La componente ciclica

La serie storica è il risultato della sovrapposizione di fenomeni oscillatori con onde di varia lunghezza.

La destagionalizzazione elimina le influenze del ciclo annuale, ma nella serie rimangono ancora indistinti il trend ed cicli pluriennali

$$D_t = (T_t * C_t) * u_t$$

Le fluttuazioni cicliche sono caratterizzate da una sequenza di valori superiori al trend seguiti da una serie di valori inferiori (o viceversa).

La differenza sostanziale, a parte la diversa durata, è che la stagionalità ha un andamento regolare e comunque esaurisce il suo effetto in un arco di tempo definito.

I cicli si estendono su un numero variabile di periodi, hanno struttura irregolare e non è noto il loro tempo di compensazione

Natura della componente ciclica

Le cause dei movimenti ciclici sono complesse e nessuna teoria economica non ha ancora formulato una spiegazione esauriente.

Fra i fattori che contribuiscono all'effetto di ciclo ci sono

- **Espansione o contrazione della base monetaria**
- **Variazione nell'acquisto dei beni durevoli**
- **Variazione nelle scorte**
- **Effetti moltiplicativi tra i settori**
- **Influenze dovute a variazioni nei mercati internazionali**
- **Abitudini e fattori psicologici (effetti inerziali)**

Sovrapposizioni

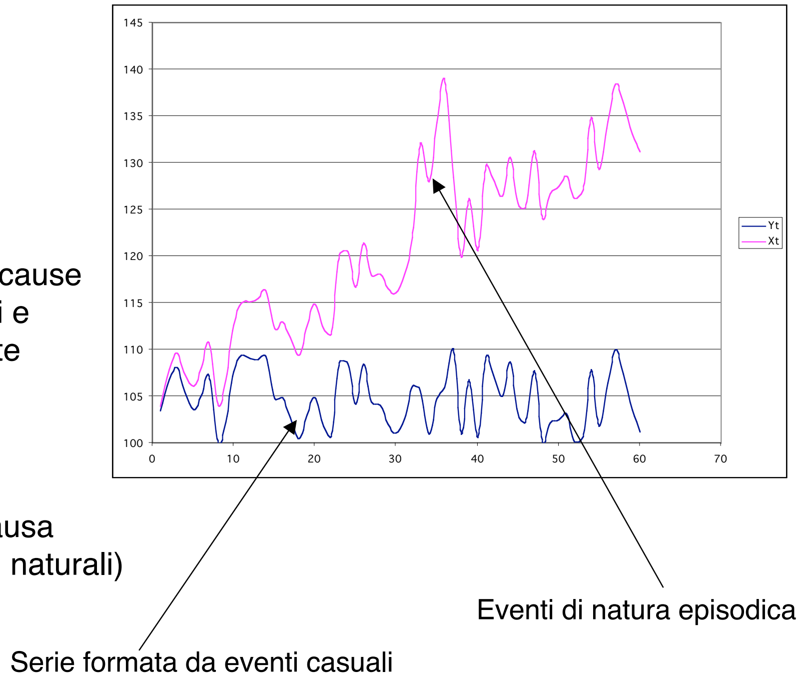
Alle fluttuazioni cicliche si sovrappongono:

Fluttuazioni accidentali

sommatoria di tante piccole cause indipendenti, non osservabili e non prevedibili e destrutturate

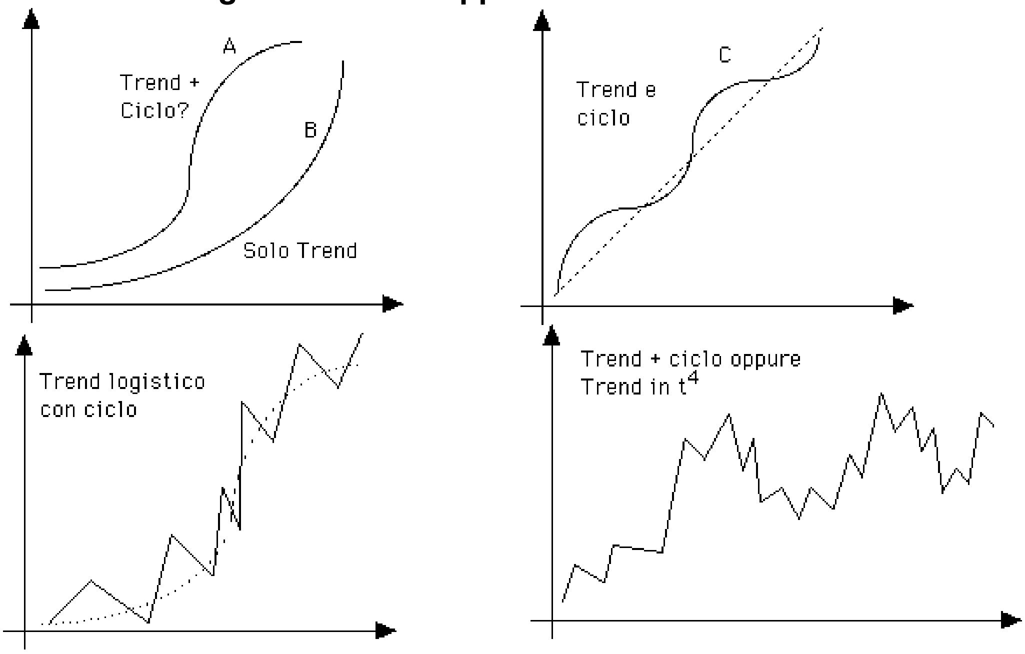
Fluttuazioni episodiche

effetti riconducibili ad una causa specifica (scioperi, catastrofi naturali)



Presenza dei cicli

Non sempre il ciclo è presente. Ad esempio in "B" c'è solo il trend esponenziale. In "C" sono presenti sia il ciclo che il trend, ma in "A" non si può essere sicuri: é un trend logistico o una doppia fase del ciclo?



Quando il polinomio che esprime il trend comincia ad avere un grado troppo elevato è molto verosimile la presenza del ciclo

Ricerca della componente ciclica

Passa attraverso alcune fase convenzionali

Ricerca del movimento ciclico-accidentale ($C_t u_t$)

Si deve individuare l'ntreccio degli effetti dovuti tanto alla componente ciclica cha a quella accidentale

Eliminazione dai valori di Cu dei movimenti accidentali

Si deve quindi filtrare l'effetto Cu dai soli eventi casuali. Lo si ottiene con delle MM

Modellazione della componente C

La descrizione analitica componente ciclica avviene con dei coefficienti che, a differenza di quelli stagionali, non possono essere ripetitivi

Determinazione del ciclo

Partiamo dalla serie in cui non sia presente la stagionalità (o dati annuali oppure dati destagionalizzati).

$$D_t = T_t * C_t * u_t$$

La prima fase consiste nella individuazione, stima e rimozione del trend con la regressione multipla. Dividendo la serie destagionalizzata per i valori stimati del trend avremo

$$\frac{D_t}{\hat{T}_t} \cong \frac{\cancel{T_t} * C_t * u_t}{\cancel{T_t}} \cong C_t * u_t$$

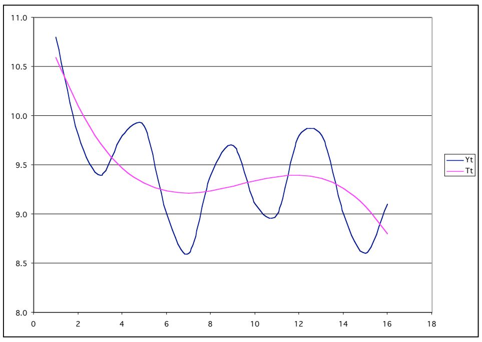
Rapporti di ciclicità

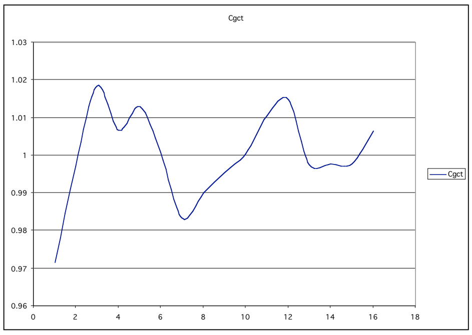
La seconda fase consiste nella eliminazione della componente accidentale con delle opportune medie mobili

$$\hat{C}_t = \sum_{i=-r}^{r} a_i (C * u)_{t+i}$$

Esempio

Anno	Trim	t	Yt	MMt	Cgst	St	Tt	Dt	Cgct
1986	1	1	10.8			1.0493	11.2437	10.2921	0.9154
	2	2	9.8			0.9738	11.2437	10.0638	0.8951
	3	3	9.4	9.838	0.9555	0.9491	11.2437	9.9042	0.8809
	4	4	9.8	9.625	1.0182	1.0278	11.2437	9.5351	0.8480
1987	1	5	9.9	9.425	1.0504	1.0493	11.2437	9.4344	0.8391
	2	6	9.0	9.275	0.9704	0.9738	11.2437	9.2423	0.8220
	3	7	8.6	9.200	0.9348	0.9491	11.2437	9.0613	0.8059
	4	8	9.4	9.188	1.0231	1.0278	11.2437	9.1460	0.8134
1988	1	9	9.7	9.250	1.0486	1.0493	11.2437	9.2438	0.8221
	2	10	9.1	9.350	0.9733	0.9738	11.2437	9.3450	0.8311
	3	11	9.0	9.413	0.9562	0.9491	11.2437	9.4828	0.8434
	4	12	9.8	9.413	1.0412	1.0278	11.2437	9.5351	0.8480
1989	1	13	9.8	9.350	1.0481	1.0493	11.2437	9.3391	0.8306
	2	14	9.0	9.213	0.9769	0.9738	11.2437	9.2423	0.8220
	3	15	8.6			0.9491	11.2437	9.0613	0.8059
	4	16	9.1			1.0278	11.2437	8.8541	0.7875





