

Università degli Studi della Calabria

Corso di tecnica attuariale delle assicurazioni sociali

# Le assicurazioni sulla salute

# *Le assicurazioni sulla salute*

fanno parte delle "Assicurazioni di persone"

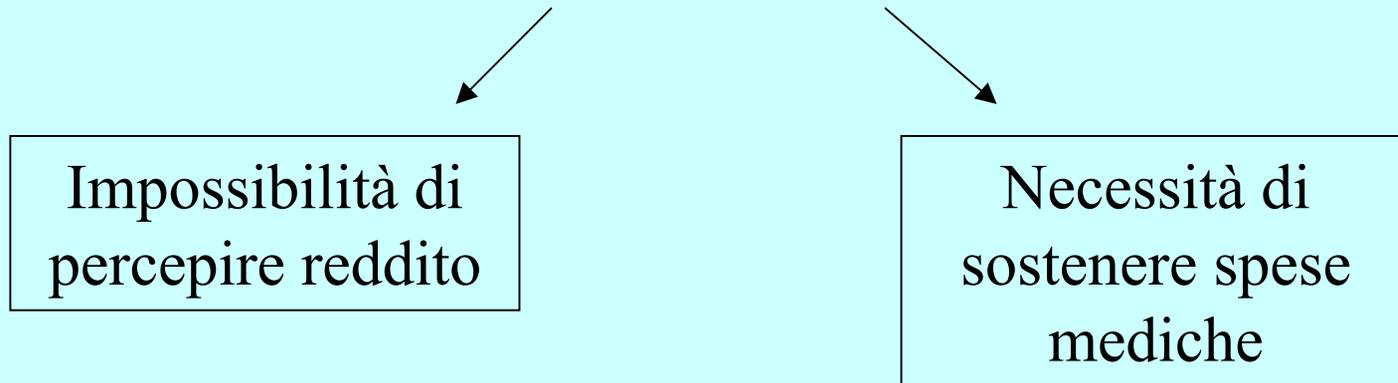


## **Forme di assicurazione sulla persona**

- Assicurazioni sulla durata di vita
  - o Rischio di:  
Mortalità; Natalità; Nuzialità
- Assicurazioni sulla salute
  - o Rischio di:  
Morbilità; Invalidità; Non autosufficienza

# *Le assicurazioni sulla salute*

- Forme di copertura assicurativa che intervengono a fronte di situazioni che si vengono a creare in seguito ad *alterazioni* del normale stato di salute dell'assicurato



✓ In Italia: assenza di una visione unitaria → frammentazione a livello giuridico e tecnico-attuariale tra Rami Vita e Rami Danni

**danno alla persona**



*Categoria non  
disciplinata  
dall'ordinamento  
assicurativo  
italiano*

Assicurazioni monoannuali  
(assicurazioni “infortuni” e  
“malattia”) → l'assicuratore  
è esposto ad esborsi aleatori  
nell'importo e nel numero



Ramo danni

Assicurazioni pluriennali di  
lunga durata → problemi  
relativi alla sopravvivenza  
dell'assicurato nel tempo



Ramo vita

# *Le assicurazioni sulla salute*

- **Assicurazioni malattia**
- **Assicurazioni infortuni**
- ***Permanent Health Insurance (PHI)*** → *rendita d'invalidità (professionale) non necessariamente permanente*
- **Dread Disease o Critical Illness Cover (DD)** → capitale in caso di malattia grave
- **Long Term Care (LTC)** → rendita per non autosufficienza

# *Allegato al d. lgs. 17 marzo 1995, n. 174*

## Classificazione dei rischi per ramo (6 rami VITA)

- I. Le assicurazioni sulla *durata della vita umana*.
- II. Le assicurazioni di *nuzialità e natalità*.
- III. Le assicurazioni di cui al punto I e II connesse con *fondi di investimento*.
- IV. L'assicurazione *malattia* di cui all'art. 1, n. 1, lettera d), della direttiva CEE n. 79/267 del 5 marzo 1979.
- V. Le *operazioni di capitalizzazione* di cui all'art. 40 del presente decreto.
- VI. Le *operazioni di gestione di fondi collettivi* costituiti per l'erogazione di prestazioni in caso di morte, in caso di vita o in caso di cessazione o riduzione dell'attività lavorativa.

# *Allegato al d. lgs. 17 marzo 1995, n. 175*

Classificazione dei rischi per ramo - 18 rami DANNI tra cui:

1. *Infortuni* (compresi gli infortuni sul lavoro e le malattie professionali):  
prestazioni forfettarie;  
indennità temporanee;  
forme miste;  
persone trasportate.
2. *Malattia*:  
prestazioni forfettarie;  
indennità temporanee;  
forme miste.

