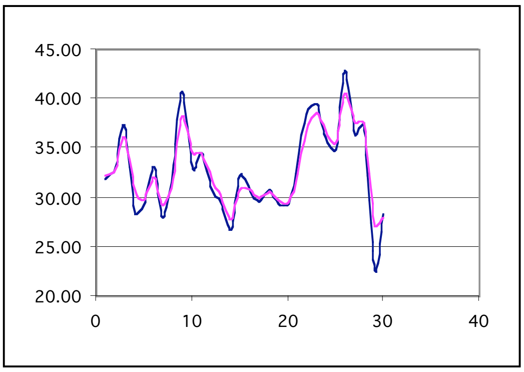
L'idea è di effettuare l'ES non sugli "n" dati, ma su (n-1) e di eaminare una scansione di valori del coefficiente di smorzamnto "α".

Il valore di "α" che fornisce ma stima migliore del valore Y_n sarà quello da adottare nel previsore

α	Ysn(α)
0.05	22.97
0.10	27.06
0.15	29.00
0.20	28.12
0.25	24.95
0.30	20.41
0.35	15.41
0.40	10.62
0.45	6.48
0.50	3.27
0.55	1.12
0.60	0.09
0.65	0.20
0.70	1.44

Il valore di "α" da applicare è α=0.60
La prossimità tra serie originale e serie prevista dall'ES è troppo elevata:

ogni singolo episodio viene riportato nel previsore che non attua alcun livellamento



AT93

Previsioni con l'ES

Lo scopo dell'ES è di eliminare le fluttuazioni casuali e conservare la struttura consolidata della serie storica

Anche se non è basato su di un forte modello teorico riesce a conservare memoria di tutti i valori passati e degli apprendimenti dovuti agli errori

Il metodo ES è utile se si debbono aggiornare centinaia o migliaia di previsioni allorchè si acquisisce un nuovo dato.

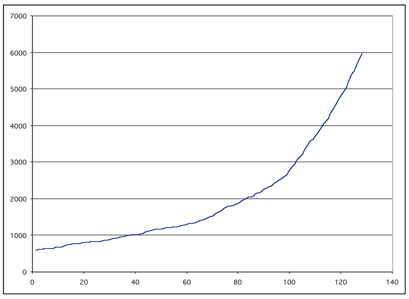
Infatti, per gestire l'ES occorre registrare il dato osservato in passato e la previsione fatta su di esso. Quindi due sole informazioni.

Quando il nuovo dato si rende disponibile si inserisce questo e la sua previsione e così via.

L' ES ha un orizzonte temporale limitato ad un periodo e non può essere usato per una sequenza di previsioni

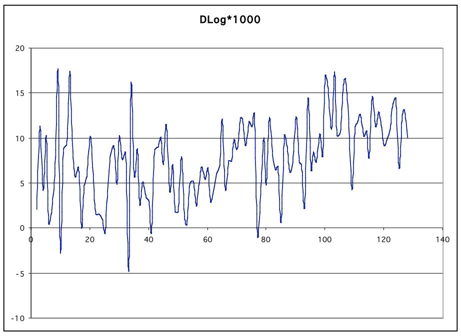
Esempio

Quarterly Iowa nonfarm income (1948 - 1979). Source: Abraham & Ledolter (1983).

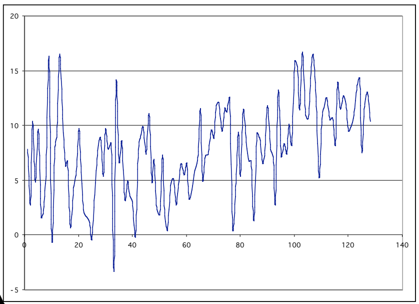


La presenza di un trend esponenziale induce ad attivare la scala logaritmica e le differenze prime (cioè i tassi di crescita)

Nel grafico dei tassi di crescita c'è una progressiva, sebbene lenta crescita del livello medio. Quindi il modello a media costante sarebbe inappropriato.



Usiamo S_0=7.84 (media globale della serie) è α=0.11



Valore previsto: 8.13
dar riportare però in nella forma della serie originaria

Esercizio

A) Per i seguenti dati (vendite mensili) utilizzare l'ES per prevedere il dato di dicembre. Utilizzate tre diversi valori di "α". In particolare

α=0.25, 0.50, 0.75

Mese	Periodo	y_t
Gennaio	1	2000
Febbraio	2	1350
Marzo	3	1950
Aprile	4	1975
Maggio	5	3100
Giugno	6	1750
Luglio	7	1550
Agosto	8	1300
Settembre	9	2200
Ottobre	10	2775
Novembre	11	2350
Dicembre	12	

N.B. Per il valore iniziale usate la media globale della serie.