OUTPUT RIEPILOGO

Statistica della regressione	
R multiplo	0.730969046
R al quadrato	0.534315746
R al quadrato	0.417894682
Errore standa	0.434730023
Osservazioni	16

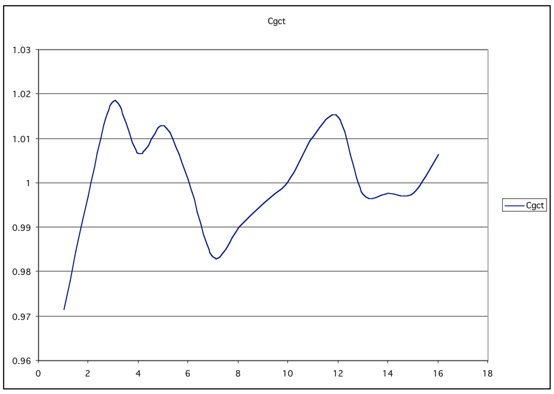
ANALISI VARIANZA

	gdl	*SQ*	*MQ*	*F*	*Significatività F*
Regressione	3	2.602117681	0.86737256	4.589510945	0.023158508
Residuo	12	2.267882319	0.188990193		
Totale	15	4.87			

	Coefficienti	*Errore standard*	*Stat t*	*Valore di significatività*	*Inferiore 95%*	*Superiore 95%*	*Inferiore 95.0%*	*Superiore 95.0%*
Intercetta	11.24368132	0.560462591	20.06143051	1.34573E-10	10.02253826	12.46482438	10.02253826	12.46482438
Variabile X 1	-0.731059738	0.276873201	-2.640413506	0.02155729	-1.33431461	-0.127804867	-1.33431461	-0.127804867
Variabile X 2	0.083969539	0.037256225	2.253839145	0.043693724	0.002795199	0.16514388	0.002795199	0.16514388
Variabile X 3	-0.002989468	0.00144351	-2.070971605	0.060583751	-0.006134607	0.00015567	-0.006134607	0.00015567

La stima del trend
Avviene sui dati originari

Esempio (continua)



Gli effetti del ciclo aumentano con il tempo ovvero la cubica tende a rappresentare meno bene il trend della serie.

Da notare che se non ci fosse il ciclo il grafico dovrebbe essere una linea quasi piatta intorno all'unità.

La presenza/assenza del ciclo è comunque disturbata dalla componente erratica e da turbolenze episodiche che possono alterare la percezione sia delle fasi del ciclo (picchi e valli) che la sua reale portata.

Prima di avventurarsi in considerazioni tecnico-teoriche sul ciclo cerchiamo di ridurre l'impatto degli errori

Procedura alternativa

1) Si elimina l'influenza della stagionalità

$$\frac{y_t}{S_t} = \frac{T_t \ x \ C_t \ x \ S_t \ x \ u_t}{S_t} = T_t \ x \ C_t \ x \ u_t$$

1) Si divide la serie così ottenuta per la stima del trend (una per ogni periodo)

$$\frac{T_t \ x \ C_t \ x \ u_t}{T_t} = C_t \ x \ u_t$$

Le due procedure sono equivalenti e dovrebbero condurre, salvo approssimazione, allo stesso risultato.

La seconda procedura risulta più conveniente quando la serie sia già stata destaginalizzata

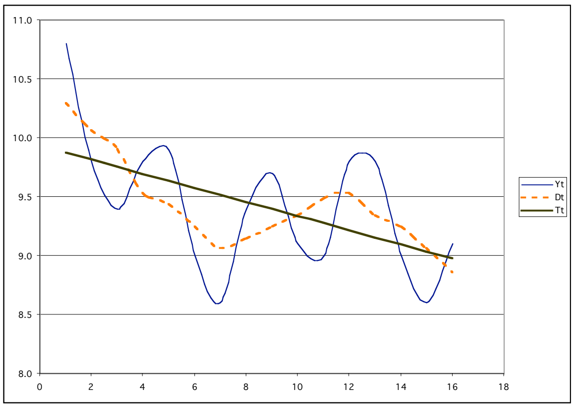
La prima è meno seguita a causa della difficoltà di stimare il trend nella serie originale quando stagionalità e ciclo ne "tormentano" l'andamento.

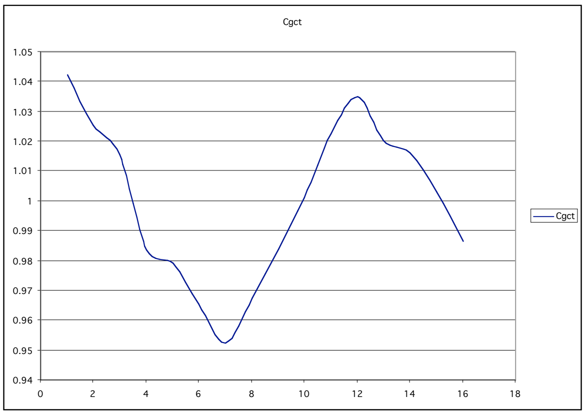
Esempio

Dt/Tt

Anno	Trim	t	Yt	MMt	Cgst	St	Dt	Tt	Cgct					
1986	1	1	10.8			1.0493	10.2921	9.8738	1.0424					
	2	2	9.8			0.9738	10.0638	9.8139	1.0255	1	2	3	4	
	3	3	9.4	9.838	0.9555	0.9491	9.9042	9.7539	1.0154			0.9555	1.0182	
	4	4	9.8	9.625	1.0182	1.0278	9.5351	9.6939	0.9836	1.0504	0.9704	0.9348	1.0231	
1987	1	5	9.9	9.425	1.0504	1.0493	9.4344	9.6339	0.9793	1.0486	0.9733	0.9562	1.0412	
	2	6	9.0	9.275	0.9704	0.9738	9.2423	9.5739	0.9654	1.0481	0.9769			
	3	7	8.6	9.200	0.9348	0.9491	9.0613	9.5139	0.9524					
	4	8	9.4	9.188	1.0231	1.0278	9.1460	9.4539	0.9674					
1988	1	9	9.7	9.250	1.0486	1.0493	9.2438	9.3939	0.9840	1.0491	0.9735	0.9488	1.0275	3.9989
	2	10	9.1	9.350	0.9733	0.9738	9.3450	9.3339	1.0012					
	3	11	9.0	9.413	0.9562	0.9491	9.4828	9.2740	1.0225	**1.0493**	**0.9738**	**0.9491**	**1.0278**	**4.0000**
	4	12	9.8	9.413	1.0412	1.0278	9.5351	9.2140	1.0349					
1989	1	13	9.8	9.350	1.0481	1.0493	9.3391	9.1540	1.0202					
	2	14	9.0	9.213	0.9769	0.9738	9.2423	9.0940	1.0163					
	3	15	8.6			0.9491	9.0613	9.0340	1.0030					
	4	16	9.1			1.0278	8.8541	8.9740	0.9866					

I risultati sono diversi a causa del trend





Depurazione della componente erratica

Per realizzare tale depurazione facciamo ricorso alle MEDIE MOBILI.

il principio che ne motiva l'uso è lo stesso per cui sono state impiegate nella stagionalità, solo che ora non siamo più legati a scegliere un numero di termini dettato dalla frazione d'anno con cui sono rilevati i dati.

La scelta del numero dei termini e dei pesi è ora molto più libera (e quindi più difficile). In realtà è il problema da risolvere

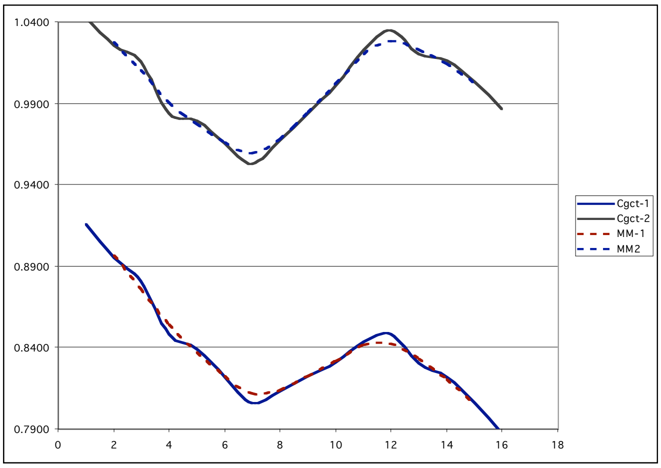
Nell'esempio precedente potremmo benissimo "filtrare" la componente erratica adottando una media mobile di tre termini

Semplice $$\hat{C}_t = \frac{C_{t-1} + C_t + C_{t+1}}{3}; \quad t = 2,3,\dots,n-1$$

Centrata $$\hat{C}_t = \frac{C_{t-1} + 2C_t + C_{t+1}}{4}$$

Esempio

t	Cgct-1	Cgct-2	MM-1	MM2
1	0.9154	1.0424		
2	0.8951	1.0255	0.8966	1.0272
3	0.8809	1.0154	0.8762	1.0100
4	0.8480	0.9836	0.8540	0.9905
5	0.8391	0.9793	0.8371	0.9769
6	0.8220	0.9654	0.8222	0.9656
7	0.8059	0.9524	0.8118	0.9594
8	0.8134	0.9674	0.8137	0.9678
9	0.8221	0.9840	0.8222	0.9842
10	0.8311	1.0012	0.8319	1.0022
11	0.8434	1.0225	0.8415	1.0203
12	0.8480	1.0349	0.8425	1.0281
13	0.8306	1.0202	0.8328	1.0229
14	0.8220	1.0163	0.8201	1.0140
15	0.8059	1.0030	0.8053	1.0022
16	0.7875	0.9866		



La serie dei coefficienti depurati segue troppo da vicino quella dei coefficienti grezzi.
Questo è forse dovuto al ridotto numero di termine della media mobile o al ridotto impatto della erraticità

Finalità della M.M per i cicli

La scelta del numero (dispari) di termini della MM e dei suoi pesi mira a

smussare l'andamento dei coefficienti grezzi di ciclicità

preservare il loro andamento oscillatorio

MM con pochi termini non tradiscono l'andamento, ma potrebbero avere scarso effetto sul lisciamento delle asperità dei Cgc.

