

$$X = X^+ - X^-$$

$$X^+(\omega) = \max(X(\omega), 0)$$

$$X^-(\omega) = -\min(X(\omega), 0)$$

$$F_{X^+}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ F_X(0) & 0 = t \\ F_X(t) & 0 < t \end{cases}$$

$$F_{X^-}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - F_X(0) & 0 = t \\ 1 - F_X(-t) & 0 < t \end{cases}$$

$$F_{X^+}(t)$$

N.B. $X^+(\omega) = \max(X(\omega), 0) \geq 0$

if $t < 0$ $\{\omega \in \Omega : X^+(\omega) \leq t\} = \text{events impossible}$

if $t = 0$ $\{\omega \in \Omega : X^+(\omega) \leq 0\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq 0\}$

if $0 < t$ $\{\omega \in \Omega : X^+(\omega) \leq t\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}$

$$F_{X^-}(t)$$

N.B. $X^-(\omega) = -\min(X(\omega), 0) \geq 0$ $\min(X(\omega), 0) \leq 0$

if $t < 0$ $\{\omega \in \Omega : X^-(\omega) \leq t\} = \text{events impossible}$

if $t = 0$ $\{\omega \in \Omega : X^-(\omega) \leq 0\} = \{\omega \in \Omega : \min(X(\omega), 0) \geq 0\} =$
 $= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 0\}$

if $t > 0$ $\{\omega \in \Omega : X^-(\omega) \leq t\} = \{\omega \in \Omega : \min(X(\omega), 0) \geq -t\} =$
 $= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq -t\}$

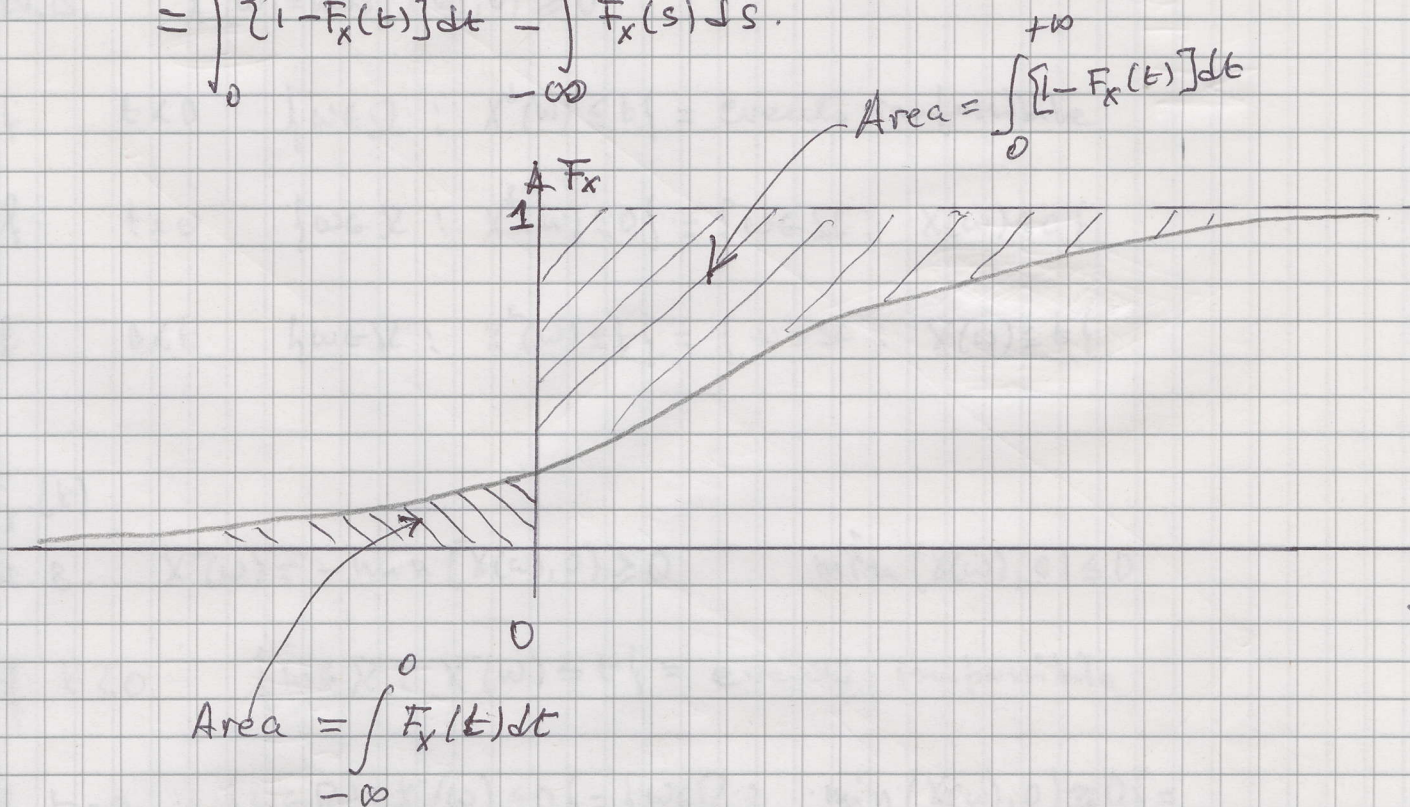
$$E[X] = E[X^+] - E[X^-] = \int_0^{+\infty} [1 - F_{X^+}(t)] dt - \int_0^{+\infty} [1 - F_{X^-}(t)] dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} [1 - F_X(t)] dt - \int_0^{+\infty} [1 - (1 - F_X(-t))] dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} [1 - F_X(t)] dt - \int_0^{+\infty} F_X(-t) dt = \int_0^{+\infty} [1 - F_X(t)] dt + \int_0^{-\infty} F_X(s) ds =$$