B) Indicate qualcuno dei difetti principali del metodo ES

(ad esempio trattare tutte le serie storiche Allo stesso modo)

Livellamento esponenziale e Trend

L'ES è appropriato se la serie è stazionaria (assenza di trend). Se invece il trend c'è ed in particolare se il trend è lineare l'ES produce valori poco utili

Supponiamo che la serie storica sia esprimibile con il modello

$$y_t = b_0 + b_1 t + u_t$$

Oltre alla media costane (b_0) c'è un incremento regolare del livello medio che può anche essere singificativo se il parametro di increme nto (b_1) è elevato

Se applichiamo l'ES abbiamo

$$\hat{y}_{n+1} = \alpha \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha)^i y_{n+1-i} = \alpha \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha)^i \left[b_0 + b_1 (n+1-i) + u_{n+1-i} \right]$$

$$= b_0 \alpha \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha)^i + b_1 (n+1) \alpha \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha)^i - b_1 \alpha \sum_{i=1}^{n} i (1-\alpha)^i + \alpha \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha)^i u_{n-i+1}$$

ES+Trend/2

Al tendere di "n" all'infinito si ha

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha(1-\alpha)^{i}=1;\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}i(1-\alpha)^{i}=\frac{1-\alpha}{\alpha^{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha)^{i}u_{n-i+1}=0$$ **Media degli errori**

In definitiva succede che

$$\hat{y}_{n+1}=\left[b_0+b_1(n+1)\right]-b_1\frac{(1-\alpha)}{\alpha}=T_{n+1}-b_1\frac{(1-\alpha)}{\alpha}$$

Quindi il metodo ES semplice (SES: *single exponential smoothing*) sottostima il trend se è crescente ovvero lo sovrastima se è decrescente.

Metodo di Holt

Per superare questo limite è stato proposto il metodo LES (*linear exponential smoothing)* noto anche come METODO DI HOLT.

Tale metodo prevede prima il livellamento della serie

$$L_t=\alpha y_t+(1-\alpha)(L_{t-1}+T_{t-1})$$

L'espressione è simile a quella del metodo ES. Cambia solo per la presenza del termine di trend che si somma all'ultimo valore livellato della serie.

Il simbolo “L” in questo caso è più comodo.

Il significato del coefficiente di smorzamento “α” rimane invariato, ma si stabilisce che il valore previsto si articola su due componenti: livello e trend

Metodo Holt/2

La seconda parte del metodo prevede il livellamento del trend

Questo è già stato ottenuto dalla 1ª equazione

Questa è una stima del trend

$$T_t = \gamma(L_t - L_{t-1}) + (1-\gamma)T_{t-1} \qquad 0 < \gamma < 1$$

Il trend è espresso come media ponderata tra la stima più recente del trend ed l'incremento del valore livellato della serie al periodo precedente.

Compaiono due fattori di livellamento (α e γ) da cui il nome di DES *(Double Exponential smoothing)*

La scelta di "γ" troppo vicina ad uno porta ad un trend applicato solo alle ultime due osservazioni. Se "γ" tende a zero il trend si stima su tutte le osservazioni dando a tutte lo stesso peso

Metodo di Holt/3

Il metodo LES opera separatamente sulle due componenti per poi combinarle in fase di previsione

$$\hat{y}_{t+1} = L_t + T_t$$

Per cui la previsione è la somma del valore livellato della serie e del trend

Per avviare il processo di previsione è necessario determinare i valori iniziali del trend e della serie

$$\begin{cases} L_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha)(L_0 + T_0) \\ T_1 = \gamma(L_1 - L_0) + (1-\gamma)T_0 \end{cases}$$

Ad esempio si può scegliere

$$L_1 = y_1 \Rightarrow L_0 = y_1 - T_0 \Rightarrow T_1 = T_0$$

Implementazione del metodo di Holt

Rimane da scegliere il valore iniziale del trend. Due possibili scelte sono

1) $T_0 = 0$;

2) stimare $T_t = b_0 + b_1 t$ usando le prime osservazioni **(a scelta)**

Il meccanismo del LES è ora definito:

Fissati α, γ, y_0, T_0

1) si calcola $L_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$

2) si calcola $T_t = \gamma(L_t - L_{t-1}) + (1-\gamma)T_{t-1}$

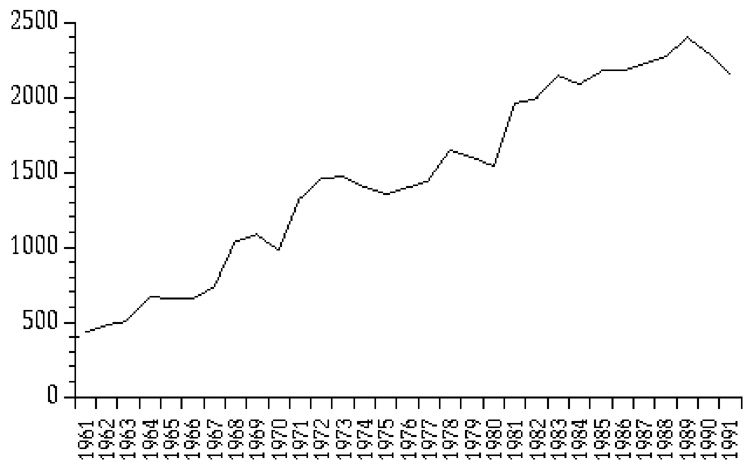
A fini previsivi si pone poi

$$\hat{y}_{n+1} = L_n + T_n$$

Esempio

Anno	Filati
1961	438
1962	488
1963	504
1964	675
1965	657
1966	663
1967	743
1968	1046
1969	1088
1970	982
1971	1330
1972	1457
1973	1476
1974	1407
1975	1352
1976	1398
1977	1446
1978	1649
1979	1597
1980	1546
1981	1957
1982	1994
1983	2148
1984	2089
1985	2177
1986	2181
1987	2232
1988	2271
1989	2408
1990	2302
1991	2155

In tabella è riportato l'andamento delle esportazioni italiane di filati

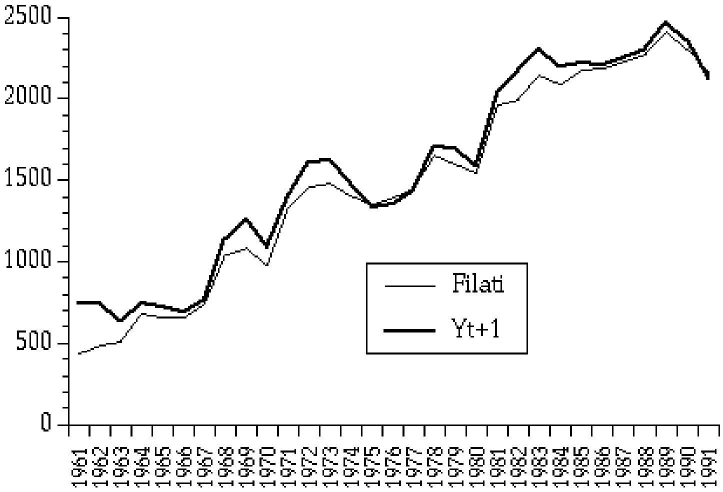


La serie mostra un chiaro trend lineare per cui il LES può essere applicato al meglio.

Poiché la serie è abbastanza lunga è più comodo porre T_0=0. Il trend insito nei dati farà presto ad apparire

Esempio/bis

Anno	Filati	L_t	T_t	Y_{t+1}
1960			0.0	
1961	438	438.0	306.6	744.6
1962	488	565.0	180.9	745.8
1963	504	576.6	62.4	638.9
1964	675	664.2	80.0	744.2
1965	657	683.2	37.3	720.5
1966	663	680.2	9.1	689.4
1967	743	726.9	35.4	762.3
1968	1046	960.9	174.4	1135.3
1969	1088	1102.2	151.2	1253.4
1970	982	1063.4	18.2	1081.7
1971	1330	1255.5	139.9	1395.4
1972	1457	1438.5	170.1	1608.6
1973	1476	1515.8	105.1	1620.9
1974	1407	1471.2	0.3	1471.5
1975	1352	1387.8	-58.2	1329.6
1976	1398	1377.5	-24.7	1352.8
1977	1446	1418.0	21.0	1439.0
1978	1649	1586.0	123.9	1709.9
1979	1597	1630.9	68.6	1699.4
1980	1546	1592.0	-6.6	1585.4
1981	1957	1845.5	175.5	2021.0
1982	1994	2002.1	162.2	2164.3
1983	2148	2152.9	154.2	2307.1
1984	2089	2154.4	47.3	2201.8
1985	2177	2184.4	35.2	2219.6
1986	2181	2192.6	16.3	2208.9
1987	2232	2225.1	27.6	2252.7
1988	2271	2265.5	36.6	2302.1
1989	2408	2376.2	88.5	2464.7
1990	2302	2350.8	8.8	2359.6
1991	2155	2216.4	-91.5	2124.9