MM con molti termini attenuano l'evoluzione tormentata dei Cgc, ma potrebbero impattare eccessivamente sulla sistematicità dei movimenti di espansione e Contrazione

Generalmente sono usate medie mobili di 3, 5, 7 termini. Se è necessario si arriva a MM di 9,11,13,15,21.

A parità di effetti di regolarità e preservazione si devono preferire le medie con meno termini

Scelta della ponderazione

Il sistema dei pesi è di solito:

- Uniforme (pesi tutti uguali) $w=\left[\frac{1}{m},\frac{1}{m},\dots,\frac{1}{m}\right]$

  Le medie semplici sono rispettose dell'andamento dei Cgc, ma lasciano molte irregolarità nei coefficienti filtrati

- Binomiale $\sum_{i=0}^{r}\binom{2r}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r} \Rightarrow \begin{cases} m=3\rightarrow r=1, & w=[0.25,\ 0.50,\ 0.25] \\ m=5\rightarrow r=2, & w=[0.0625, 0.25, 0.375, 0.25, 0.0625] \\ m=7\rightarrow r=3, & w=[0.03125, 0.15625, 0.3125, 0.3125, 0.03125] \end{cases}$

  I pesi binomiali -grazie alla struttura piramidale-conducono a coefficienti puri di ciclicità più regolari e fedeli rispetto alle medie semplici di uguale numero di termini.

- Polinomiale

Esercizio_12

I valori che seguono sono relativi ad una serie già destagionalizzata

Anno	1-Trim	2-Trim	3-Trim	4-Trim
1984	1.79	1.77	1.75	1.68
1985	1.67	1.66	160	1.62
1986	1.63	1.71	1.72	1.70
1987	1.83	1.84	1.95	2.10
1988	2.13	2.11	2.10	2.16

1) Determinate i valori del trend con un polinomio

2) Determinate i coefficienti di ciclicità

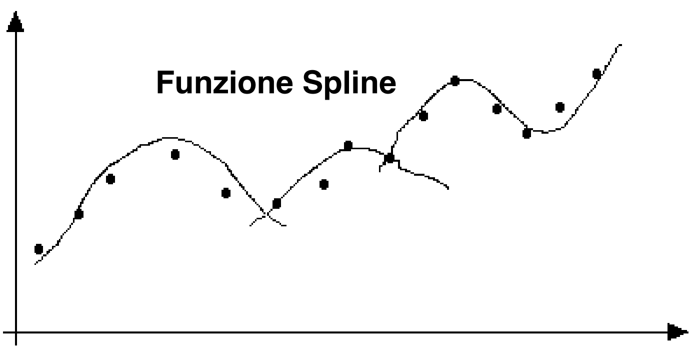
3) Depurate l'erraticità dei precedenti coefficienti con una media mobile centrata a 3 e a 5 termini

Scelta della media mobile

La scelta della media mobile e soprattutto la sua struttura di pesi può essere legata a dei polinomi.

In fondo, quello che si vuole, è lo smussamento della serie dei coefficienti grezzi di ciclicità. Non è però necessario che questo avvenga a livello GLOBALE, ma può avvenire a livello LOCALE.

A livello globale dovremmo usare un polinomio di grado molto elevato, a livello locale possiamo usare una successione di polinomi di grado più basso.



La funzione spline è continua e derivabile in ogni suo punto.

I punti in cui due spline si intersecano si chiamano "nodi"

In questo modo riusciamo a rappresentare con accuratezza i dati e ne controlliamo lo "spianamento" scegliendo opportunamente i polinomi

Media mobile e polinomi

La validità rappresentativa del polinomio non si estende su tutte le rilevazioni, ma è ristretta ad un numero prefissato "m" di termini successivi

I polinomi potrebbero anche essere di grado diverso, ma è convezione sceglierli dello stesso grado "p". In genere "p" va da 2 a 5.

Come è noto, per determinare un polinomio di grado "p" occorrono m =(p+1) punti, ovvero per (p+1) punti passa uno ed un solo polinomio di grado "p".

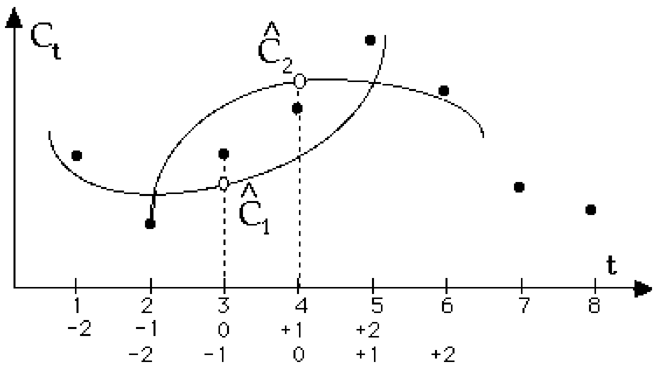
Ad esempio, se p=3 allora "m" deve essere 4 o più.

Se "m" è più grande di "p" il polinomio non è unico e per determinarlo si usa l metodo dei minimi quadrati.

Determinazione dei pesi

Scegliamo delle funzioni cubiche da adattare ad ogni 5 termini della serie

$$C_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3; \quad t = -2, -1, 0, 1, 2$$



dove la "t" è stata traslata, affinché il valore stimato a t=0 coincida con l'intercetta:

$$C_0 = b_0$$

La prima cubica interpola i primi 5 termini della serie (destagionalizzata).

Dobbiamo quindi trovare il minimo -rispetto ai parametri- di

$$\sum_{t=-2}^{2} \left[C_t - b_0 - b_1 t - b_2 t^2 - b_3 t^3 \right]^2$$

Determinazione dei pesi/2

Le matrici coinvolte nella stima dei parametri hanno ora forma generale

$$\left(X^tX\right)=\begin{bmatrix} m & \sum_{t=-2}^{2} t & \sum_{t=-2}^{2} t^2 & \sum_{t=-2}^{2} t^3 \\ \sum_{t=-2}^{2} t & \sum_{t=-2}^{2} t^2 & \sum_{t=-2}^{2} t^3 & \sum_{t=-2}^{2} t^4 \\ \sum_{t=-2}^{2} t^2 & \sum_{t=-2}^{2} t^3 & \sum_{t=-2}^{2} t^4 & \sum_{t=-2}^{2} t^5 \\ \sum_{t=-2}^{2} t^3 & \sum_{t=-2}^{2} t^4 & \sum_{t=-2}^{2} t^5 & \sum_{t=-2}^{2} t^6 \end{bmatrix}; \quad X^ty=\begin{bmatrix} \sum_{t=-2}^{2} C_t \\ \sum_{t=-2}^{2} tC_t \\ \sum_{t=-2}^{2} t^2C_t \\ \sum_{t=-2}^{2} t^3C_t \end{bmatrix}$$

Per come è costruito "t" la somma delle potenze dispari si azzera sempre

Esempi: $\sum_{t=-2}^{2} t = (-2-1-0+1+2) = 0; \quad \sum_{t=-2}^{2} t^3 = (-8-1-0+1+8)$ **=0**

Peraltro è piuttosto semplice calcolare la somma delle potenze pari essendo somme di potenze di interi naturali:

$$\sum_{t=-r}^{r} t^{2n} = 2\sum_{i=1}^{r} i^{2n}; \quad n=1,2,\ldots,$$

Somme dei primi n naturali $S_m(n)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j(i-j)^k\binom{n+m-i+1}{n-i}\binom{m+1}{j}$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}\left(n^2+n\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}\left(2n^3+3n^2+n\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}\left(n^4+2n^3+n^2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{30}\left(6n^5+15n^4+10n^3-n\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{1}{12}\left(2n^6+6n^5+5n^4-n^2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^6 = \frac{1}{42}\left(6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n\right)$$

Determinazione dei pesi/3

La matrice $\left(X^tX\right)$ nel caso di cubica su cinque termini diviene

$$\left(X^tX\right)=\begin{bmatrix}5 & 0 & 10 & 0\\ 0 & 10 & 0 & 34\\ 10 & 0 & 34 & 0\\ 0 & 34 & 0 & 130\end{bmatrix};\quad \left(X^tX\right)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{17}{35} & 0 & \frac{-1}{7} & 0\\ 0 & \frac{65}{72} & 0 & \frac{-17}{72}\\ \frac{-1}{7} & 0 & \frac{1}{14} & 0\\ 0 & \frac{-17}{72} & 0 & \frac{5}{72}\end{bmatrix}$$

Non è necessario stimare tutti i parametri: a noi interessa solo l'intercetta (corrispondente a t=0)

$$\beta_0=\begin{bmatrix}\frac{17}{35} & 0 & \frac{-5}{35} & 0\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\sum_{t=-2}^{2}C_t\\ \sum_{t=-2}^{2}tC_t\\ \sum_{t=-2}^{2}t^2C_t\\ \sum_{t=-2}^{2}t^3C_t\end{bmatrix}=\frac{1}{35}\left[17\sum_{t=-2}^{2}C_t-5\sum_{t=-2}^{2}t^2C_t\right]$$

Determinazione dei pesi/4

Infine, sviluppando le sommatorie, avremo

$$\beta_0=\frac{1}{35}\begin{bmatrix}17C_{-2}+17C_{-1}+17C_0+17C_1+17C_2\\ -20C_{-2}-5C_{-1}-5C_1-20C_2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{35}\left[-3C_{-2}+12C_{-1}+17C_0+12C_1-3C_2\right]$$

Come si vede, il valore stimato di ciclo per i primi 5 termini è una loro media ponderata

I pesi non dipendono dai valori della serie, ma solo dal numero "m" di termini e dal grado del polinomio interpolante.