set $s = -t$ $ds = -dt$

$$= \int_0^{+\infty} [1 - F_X(t)] dt - \int_{-\infty}^0 F_X(s) ds.$$



J possiede un capitale certo $C=100 \text{ €}$, considera se accettare una scommessa a "testa o croce" (moneta equilibrata)

in cui si vince 50 € se esce TESTA e si perde 40 se esce CROCE.

Si assuma che J abbia una funzione di utilità logaritmica:

$$u(c) = \lg c$$

La posizione iniziale $X_1 = c$, la posizione finale $X_2 = c + G$

$$G = \begin{cases} +50 & \text{prob}(T) = \frac{1}{2} \\ -40 & \text{prob}(C) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

La v.a. guadagno G rappresenta

una scommessa favorevole, in quanto

$$E[G] = \frac{1}{2}50 - \frac{1}{2}40 = 5 > 0$$

Utilità attese sono per la

posizione iniziale $E[u(X_1)] = \lg 100 = 4,60517$

posizione finale $E[u(X_2)] = \frac{1}{2} \lg 150 + \frac{1}{2} \lg 60 = 4,5524899$

Si ha

$$E[u(X_2)] - E[u(X_1)] = 4,5524899 - 4,60517 = -0,0526801$$

Nonostante favorevole l'operazione di scambio $X_1 \rightarrow X_2$ è

SVANTAGGIOSA per J .

Si consideri il caso che I possieda un capitale $C' = 300 \text{ €}$

La posizione iniziale $X_1 = C'$, la posizione finale $X_2 = C' + G$

$$E[u(X_1)] = \lg 300 = 5,70378$$

$$E[u(X_2)] = \frac{1}{2} \lg 350 + \frac{1}{2} \lg 260 = 5,709307$$

Si ha quindi

$$E[u(X_2)] - E[u(X_1)] = 5,709307 - 5,70378 = +0,005527.$$

vale a dire l'operazione di scambio $X_1 \rightarrow X_2$ è ora vantaggiosa.