In questo esempio si è scelto $\alpha = \gamma = 0.7$.

La scelta dei parametri è comoda se si usa il foglio elettronico con visualizzazione dei dati e del grafico.

L'effetto di ogni scelta si vede in tempo reale ed è facile trovare la combinazione che meglio segue la serie.

Esercizio_17

L'esportazione di calzature (in migliaia di paia) nel periodo '61-'72 è stata la seguente

Anno	Calzature
1961	33228
1962	39386
1963	45898
1964	54212
1965	64353
1966	88630
1967	107541
1968	137855
1969	165470
1970	172934
1971	174264
1972	178611

1) Adoperate il metodo di Holt per prevedere il dato del 1973.

2) Adoperate la formula $\hat{y}_{n+m} = L_t + mT_t$

per prevedere il dato del 1974 (m=2) e del 1975 (m=3)

Il metodo Holt-Winters

I metodi di livellamento esponenziale sono detti ADATTIVI in quanto operano la valutazione graduale dell'impatto che i dati passati hanno sui valori futuri.

Nessuno dei due metodi (SES e DES) riesce a "seguire" serie con forti effetti stagionali. Il metodo di Winters cerca di colmare tale lacuna

$$\hat{y}_{t+1} = (L_t + T_t)S_{t-k+1}$$

in cui si ipotizza che l'interazione che lega trend e stagionalità sia moltiplicativa. "k" esprime il numero di frazioni stagionali presenti nell'anno. E' ovvio che

$$\sum_{i=1}^{k} S_i = k$$

Nel metodo di Winters il trend è lineare $T_t = b_0 + b_1 t$ **per questo il metodo è anche detto di Holt-Winters**

AT93

Il metodo Holt-Winters/2

Il metodo di Winters si articola su tre equazioni (e quindi in tre passi)

- **Livellamento delle osservazioni** $L_t = \alpha\left(\frac{y_t}{S_{t-k}}\right) + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$
- **Livellamento della stagionalità** $S_t = \delta\left(\frac{y_t}{L_t}\right) + (1-\delta)S_{t-k}$
- **Livellamento del trend** $T_t = \gamma(L_t - L_{t-1}) + (1-\gamma)T_{t-1}$

Sono presenti ben tre fattori di livellamento (compresi tra 0 e 1) e questo dà al metodo grande flessibilità, ma anche più arbitrarietà nella scelta.

Per avviare i calcoli occorre fissare il livello del trend, la prima previsione ed i fattori di stagionalità. Esistono varie scelte. Noi preferiamo la più semplice

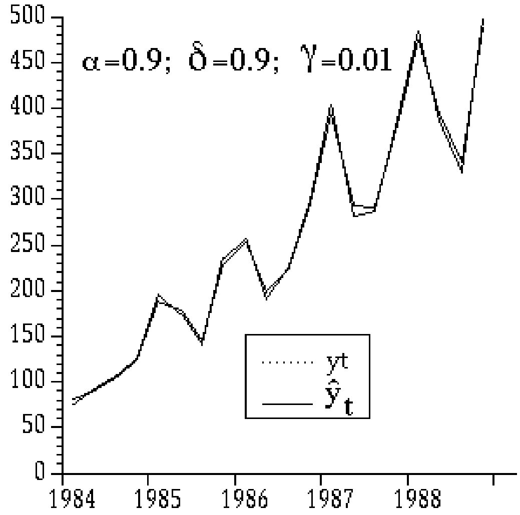
$$L_1 = y_k; \quad T_0 = 0; \quad S_i = 1 \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

AT93

Esempio

Importi IVA versati trimestralmente in una provincia italiana

Anno	Trim	IVA
1984	1	76
	2	93
	3	108
	4	128
1985	1	196
	2	175
	3	141
	4	236
1986	1	256
	2	190
	3	227
	4	299
1987	1	403
	2	282
	3	288
	4	387
1988	1	484
	2	384
	3	330
	4	497