Per il polinomio cubico ad esempio si ha:

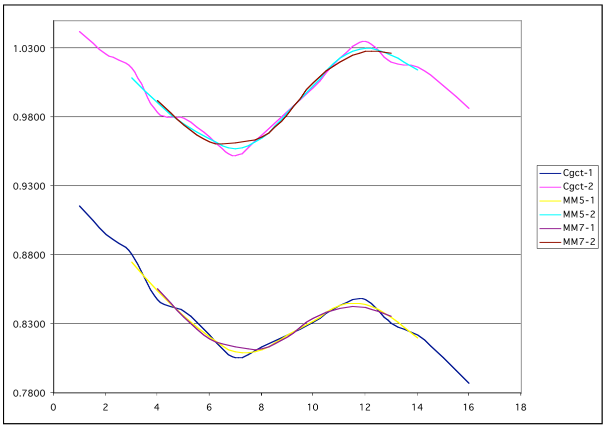
$$m=5\Rightarrow\frac{1}{35}\begin{bmatrix}-3 & 12 & 17 & 12 & -3\end{bmatrix}$$

$$m=7\Rightarrow\frac{1}{21}\begin{bmatrix}-2 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

$$m=9\Rightarrow\frac{1}{231}\begin{bmatrix}-21 & 14 & 39 & 54 & 59 & 54 & 39 & 14 & -21\end{bmatrix}$$

Ancora sull'esempio

t	Cgct-1	Cgct-2	MM5-1	MM5-2	MM7-1	MM7-2
1	0.9154	1.0424				
2	0.8951	1.0255				
3	0.8809	1.0154	0.8751	1.0088		
4	0.8480	0.9836	0.8544	0.9910	0.8555	0.9922
5	0.8391	0.9793	0.8356	0.9752	0.8351	0.9746
6	0.8220	0.9654	0.8208	0.9640	0.8192	0.9620
7	0.8059	0.9524	0.8098	0.9570	0.8133	0.9611
8	0.8134	0.9674	0.8116	0.9653	0.8122	0.9660
9	0.8221	0.9840	0.8218	0.9836	0.8205	0.9821
10	0.8311	1.0012	0.8323	1.0026	0.8344	1.0052
11	0.8434	1.0225	0.8437	1.0229	0.8412	1.0200
12	0.8480	1.0349	0.8442	1.0301	0.8421	1.0276
13	0.8306	1.0202	0.8347	1.0252	0.8355	1.0262
14	0.8220	1.0163	0.8202	1.0141		
15	0.8059	1.0030				
16	0.7875	0.9866				



Nessuna delle medie mobili riesce a modificare l'andamento dei coefficienti grezzi di ciclicità e in nessuna delle due strategie

In questa serie non ci sono, all'apparenza significativi effetti di erraticità

Proprietà delle MM

La procedura è generale. Se ad ogni sequenza di (2r+1) punti adattiamo un polinomio di grado "p" è necessario trovare il minimo di

$$\sum_{-r}^{r}\left[C_{t} - b_0 - b_1 t - b_2 t^2 - \ldots - b_p t^p\right]^2$$

questo porta ad un sistema di (p+1) equazioni con una matrice "a bande" che può essere facilmente risolto. In particolare è necessario trovare "β0".

I pesi così ottenuti hanno le seguenti proprietà

- **Sono simmetrici**
- **Sommano ad uno**
- **Sono gli stessi sia che si adatti un polinomio di grado 2k oppure 2k+1 (adoperando per t i valori simmetrici ...-2,-1,0,1,2,...)**
- **La serie filtrata perde "r" termini all'inizio ed "r" termini alla fine. Tali perdite sono aggiuntive a quelle dovute alla destagionalizzazione**

Ulteriori formule per le medie mobili

Quadratic and cubic

$$m = 11 \Rightarrow \frac{1}{429}\left[-36 \quad 9 \quad 44 \quad 69 \quad 84 \quad 89\right]$$

$$m = 13 \Rightarrow \frac{1}{143}\left[-11 \quad 0 \quad 9 \quad 16 \quad 21 \quad 24 \quad 25\right]$$

Quartic and quintic

$$m = 7 \Rightarrow \frac{1}{231}\left[5 \quad -30 \quad 75 \quad 131\right]$$

$$m = 9 \Rightarrow \frac{1}{429}\left[15 \quad -55 \quad 30 \quad 135 \quad 179\right]$$

$$m = 11 \Rightarrow \frac{1}{429}\left[18 \quad -45 \quad -10 \quad 60 \quad 120 \quad 143\right]$$

$$m = 13 \Rightarrow \frac{1}{2431}\left[110 \quad -198 \quad -135 \quad 110 \quad 390 \quad 600 \quad 677\right]$$

Altre medie mobili

La struttura delle MM è tale da attribuire peso maggiore al termine centrale, mentre, ai termini sempre più distanti dal centro sono attribuiti pesi via via più piccoli o addirittura negativi.

In tal modo l'influenza di un qualsiasi termine anomalo (troppo basso o troppo alto) è prima limitata, aumenta gradualmente e poi, sempre gradualmente, diminuisce.

<u>Spencer 15 punti:</u>

$$m = 15 \Rightarrow \frac{1}{320}\left[-3 \quad -6 \quad -5 \quad 3 \quad 21 \quad 46 \quad 67 \quad 74 \quad 67 \quad 46 \quad 21 \quad 3 \quad -5 \quad -6 \quad -3\right]$$

<u>Henderson 9 punti:</u>

$$m = 9 \Rightarrow \left[-0.041 \quad -0.01 \quad 0.119 \quad 0.267 \quad 0.33 \quad 0.267 \quad 0.119 \quad -0.01 \quad -0.041\right]$$

<u>Henderson 13 punti:</u>

$$m=13 \Rightarrow \left[-0.019 \quad -0.028 \quad 0.000 \quad 0.066 \quad 0.147 \quad 0.214 \quad 0.240 \quad 0.214 \quad 0.147....\right]$$

Altre medie mobili/2

La presenza di pesi negativi ha l'effetto di amplificare le fluttuazioni cicliche accelerando le fasi di espansione e frenando quelle di recessione.

Per serie più lunghe esistono medie mobili con un numero maggiore di termin

Il numero di termini aumenta man mano che aumenta l'influenza della component erratica

L'aumento dei punti peggiora perǫò il grado di adattamento delle spline

Si potrebbe ovviare aumentando il grado del polinomio delle spline, ma il rimedio potrebbe essere peggiore del male.

Si rischia infatti di inserire componenti artificiali nella serie storica

Esempio

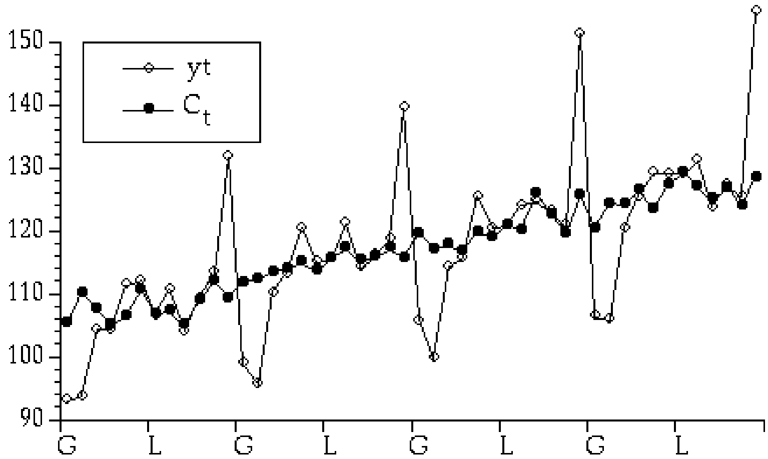
Andamento mensile del commercio al dettaglio

Mese	1984	1985	1986	1987
G	93.09	98.82	105.64	106.39
F	93.69	95.59	99.66	105.80
M	104.29	110.17	114.24	120.44
A	104.34	113.11	115.71	125.37
M	111.31	120.34	125.42	129.07
G	111.98	114.96	120.35	128.98
L	106.55	115.49	120.74	128.95
A	110.65	121.12	124.06	131.02
S	103.93	114.17	124.65	123.77
O	109.23	116.14	123.06	127.21
N	113.28	118.56	120.79	125.38
D	131.65	139.40	151.26	154.75

La stagionalità è presente e sembra costante

Peraltro, il trend è quasi lineare.

