I diagrammi di stato-spazio*

Appunti per il corso di Microeconomia applicata

I diagrammi di stato-spazio sono strumenti grafici molto utili per rappresentare le preferenze degli individui in condizioni di incertezza, i vincoli che essi affrontano e, quindi, le loro decisioni di assicurazione, nonché le scelte e i profitti delle compagnie assicurative[1].

Ogni punto del diagramma rappresenta la ricchezza (o payoff) di un soggetto in due diversi stati del mondo (ad esempio, nello stato in cui si verifica un furto e quando non si verifica). Indichiamo come stato 1 la situazione in cui non si verifica il furto e rappresentiamo sull'asse delle ascisse la ricchezza, y_1, dell'individuo in questo stato; lo stato 2 rappresenta il caso in cui si verifica il furto e i relativi payoff, y_2, sono indicati sull'asse delle ordinate.

Nel grafico si rappresentano le curve di indifferenza degli individui, definite come le diverse combinazioni di ricchezza nei due stati del mondo che lasciano l'individuo indifferente, cioè con lo stesso livello di utilità attesa.

Prendiamo in considerazione un individuo che debba decidere di assicurarsi contro il furto di un'automobile del valore di 20.000 euro e si denoti con *p* la probabilità che avvenga il furto. Il punto delle dotazioni iniziali, in cui l'individuo non stipula alcuna assicurazione, è *D* $(D_1 = 20.000; D_2 = 0)$: se non si verifica il furto egli dispone di una ricchezza pari a 20.000 euro, che diventa zero in caso di furto.

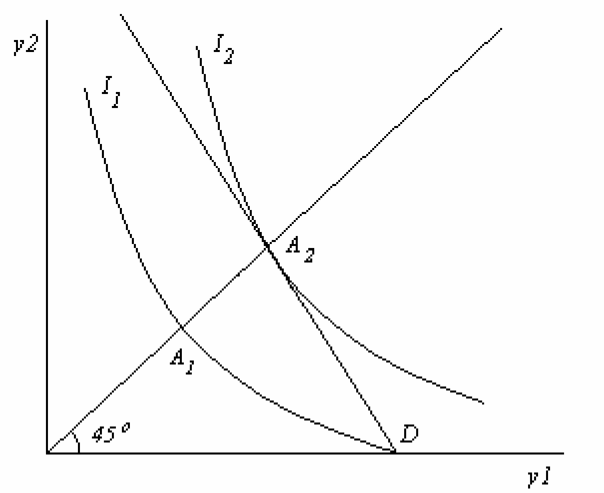


Figura 5.3. Un diagramma di stato-spazio

L'utilità attesa dell'individuo è data da: $U = (1-p)u(y_1) + pu(y_2)$. E' possibile dimostrare che la pendenza delle curve di indifferenza è pari a: $\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{1-p}{p}\frac{u'(y_1)}{u'(y_2)}$. A causa dell'avversione al rischio dell'agente, le curve di indifferenza sono convesse, cioè la pendenza (in valore assoluto) si riduce man mano che ci spostiamo verso destra lungo una certa curva, poiché $u'(y_1)$ diminuisce mentre aumenta $u'(y_2)$.[2]

I punti in cui le curve di indifferenza intersecano la retta inclinata a 45 gradi passante per l'origine (i punti A_1 e A_2 nella Figura 5.3) rappresentano situazioni di assicurazione completa, poiché la ricchezza nei due stati è identica ($y_1 = y_2$). In questi punti la pendenza delle curve di

---

[1] Per una trattazione più approfondita di questo strumento, si può vedere Katz e Rosen (1994), Guiso e Terlizzese (1994), Rasmusen (1994).

[2] Si ricordi che per un individuo avverso al rischio la funzione di utilità è concava e quindi l'utilità marginale è decrescente.

indifferenza, come si può vedere dalla espressione precedente ponendo $y_1 = y_2$, risulta semplicemente pari a: $-(1-p)/p$.

Un individuo che stipula un'assicurazione paga il premio *P* (in ogni stato) e riceve il rimborso *R* in caso di furto. Pertanto, se non avviene il furto l'individuo ottiene la ricchezza iniziale meno il premio: $y_1 = D_1 - P$. In caso di furto, la sua ricchezza è pari al rimborso meno il premio pagato più l'eventuale ricchezza residua (che nell'esempio abbiamo ipotizzato pari a zero): $y_2 = R - P + D_2$. I profitti della compagnia assicurativa sono pari a:

[5.4] $$\Pi = (1-p)(P) + p(P-R) = P - pR$$

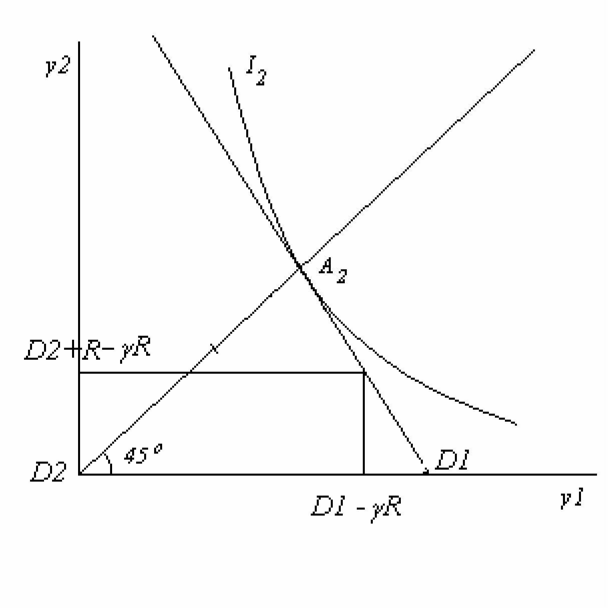
La compagnia ottiene semplicemente il premio P se non si verifica il furto, con probabilità $(1-p)$, mentre quando si verifica il furto incassa il premio P, ma deve pagare il rimborso R all'assicurato.

Sia $P = \gamma R$ dove γ rappresenta il prezzo da pagare all'assicurazione per ogni euro di rimborso R richiesto.

$$\Pi = (1-p)(\gamma R) + p(\gamma R - R) = \gamma R - pR$$

Se $\gamma = p$ l'assicurazione è attuarialmente equa: il rimborso atteso *pR* è uguale al premio pagato: γR. Inoltre, la compagnia assicurativa fa profitti nulli. Questo è anche il risultato tipico di un mercato assicurativo in concorrenza perfetta, in cui la libertà di entrata annulla i profitti delle imprese.

Vincolo di bilancio:



Vincolo di bilancio: $y_2 = a + by_1$

Pendenza Vincolo di bilancio:

$$b = \frac{(D_2 + R - \gamma R) - D_2}{(D_1 - \gamma R) - D_1} = \frac{R - \gamma R}{-\gamma R} = -\frac{1-\gamma}{\gamma}$$

$$y_2 = a - \frac{1-\gamma}{\gamma} y_1 \qquad D_2 = a - \frac{1-\gamma}{\gamma} D_1 \qquad \rightarrow \qquad a = D_2 + \frac{1-\gamma}{\gamma} D_1$$

$$y_2 = \left[D_2 + \frac{1-\gamma}{\gamma} D_1 \right] - \frac{1-\gamma}{\gamma} y_1$$

Supponiamo che $u(y) = \ln(y)$.

La pendenza della curva di indifferenza è: $-\frac{1-p}{p}\frac{1/y_1}{1/y_2} = -\frac{1-p}{p}\frac{y_2}{y_1}$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{p}{\gamma}\frac{1-\gamma}{1-p}$$

Se $p = \gamma$ $\rightarrow$ $y_2 = y_1$ Assicurazione completa

Se $\gamma > p$ $\rightarrow$ $y_1 > y_2$ Assicurazione non completa

$$y_2 = \left[\frac{p}{\gamma}\frac{1-\gamma}{1-p} \right] y_1$$

L'ammontare "assicurato" è tanto minore quanto maggiore è γ

Determiniamo nel diagramma stato-spazio le rette di isoprofitto della compagnia assicurativa, che descrivono le diverse combinazioni di ricchezza dell'individuo nei due stati del mondo che permettono all'impresa di ottenere un dato livello di profitto. Le combinazioni sulla retta di isoprofitto rappresentano contemporaneamente il "vincolo di bilancio" dell'individuo, ovvero l'insieme delle possibilità di assicurazione a sua disposizione.

Nel nostro esempio $y_1 = 20.000 - P$ e $y_2 = R - P$. Ricavando P e R e sostituendoli nell'equazione dei profitti si ottiene: $\Pi = (1-p)(20.000 - y_1) - p(y_2)$, da cui evidenziando y_2 (e ponendo $\Pi = 0$) si ottiene la retta di isoprofitto: $y_2 = \frac{(1-p)20.000}{p} - \frac{(1-p)}{p}(y_1)$. Si noti che la pendenza del vincolo di bilancio è costante ed è pari a $-(1-p)/p$.

Siccome nel punto di scelta ottimale dell'agente il vincolo di bilancio (o retta di isoprofitto) deve essere tangente alla curva di indifferenza, cioè deve avere la stessa pendenza, ne deriva che l'agente sceglie di assicurarsi completamente (in modo tale che nei due diversi stati percepisce lo stesso reddito netto). Infatti, la pendenza della curva di indifferenza è uguale a $-(1-p)/p$ solo quando essa è tagliata dalla retta a 45°. Ciò costituisce una conferma del risultato generale (si veda l'appendice al capitolo 2) che un contratto assicurativo equo, stipulato tra una compagnia neutrale e un agente avverso al rischio, conduce a un'assicurazione completa dell'agente.