Schema di calcolo

Anno	Tr.	y_t	L_t	S_t	T_t	$\hat{y}_{t+1}$
1983	1			1		
	2			1		
	3			1		
	4		128	1	0	
1984	1	76	81.20	0.94	-0.47	80.73
	2	93	91.77	1.01	-0.36	91.42
	3	108	106.34	1.01	-0.21	106.13
	4	128	125.81	1.02	-0.01	125.80
1985	1	196	199.77	0.98	0.73	188.94
	2	175	175.68	1.00	0.48	178.28
	3	141	142.76	0.99	0.15	144.91
	4	236	223.42	1.05	0.95	227.88
1986	1	256	258.20	0.99	1.29	253.59
	2	190	197.34	0.97	0.67	197.56
	3	227	226.10	1.00	0.95	224.85
	4	299	278.44	1.07	1.46	294.53
1987	1	403	394.33	1.02	2.61	392.99
	2	282	302.34	0.94	1.66	293.76
	3	288	288.92	1.00	1.51	291.19
	4	387	354.05	1.09	2.15	381.73
1988	1	484	463.19	1.04	3.22	475.17
	2	384	415.84	0.92	2.71	391.80
	3	330	339.63	0.97	1.92	340.66
	4	497	444.18	1.12	2.95	487.78

$$\hat{y}_{t+1} = (L_t + T_t) * S_{t+1-4}$$

$$\hat{y}_{21} = (L_{20} + T_{20}) * S_{17} = (444.18 + 2.95) * 1.04 = 465.02$$

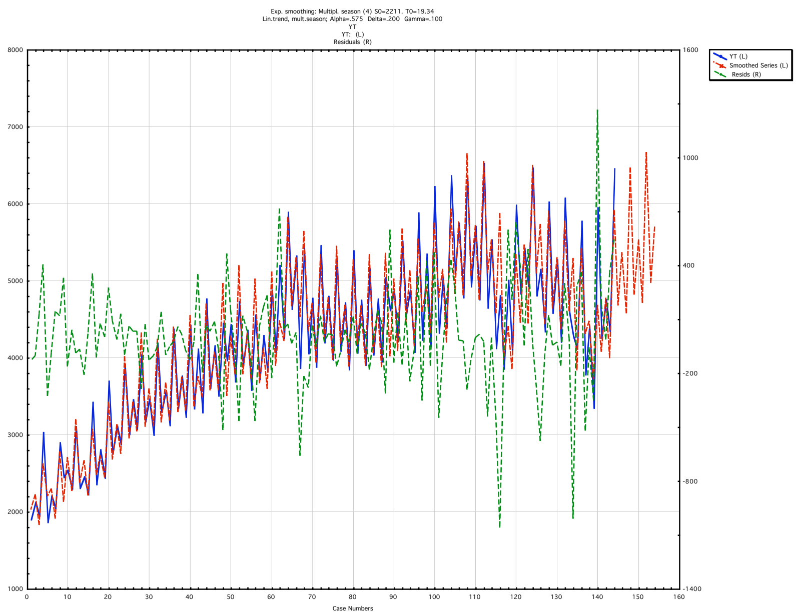
AT93

Altro esempio

Quarterly gross fixed capital expenditure - public, Australia: millions of dollars, 1989/90 prices. Sep 1959 - Jun 1995. Source: ABS.

Seasonal Factors
90.9040
103.2405
86.6349
119.2206

$\alpha=0.5$
$\gamma=0.1$
$\delta=0.2$



AT93

Esercizio_11

Il rendimento medio dei BOT trimestrali è riportato nella tabella seguente

Anno	1 Trim	2 Trim	3 Trim	4 Trim
1982	14.23	14.51	11.01	9.29
1983	8.65	8.80	9.46	9.43
1984	9.69	10.56	11.39	9.27
1985	8.48	7.92	7.90	8.11
1986	7.83	6.92	6.21	6.27

Utilizzando il metodo Holt-Winters prevedere l'andamento per l'anno '87 usando la formula

$$\hat{y}_{20+m} = \left(L_{20} + m * T_{20}\right) * S_{16+m}$$

Per i calcoli porre:

$$\alpha = 0.2; \quad \delta = 0.1; \quad \gamma = 0.1$$