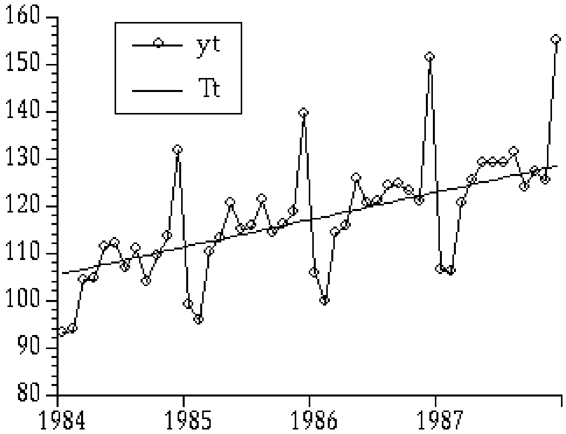
G	0.8840
F	0.8514
M	0.9707
A	0.9923
M	1.0470
G	1.0127
L	0.9980
A	1.0329
S	0.9904
O	1.0035
N	1.0118
D	1.2052



Esempio (continua)

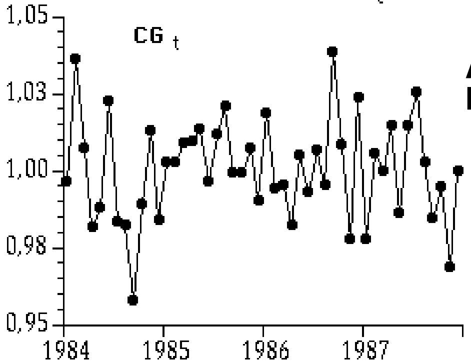
La stima del trend con comporta particolari problemi

$$T_t = \underset{(182.98)}{105.243} + \underset{(23.658)}{0.4835}t; \quad R^2 = 0.923$$

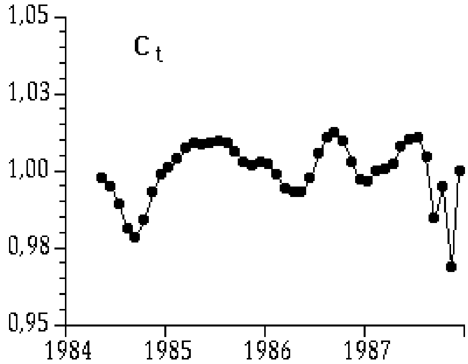


A questo punto occorre calcolare i coefficiente grezzi di ciclicità

$$CG_t = \frac{C_t}{T_t}$$



Applichiamo la Henderson 9

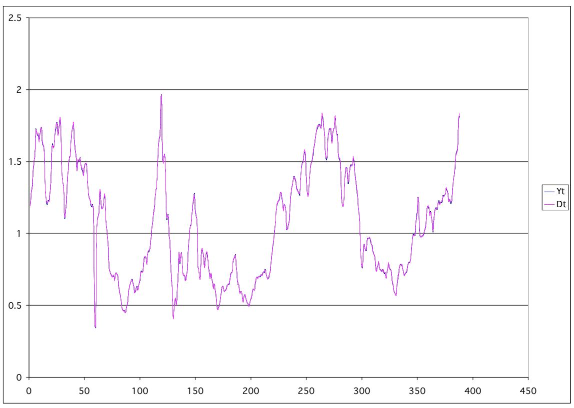


La MM filtra bene la serie

Quarterly S&P 500 index, 1900-1996. Source: Makridakis, Wheelwright and Hyndman (1998)

La serie è già destagionalizzata
Per cui la procedura è qui
Inefficace

C.p.stag.
1.00612
1.00296
1.00089
0.99003



E' evidente la presenza del ciclo

Il trend sembra assente

OUTPUT RIEPILOGO

Statistica della regressione	
R multiplo	0.04172089
R al quadrato	0.00174063
R al quadrato	-0.0008455
Errore standa	0.38377307
Osservazioni	388

ANALISI VARIANZA

	gdl	*SQ*	*MQ*	*F*	*ignificatività F*
Regressione	1	0.09912885	0.09912885	0.67305577	0.41249458
Residuo	386	56.850764	0.14728177		
Totale	387	56.9498929			

	Coefficienti	*rrore standarc*	*Stat t*	*e di significat*	*nferiore 95%*	*uperiore 95%*	*feriore 95.0%*	*uperiore 95.0%*
Intercetta	1.09856455	0.03904169	28.1382392	1.5538E-95	1.0218036	1.1753255	1.0218036	1.1753255
Variabile X 1	-0.0001427	0.00017395	-0.8203998	0.41249458	-0.0004847	0.0001993	-0.0004847	0.0001993

I coefficienti di ciclicità si possono calcolare direttamente sulla serie

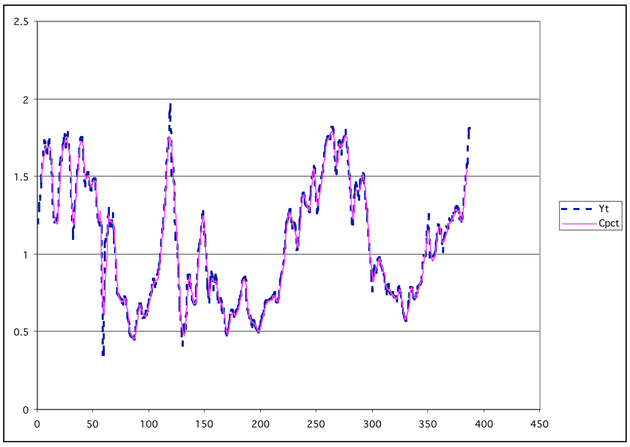
Continua esempio

L'errraticità è stata filtrata con una media mobile polinomiale cubica a 7 termini

L'effetto è nullo

Anche altre MM hanno avuto pochissimo impatto

E' evidente che la serie proposta in esempio era già stata scomposta nei termini dell'approccio classiso



Componente erratica

Le MM isolano la componente ciclica C_t. Ne consegue che i rapporti

$$\frac{CgCic_t}{CpCic_t} = \frac{C_t u_t}{C_t} \cong u_t$$

Hanno natura erratica. Cioè

- Hanno media unitaria
- Sono simmetrici intorno alla media
- Sono fra di loro indipendenti
- Hanno un ordine casuale

Se non è così allora negli e_t è presente una componente sistematica che non è stata individuata nella scomposizione in movimento tendenziale, ciclico, stagionale

Analisi della componente erratica

Per semplificare definiamo gli errori e_t come segue

$$e_t = 100\left[\left(\frac{C_t u_t}{C_t}\right) - 1\right]$$

Cioè scarti dalla media nulla espressi in percentuale

Esistono diversi test di casualità. Secondo Kendall dovrebbero

- Non fare ipotesi restrittive sulla distribuzione da cui si suppone provengano gli errori
- L'idea ispiratrice deve essere semplice e non comportare calcoli onerosi
- Lo schema di calcolo deve essere aggiornabile ad ogni nuovo dato senza dover riprendere tutti i calcoli dall'inizio
- L'ipotesi alternativa deve essere specificata quanto più possibile

Test dei punti di svolta

Si può verificare la casualità contando il numero di picchi ed il numero di valli.

Per definire una svolta sono necessari tre punti consecutivi: e_{i-1}, e_i, e_{i+1} . In una serie di n elementi esistono n-2 terne consecutive (si escludono il primo e l'ultimo termine)

Se la serie fosse casuale allora i 3!=6 possibili ordinamenti sarebbero equiprobabili. Tra questi solo quattro contengono un punto di svolta

A partire dalla variabile indicatore

$$I_t = \begin{cases} 1 & se \quad e_{t-1} < e_t > e_{t+1} \quad oppure \quad e_{t-1} > e_t < e_{t+1} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Il numero dei punti di svolta è

$$p = \sum_{t=1}^{n-2} I_t$$

In caso di valori coincidenti il valore degli e si considera unico riducendo n

Test dei punti di svolta/2

La statistica p ha valore atteso e varianza dati da

$$E(p) = \sum_{t=1}^{n-2} E(I_t) = \sum_{t=1}^{n-2}\left(\frac{4}{6}\right) = \frac{2}{3}(n-2)$$

$$Var(p) = \frac{16n-29}{90}$$

Le misure sulla asimmetria e sulla curtosi indicano una rapida convergenza alla normale. Quindi se il rapporto

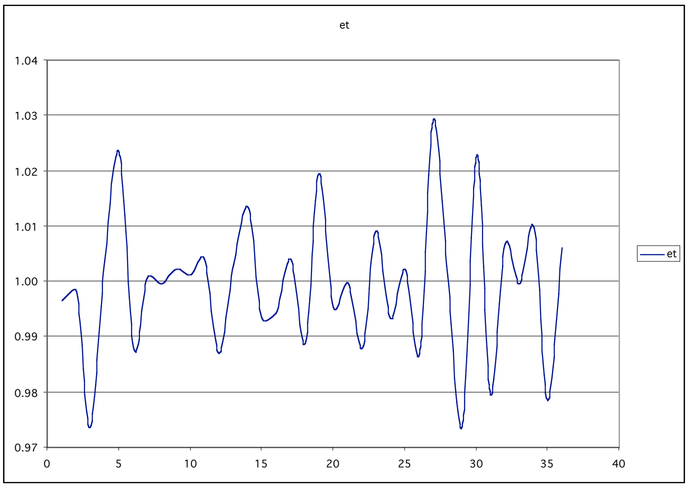
$$\frac{p-\frac{2}{3}(n-2)}{\sqrt{\frac{16n-29}{90}}}$$

È superiore, in valore assoluto a 2.5 rifiutiamo l'ipotesi di casualità

Esempio -Commercio al dettaglio

t	et	It
1	0.9966	
2	0.9982	
3	0.9737	1
4	1.0037	0
5	1.0234	1
6	0.9878	1
7	1.0006	1
8	0.9996	1
9	1.0023	1
10	1.0012	1
11	1.0040	1
12	0.9870	1
13	1.0030	0
14	1.0133	1
15	0.9935	1
16	0.9944	0
17	1.0040	1
18	0.9888	1
19	1.0196	1
20	0.9953	1
21	0.9999	1
22	0.9881	1
23	1.0092	1
24	0.9933	1
25	1.0022	1
26	0.9870	1
27	1.0292	1
28	1.0010	0
29	0.9738	1
30	1.0231	1
31	0.9797	1
32	1.0068	1
33	0.9995	1
34	1.0098	1
35	0.9785	1
36	1.0061	
		29

Grafico degli e_t



=SE(O(E(B104<B105;B105>B106); E(B104>B105;B105<B106)); 1; 0)

$$\frac{\left(29-\frac{2}{3}(36-2)\right)}{\sqrt{\frac{(16\cdot 36-29)}{90}}} = 2.5689$$

C'è un forte sospetto di non casualità, ma forse non vale la pena ripetere i calcoli

Test dei ranghi

Il confronto di valori contigui può essere esteso a tutte le coppie di errori consecutivi.

Data la serie $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bisogna contare il numero “q” di volte in cui si ha $e_j > e_i$ per $j > i$.

Si considerano n(n-1)/2 coppie. Il valore atteso in una serie casuale è

$$E(q) = \frac{n(n-1)}{4}$$

Valori di “q” molto superiori alla media fanno pensare ad un trend crescente non del tutto rimosso dalla serie. Se invece “q” è molto minore della media il trend deve essere ritenuto decrescente.