N.B

$$a) \quad E[X_1] = 100$$

$$m_u[X_1] = 100$$

$$E[X_2] = 105$$

$$m_u[X_2] = e^{4,5524899} = 94,86832713$$

b)

$$E[X_1'] = 300$$

$$m_u[X_1'] = 300$$

$$E[X_2'] = 305$$

$$m_u[X_2'] = 301,6619441.$$

Ricordando che il coefficiente di avversione al rischio, $r(t)$

$$r(t) = - \frac{u''(t)}{u'(t)} = - \frac{\frac{d^2}{dt^2} \lg t}{\frac{d}{dt} \lg t} = - \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{1}{t}$$

all'aumentare del capitale, l'avversione al rischio diminuisce (nel caso di utilità logaritmica).



$$\text{var}[X_2] = \frac{1}{2}150^2 + \frac{1}{2}60^2 - 105^2 = 13'050 - 11'025 = 2'025$$

$$\text{var}[X'_2] = \frac{1}{2}350^2 + \frac{1}{2}260^2 - 305^2 = 95'050 - 93'025 = 2'025$$

d'altra parte

$$\text{var}[X_2] = E[(X_2 - E[X_2])^2] = \frac{1}{2}(150 - 105)^2 + \frac{1}{2}(60 - 105)^2 = \frac{1}{2}(45^2 + 45^2)$$

$$\text{var}[X'_2] = E[(X'_2 - E[X'_2])^2] = \frac{1}{2}(350 - 305)^2 + \frac{1}{2}(260 - 305)^2 = \frac{1}{2}(45^2 + 45^2)$$

N.B. $\text{var}[X_2] = \text{var}[X'_2]$ ma $E[X'_2] > E[X_2]$ coerente,

Nel caso specifico, verifichiamo se ad incrementi positivi Δt uguali di capitale corrispondono incrementi di utilità tanto più piccoli quanto più grande è il capitale posseduto dall'individuo:

$$t_1 < t_2, \Delta t > 0 \quad u(t_1 + \Delta t) - u(t_1) > u(t_2 + \Delta t) - u(t_2)$$

$$t_1 = 100 \quad t_2 = 300 \quad \Delta t = 50 \quad \lg 150 - \lg 100 = 5,010635294 - 4,605170186 = 0,4054651081$$

$$\lg 350 - \lg 300 = 5,857933154 - 5,703782475 = 0,1541506793$$

$$t_1 = 60 \quad t_2 = 260 \quad \Delta t = 40$$

$$\lg 100 - \lg 60 = 4,605170186 - 4,094344562 = 0,5108256238$$

$$\lg 300 - \lg 260 = 5,703782475 - 5,560681631 = 0,1431008436,$$

Disuguaglianza di Jensen

$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è concava nel dominio I , se $\forall t_1, t_2 \in I$ e

$\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+$, $p_1 + p_2 = 1$ si ha

$$(1) \quad p_1 u(t_1) + p_2 u(t_2) \leq u(p_1 t_1 + p_2 t_2)$$

equivalentemente se

$\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in I$ $\forall p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^+$, $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ si ha

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n p_k u(t_k) \leq u\left(\sum_{k=1}^n p_k t_k\right)$$

Se X è una v.a. discreta con un n° finito di valori $t_1, t_2, \dots, t_n$ che possono essere assunti con probabilità $p_1, p_2, \dots, p_n$, rispettivamente ed u è concava

allora

$$E[u(X)] = \sum_{k=1}^n p_k u(t_k) \leq u\left(\sum_{k=1}^n p_k t_k\right) = u(E[X])$$

Se inoltre u è crescente in I e quindi invertibile:

$$M_u[X] := u^{-1}(E[u(X)]) \leq u^{-1}(u(E[X])) = E[X].$$

sempre nell'ipotesi che u sia concava (limitata in I)
ed X continua (assolutamente), ~~con~~ valori in I ,

$$E[u(X)] = \int_I u(t) dF_X(t) < u\left(\int_I t dF_X(t)\right) = u(E[X]).$$

nel caso X a valori in un sottoinsieme numerabile di I

$$E[u(X)] = \sum_{I^0} p_k u(t_k) < u\left(\sum_k p_k t_k\right) = u(E[X])$$