Calcolo del test dei ranghi

La statistica “q” è legata al famoso “τ” di Kendall nel modo che segue

$$\tau = \frac{4q}{n(n-1)} - 1$$

Che varia tra -1 e 1 ed ha valore atteso nullo in una serie casuale.

Peraltro la sua varianza è

$$\sigma^2(\tau) = \frac{n(2n+5)}{9n(n-1)}$$

Il rapporto tra “t” ed il suo scarto quadratico medio può essere usato per sottoporre a verifica l’ipotesi di casualità

Esempio -Commercio al dettaglio

	0.9982	0.9737	1.0037	1.0234	0.9878	1.0006	0.9996	1.0023	1.0012	1.0040	0.9870	1.0030	1.0133	0.9935	0.9944	1.0040	0.9888	1.0196	0.9953	0.9999	0.9881	1.0092	0.9933	1.0022	0.9870	1.0292	1.0010	0.9738	1.0231	0.9797	1.0068	0.9995	1.0098	0.9785	1.0061	
0.9966	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	
0.9982		1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	
0.9737			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1.0037				0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	
1.0234					1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	
0.9878						1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1.0006							0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	
0.9996								0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	
1.0023									0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	
1.0012										0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	
1.0040										0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	
0.9870											1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	
1.0030												0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	
1.0133													0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	
0.9935														1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	
0.9944															0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	
1.0040																0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	
0.9888																	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	
1.0196																		0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	
0.9953																			1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	
0.9999																				0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	
0.9881																					1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	
1.0092																						0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	
0.9933																							1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	
1.0022																								0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	
0.9870																									1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	
1.0292																										0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	
1.0010																											1	1	1	1	1	1	1	1	1	
0.9738																												1	0	1	0	1	0	1	0	
1.0231																														0	0	0	0	0	0	
0.9797																															1	1	1	1	1	
1.0068																																0	0	1	0	
0.9995																																	0	1	1	
1.0098																																		1	0	
0.9785																																			1	
1.0061																																				
	0	2	0	0	4	3	3	3	3	1	11	4	1	12	12	3	15	1	14	11	19	3	19	10	24	0	13	28	2	28	6	18	5	32	8	318

=SE(E107>F$106;1;0)

$$\frac{\left(4\frac{318}{36\cdot 35}-1\right)}{\sqrt{36\,\frac{(2\cdot 36+5)}{9\cdot 36\cdot 35}}} = 0.0193$$

Il valore diel τ di Kendall è molto prossimo allo zero per cui, almeno sotto questo aspetto della casualità, è da ritenersi priva di struttura

Test dei segni

Consiste nel verificare che i segni degli errori riscalati si susseguano nel tempo in maniera casuale

Una coppia di segni successivi concordi: (+,+) oppure (-,-) costituisce una permanenza P ed una variazione di segni successivi discordi (+,-) (-,+) una variazione V

Ad esempio, la successione

$$- \; - \; + \; - \; + \; - \; + \; + \; - \; - \; + \; + \; + \; - \; - \; + \; - \; - \; + \; + \; + \; + \; - \; - \; + \; +$$

Presenta 25 coppie concatenate di segni a partire da (-,-) e a finire con (+,+)

Segni	+	−	*Totale*
+	7	6	13
−	7	5	12
Totale	14	11	25

Le permanenze sono sulla diagonale e ve ne sono 12
Le variazioni sono fuori diagonale e ve ne sono 13

Test dei segni/2

Se la serie fosse del tutto casuale la tabella di contingenza dovrebbe mostrare indipendenza

Segni	+	−	*Totale*
+	7.28	5.72	13
−	6.72	5.28	12
Totale	14	11	25

Segni	+	−	*Totale*
+	7	6	13
−	7	5	12
Totale	14	11	25

A questo fine si può adoperare il test del chi-quadrato

$$\chi_c^2 = \frac{(7-7.28)^2}{7.28} + \frac{(6-5.72)^2}{5.72} + \frac{(7-6.72)^2}{6.72} + \frac{(5-5.28)^2}{5.28} = 0.051$$

Il valore di probabilità del test (1 grado libertà) è p-value=0.8213 che si può leggere così: se si afferma che la serie è casuale si è in errore 18 volte su cento.

Esempio -Commercio al dettaglio

t	et	- -	++	+ -	- +
1	-0.3400				
2	-0.1784	1	0	0	0
3	-2.6325	1	0	0	0
4	0.3735	0	0	0	1
5	2.3406	0	1	0	0
6	-1.2167	0	0	1	0
7	0.0561	0	0	0	1
8	-0.0428	0	0	1	0
9	0.2343	0	0	0	1
10	0.1159	0	1	0	0
11	0.4016	0	1	0	0
12	-1.2977	0	0	1	0
13	0.2987	0	0	0	1
14	1.3346	0	1	0	0
15	-0.6549	0	0	1	0
16	-0.5628	1	0	0	0
17	0.3998	0	0	0	1
18	-1.1187	0	0	1	0
19	1.9568	0	0	0	1
20	-0.4661	0	0	1	0
21	-0.0104	1	0	0	0
22	-1.1868	1	0	0	0
23	0.9232	0	0	0	1
24	-0.6652	0	0	1	0
25	0.2222	0	0	0	1
26	-1.2964	0	0	1	0
27	2.9236	0	0	0	1
28	0.1017	0	1	0	0
29	-2.6192	0	0	1	0
30	2.3051	0	0	0	1
31	-2.0309	0	0	1	0
32	0.6815	0	0	0	1
33	-0.0458	0	0	1	0
34	0.9819	0	0	0	1
35	-2.1495	0	0	1	0
36	0.6148	5	5	12	12

Segni	+	−	*Totale*
+	5	12	17
−	12	5	17
Totale	17	17	34

$$\chi_c^2 = 5.765 \Rightarrow p-value = 0.0163$$

La casualità dei coefficienti di ciclicità è posta seriamente in discussione da questo test

Coefficienti mancanti

L'uso delle MM per filtrare la componente ciclica dagli errori comporta la perdita di "2r" termini della serie.

A differenza della stagionalità (modello costante) non è possibile recuperare i coefficienti di ciclicità mancanti perchè i cicli hanno struttura variabile.

Poiché la ricostruzione della serie decomposta necessita dei primi e degli ultimi termini questi debbono essere stimati.

In pratica si usa la prima ed ultima delle funzioni interpolanti dopo averne stimato i relativi parametri.

Per ottenere il valore interpolato, si è stimato solo "β0" ora occorre stimare anche "β1", "β2", etc. Noti questi, i valori mancanti si ottengono da:

$$\hat{C}_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$$

Per gli opportuni valori di "t".

Coefficienti mancanti/2

La soluzione è agevole:

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{72}\left[65 \sum_{t=-2}^{2} tC_t - 17 \sum_{t=-2}^{2} t^3 C_t\right] \\ \beta_2 = \frac{1}{14}\left[-2 \sum_{t=-2}^{2} C_t + \sum_{t=-2}^{2} t^2 C_t\right] \\ \beta_3 = \frac{1}{72}\left[-17 \sum_{t=-2}^{2} tC_t + 5 \sum_{t=-2}^{2} t^3 C_t\right] \end{cases}$$

Cubica a 5 termini

Se ora sviluppiamo le somme e raccogliamo a fattore i termini comuni possiamo esprimere i coefficienti come delle medie mobili

$$\hat{C}_t = \frac{1}{35}[-3,12,17,12,-3] + \frac{1}{72}[6,3,0,-3,-6]t + \frac{1}{14}[2,-1,-2,-1,2]t^2 + \frac{1}{72}[-6,12,0,22,6]t^3$$

a questo punto basterà dare a "t" i valori "-2" e "-1" (se siamo alla fine occorre valutare per t=1 e t=2) per ottenere i valori stimati della ciclicità anche per i periodi non coperti da MM.

Coefficienti mancanti/3

La soluzione quindi non è difficile, ma occorre trovarne una per ogni coppia (grado polinomio, numero di termini) e per ogni termine mancante.

Esistono comunque delle tavole che risolvono il problema

ESEMPIO

Estrapolazione	Spline cubica – Termini iniziali		5 termini	Termini finali		Estrapolazione
0	1	2	3	2	1	0
16	69	2	−3	2	−1	−4
−14	4	27	12	−8	4	11
−4	−6	12	17	12	−6	−4
11	4	−8	12	27	4	−14
−4	−1	2	−3	2	69	16
TOTALI 5	70	35	35	35	70	5
	Primo	secondo	Pesi della MM	penultimo	ultimo	

Se la serie dei coefficienti grezzi di ciclicità è

{0.95, 0.97, 1.30, 1.10, 0.94}

Il penultimo valore interpolato è

$$\frac{0.95*2-0.97*8+1.30*12+1.1*27+0.94*2}{35}=1.18$$

L'ultimo è

$$\frac{-0.95*1+0.97*4-1.30*6+1.1*4+0.94*69}{70}=0.92$$

Il primo è

$$\frac{0.95*69+0.97*4-1.30*6+1.1*4-0.94*1}{70}=0.93$$

Il secondo è

$$\frac{0.95*2+0.97*27+1.30*12-1.1*8+0.94*2}{35}=1.05$$

Abbiamo perciò

0.93 1.05 . . . 1.18 0.92

Esempio

Media mobile a 13 termini - Spline cubica. Occorre ricostruire 6 valori all'inizio e 6 valori alla fine

t	Cpct
1	*0.9990*
2	*1.0032*
3	*1.0053*
4	*1.0055*
5	*1.0045*
6	*1.0027*
7	0.9859
8	0.9832
9	0.9830
10	0.9847
11	0.9890
12	0.9953
13	1.0012
14	1.0043
15	1.0059
16	1.0071
17	1.0082
18	1.0086
19	1.0075
20	1.0061
21	1.0046
22	1.0035
23	1.0020
24	1.0001
25	0.9979
26	0.9962
27	0.9938
28	0.9924
29	0.9941
30	0.9979
31	1.0028
32	1.0067
33	1.0076
34	1.0054
35	1.0021
36	0.9989
37	0.9962
38	0.9960
39	0.9987
40	1.0027
41	1.0058
42	1.0067
43	*1.0026*
44	*1.0062*
45	*1.0088*
46	*1.0099*
47	*1.0091*
48	*1.0060*

	6	5	4	3	2	1	Cgt-Fin	Cgt-Ini
1	-33	3	165	77	143	-22	0.9859	0.9979
2	12	0	-44	-33	-132	-22	0.9832	1.0028
3	30	-2	-144	-78	-202	0	0.9830	1.0067
4	28	-3	-156	-72	-116	37	0.9847	1.0076
5	13	-3	-101	-29	77	82	0.9890	1.0054
6	-8	-2	0	37	328	128	0.9953	1.0021
7	-28	0	126	112	588	168	1.0012	0.9989
8	-40	3	256	182	808	195	1.0043	0.9962
9	-37	7	369	233	939	202	1.0059	0.9960
10	-12	12	444	251	932	182	1.0071	0.9987
11	42	18	460	222	738	128	1.0082	1.0027
12	132	25	396	132	308	33	1.0086	1.0058
13	265	33	231	-33	-407	-110	1.0075	1.0067
tot	364	91	2002	1001	4004	1001		

In avanti	1.0060	1.0091	1.0099	1.0088	1.0062	1.0026
All'indietro	0.9990	1.0032	1.0053	1.0055	1.0045	1.0027

=(E2*K2+E3*K3+E4*K4+E5*K5+E6*K6+E7*K7+E8*K8+E9*K9+E10*K10+E11*K11+E12*K12+E13*K13+E14*K14)/E$15

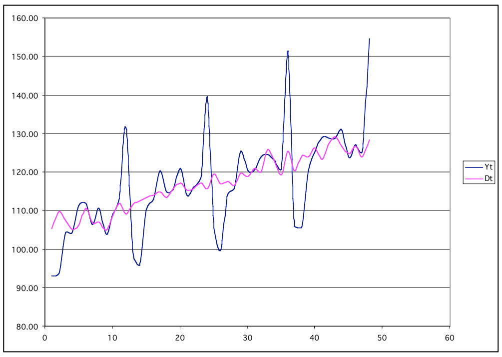
=(E14*L2+E13*L3+E12*L4+E11*L5+E10*L6+E9*L7+E8*L8+E7*L9+E6*L10+E5*L11+E4*L12+E3*L13+E2*L14)/E$15

Il coefficiente di ciclicità ricostruito in avanti è dato dal prodotto scalare dei pesi nella corrispondente colonna per gli ultimi 13 coefficienti osservati

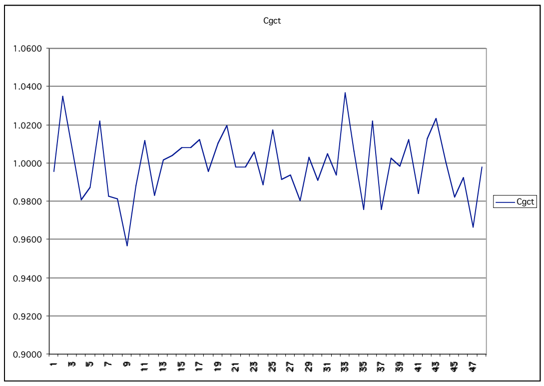
Quello all'indietro è simile: i pesi sono però in ordine inverso e si usano i primi 13 coefficienti grezzi

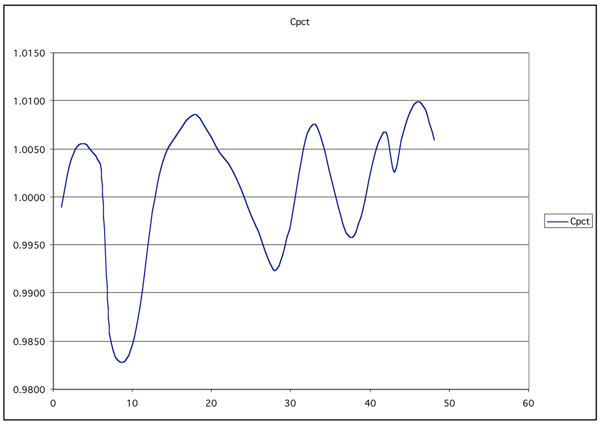
Esempio

Serie +MMstag



C.gr.Cic.





C.p.Cic.

Ricostruzione della serie

Individuati i coefficienti puri di ciclicità, siamo pronti a ricostruire la serie e ad utilizzare i valori stimati per le estrapolazioni

$$\hat{y}_t = \hat{T}_t * \hat{C}_t * \hat{S}_t$$

La stima del trend proietta in avanti (o all'indietro) i fattori di lungo periodo, non ripetitivi, almeno nell'arco di tempo in cui si studia la serie.

La stima del ciclo (i cosiddetti *ciclical relatives*) esprime gli effetti congiunturali (movimenti periodici non ricorrenti) legati all'andamento di medio periodo della economia.

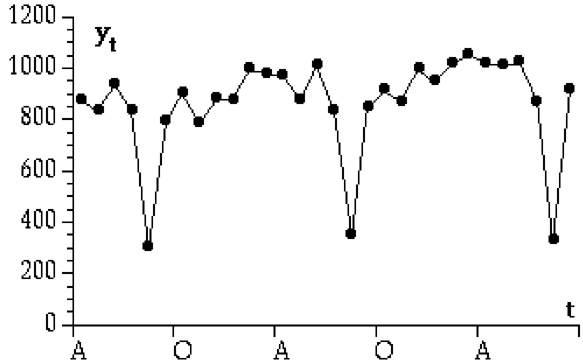
La stima della stagionalità rappresenta i movimenti legati a ricorrenze annuali sistematiche ancorchè irregolari che si verificano nell'arco dell'anno

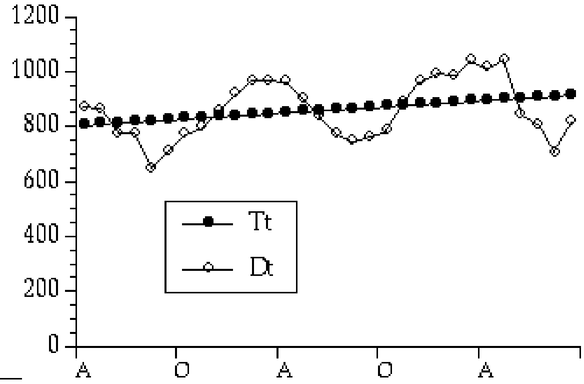
Il valore estrapolato della serie è quindi

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{T}_{t+1} * \hat{C}_{t+1} * \hat{S}_{t+1}$$

Esempio

Mese	yt
A	875.000
M	835.088
G	934.595
L	832.500
A	300.000
S	791.443
O	900.000
N	781.729
D	880.000
G	875.024
F	992.968
M	976.804
A	968.697
M	871.675
G	1006.852
L	832.037
A	345.587
S	849.528
O	913.871
N	868.746
D	993.773
G	946.227
F	1013.375
M	1051.969
A	1019.863
M	1007.722
G	1020.733
L	867.258
A	326.117
S	911.279





Coefficienti di stagionalità ottenuti con la MM di Henderson 13 punti

G	0.9528	
F	1.0268	
M	1.0122	
A	1.0065	
M	0.9661	$\hat{S}_t$
G	1.2065	
L	1.0733	
A	0.4632	
S	1.1162	
O	1.1658	
N	0.9801	
D	1.0304	

Il trend è appena rilevabile comunque è lineare

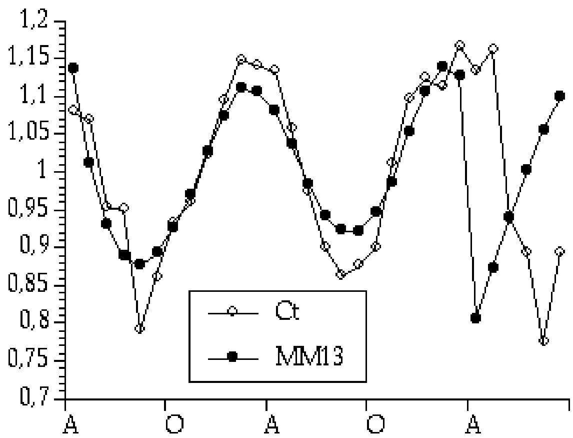
$$T_t = \underset{(20.651)}{801.290} + \underset{(1.714)}{2.747}t$$

Il fitting è pessimo,

$$\bar{R}^2 = 0.06$$

ma l'essenza è colta.

Esempio (continua)



I punti di valle di susseguono circa ogni 13 mesi per cui useremo una MM a 13 termini.

Lo stesso è poi fatto per ricostruire dati mancanti dovuti alla MM.

A questo punto estrapoliamo per il dato Ottobre 3° anno

$$\hat{T}_{31} = 801.29 + 3.747 * 31 = 917.447;$$

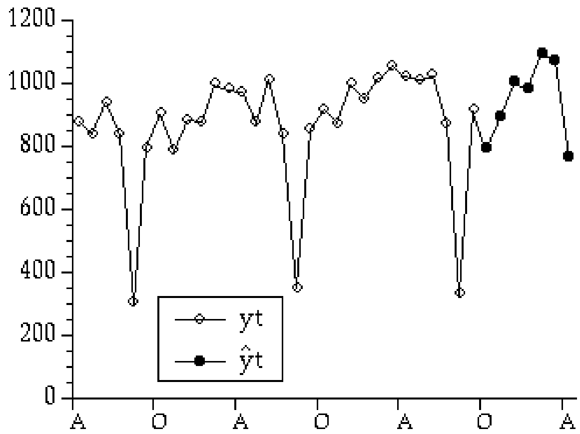
$$\hat{S}_{31} = 1.1658$$

$$\hat{C}_{31} = 0.73866$$

$$\hat{y}_{31} = 917.447 * 1.1658 * 0.73866 = 790.041$$

Per la prima estrapolazione il "Ct" può essere calcolato in base alle tavole. Per le estrapolazioni successive si potrà ritenere i nuovi Ct uguali a quelli dell'ultimo anno

ancora sull'esempio



Con le premesse poste è agevole estrapolare il modello moltiplicativo per i 7 mesi successivi all'ultima rilevazione

Esempio applicativo

Anno	Trimestre	t	Yt
1987	1	1	37.7
	2	2	31.9
	3	3	28.8
	4	4	22.1
1988	1	5	28.2
	2	6	24.1
	3	7	23.4
	4	8	19.6
1989	1	9	24.4
	2	10	21.4
	3	11	22.1
	4	12	19.6
1990	1	13	25.6
	2	14	21.9
	3	15	20.8
	4	16	17.7
1991	1	17	22.2
	2	18	18.7
	3	19	18.4
	4	20	15.2
1992	1	21	19.5
	2	22	16.3
	3	23	15.9
	4	24	15.6

1) Decomporrre la serie storica secondo l'approccio classico-modello moltiplicativo.

$$y_t = T_t x C_t x S_t x u_t$$

2) Rappresentare la serie originaria e la serie ricostruita a partire dai fattori medi

$$\hat{y}_t = Stimatrend \;\; x \;\; CoeffCic \;\; x \;\; CoefStag$$

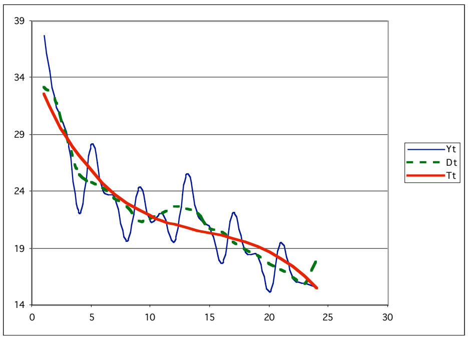
Continua

OUTPUT RIEPILOGO

:istica della regressione	
R multiplc	0.9698
R al quadı	0.9405
R al quadı	0.9316
Errore stı	1.1724
Osservazi	24

Stagionalità

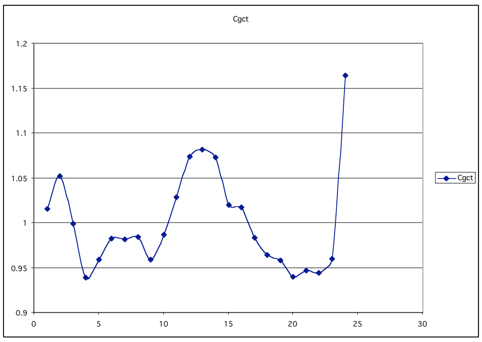
1.1381 0.9929 1.0030 0.8660



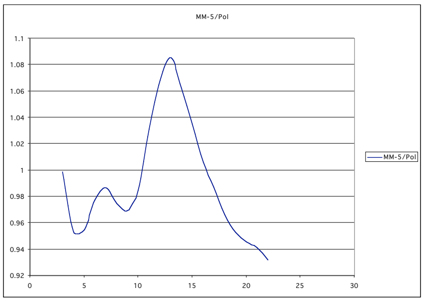
ANALISI VARIANZA

	gdl	SQ	MQ	F	ignificatività F
Regressio	3	434.43	144.81	105.352	2.006E-12
Residuo	20	27.491	1.3745		
Totale	23	461.92			

	Coefficient	ɔre standa	Stat t	di signific	nferiore 95%	uperiore 95%	feriore 95.0%	uperiore 95.0%
Intercetta	34.992	1.1287	31.001	2.2E-18	32.6374426	37.3464102	32.6374426	37.3464102
Variabile	-2.5213	0.3831	-6.5823	2.1E-06	-3.3203738	-1.7223148	-3.3203738	-1.7223148
Variabile	0.1559	0.0352	4.425	0.00026	0.08238477	0.22932898	0.08238477	0.22932898
Variabile	-0.0035	0.0009	-3.805	0.00111	-0.0054628	-0.0015941	-0.0054628	-0.0015941

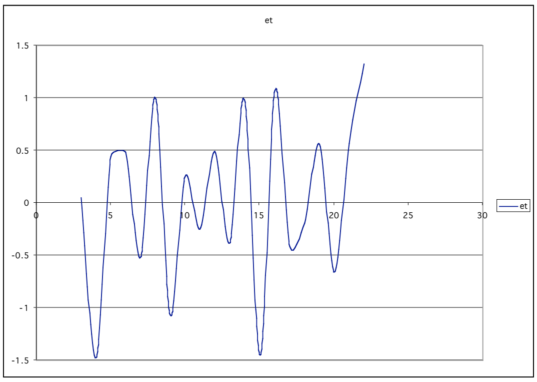


Basta una media a 5 termini per arrivare ai coefficienti puri di ciclicità



Continua/2

Tests dei segni | 9.0168 | 0.0027

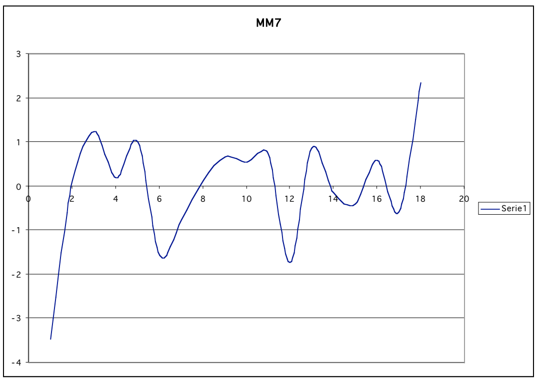


C'è ancora struttura negli errori.
Forse il trend non è stato ben colto

Passiamo ad una media a 7 punti

Tests dei segni | 0.45 | 0.5023

L'andamento è più regolare anche se forse si è intaccata la struttura del ciclo



Esempio

t	Cpct
1	*0.9990*
2	*0.9958*
3	*0.9962*
4	0.9729
5	0.9576
6	0.9701
7	0.9796
8	0.9747
9	0.9744
10	0.9945
11	1.0272
12	1.0665
13	1.0755
14	1.0650
15	1.0380
16	1.0082
17	0.9848
18	0.9684
19	0.9523
20	0.9450
21	0.9250
22	0.9979
23	0.9962
24	0.9938
25	0.9924
26	0.9941
27	0.9979
28	1.0028
29	1.0067
30	1.0076
31	1.0054
32	1.0021
33	0.9989
34	0.9962
35	0.9960
36	0.9987
37	1.0027
38	1.0058
39	1.0067
40	*0.9755*
41	*0.9822*
42	*0.9909*

	0	3	2	1	Cgt-Fin	Cgt-Ini
1	-4	-2	4	1	0.9729	0.9989
2	6	4	-7	-4	0.9576	0.9962
3	4	1	-4	2	0.9701	0.9960
4	-3	-4	6	12	0.9796	0.9987
5	-8	-4	16	19	0.9747	1.0027
6	-4	8	19	16	0.9744	1.0058
7	16	39	8	-4	0.9945	1.0067
tot	7	42	42	42		
In avanti	1.0018	0.9909	0.9822	0.9755		
All'indietro	1.0074	0.9990	0.9958	0.9962		

I calcoli relativi al periodo “0” servono per le previsioni in avanti o all’indietro

Previsione 1° trim 1993

$$T_{25} = 34.992 - 2.5213 * 25 + 0.1559 * 25^2 - 0.0035 * 25^3 = 14.7095$$

$$S_{25} = 1.1381$$

$$C_{25} = 1.0018$$

$$\hat{y}_{25} = 14.7095 * 1.1381 * 1.0018 = 16.771$$

Esercizio_13

Serie trimestrale dei profitti di una industria alimentare

Anno	1 Trim	2 Trim	3 Trim	4 Trim
1984	161	613	614	482
1985	108	583	504	432
1986	187	664	655	614
1987	660	852	982	436

Utilizzando la tecnica della decomposizione delle serie storica estrapolare i valori per tutto l'anno 1988

Periodo	Yt	MM5	Dt					St	
1984	161		261.7		0.3356	0.5092	0.9665	0.6038	0.6153
	613		495.8		1.4060	1.2731	0.9608	1.2133	1.2365
	614	650.6000	647.9	0.9437	0.8881	0.9580		0.9299	0.9477
	482	379.1429	401.5	1.2713	1.2711	0.9917		1.1780	1.2005
1985	108	321.7714	175.5					3.9250	
	583	414.6571	471.5						
	504	567.5143	531.8						
	432	339.8571	359.8						
1986	187	367.2571	303.9						
	664	521.5429	537.0						
	655	683.7143	691.1						
	614	619.1429	511.4						
	660	682.8857	1072.6						
1987	852	886.8000	689.1						
	982		1036.2						
	436		363.2						

Il trend può essere lineare o quadratico

Esercizio_14

Anno	Trim	t	yt
1987	1	1	37.7
	2	2	31.9
	3	3	28.8
	4	4	22.1
1988	1	5	28.2
	2	6	24.1
	3	7	23.4
	4	8	19.6
1989	1	9	24.4
	2	10	21.4
	3	11	22.1
	4	12	19.6
1990	1	13	25.6
	2	14	21.9
	3	15	20.8
	4	16	17.7
1991	1	17	22.2
	2	18	18.7
	3	19	18.4
	4	20	15.2

1) Decomporre la seguente serie storica secondo l'approccio classico

$$y_t = T_t * C_t * S_t * u_t$$

2) Rappresentare graficamente la serie originaria e la serie ricostruita a partire dal prodotto di

Trend stimato*Coeff.Stag.*Coeff.Ciclic.