# *Le assicurazioni sulla salute: entità delle prestazioni*

Rimborso totale  
o parziale di un costo  
sostenuto dall'assicurato

Ammontare  
forfettario  
indipendente  
dalla perdita  
di reddito

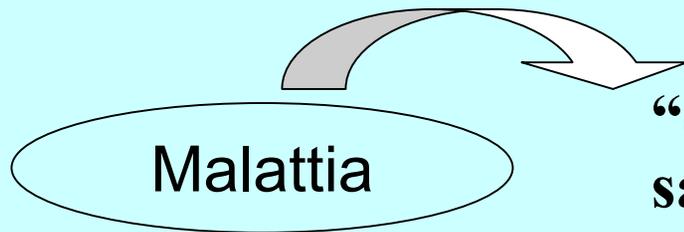
Prestazione  
prefissata sostitutiva  
del reddito da lavoro

## *Natura delle prestazioni*

- **Prestazione *risarcitoria*** : sostitutiva (del sistema sanitario pubblico); integrativa (rimborso spese per una migliore assistenza)
- **Prestazione *monetaria*** (capitale; rendita)
- **Prestazione di *servizio*** (assistenza, cure ospedaliere, ecc.)

# *L'assicurazione malattia*

# *L'assicurazione malattia*



**“ogni alterazione dello stato di salute non dovuta a causa esterna o violenta”**

## **Le forme di assicurazione**

- Rimborso spese mediche (o di cura)
- Diaria in caso di ricovero (per infortunio e malattia)
- Invalidità permanente da malattia (pagamento capitale assicurato)
- Inabilità temporanea da malattia (pagamento diaria assicurata)

**Inabilità** → incapacità di svolgere la propria professione

**Invalidità** → incapacità di svolgere qualsiasi professione

**Incapacità di conseguire reddito da lavoro**

Parziale o totale/ temporanea o permanente ←

# *Rimborso spese mediche*

❑ **Forma completa:** totale rimborso delle spese mediche ( o di cura) sostenute in occasione del ricovero ospedaliero a causa di infortunio o malattia

❑ **Forma integrativa (o con scoperto):** rimborso delle spese realmente sostenute dall'assicurato in caso di ricovero ospedaliero con deduzione delle spese sostenute dal SSN e/o da altra polizza malattia (o con deduzione fissa del 25% sull'indennizzo)

✓ Con franchigia: per limitare il costo e garantire un massimale sensibilmente più elevato

# *Indennità giornaliera da ricovero*

Corresponsione di una data somma di denaro per ogni giorno di degenza (indennità giornaliera indicata nel contratto) → importo forfettario

In genere è previsto nei casi di degenza presso ospedali o istituti di cura a seguito di:

- Malattia
- Infortunio
- Parto

✓ *Spesso contratte da categorie professionali che non dispongono di un salario in caso di interruzione di attività lavorativa*

- ✓ Alla garanzia rimborso spese mediche può essere abbinata la condizione “grandi interventi chirurgici”
- ✓ Contratti particolari indirizzati alla copertura delle “malattie oncologiche”

### **Decorrenza della garanzia:**

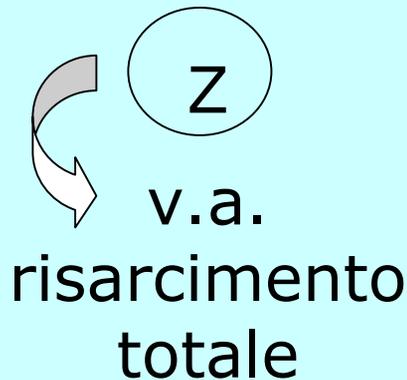
- *Per gli infortuni: dal momento in cui ha effetto l'assicurazione*
- *Per le malattie: dal 30° giorno successivo*

***Osservazione statistica e  
valutazione del premio equo  
nell'assicurazione malattia***

# *Coperture monoannuali*

- Un contratto, nel corso di un anno di copertura, può essere colpito da più sinistri
- ...che comportano un esborso, per l'assicuratore, di un ammontare aleatorio **Z**

**CALCOLO DEL PREMIO → “principio di equità”**

  
v.a.  
risarcimento  
totale

$$E(Z) = \text{premio } \underline{\text{equo}} \text{ } \underline{\text{puro}} = U$$

Rende nulla la  
speranza matematica  
del guadagno

Tiene conto solo dei  
risarcimenti e non delle  
spese

# *Coperture monoannuali*

**Hp**

Uniforme distribuzione dei sinistri e dei risarcimenti nell'anno di contratto

Premio equo puro

$$U = E(Z) v^{1/2}$$

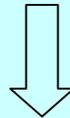
Dove:  $v = 1/(1+i)$

## BASI TECNICHE

- Tasso tecnico di interesse  $i$
- Distribuzione di probabilità di  $Z$

# *Scomposizione dell'esborso atteso annuo*

- Un contratto, nel corso di un anno di copertura, può essere colpito da più sinistri
- La prestazione dell'assicuratore dipende dall'entità del singolo sinistro
- Le statistiche disponibili sono in genere relative ai singoli sinistri



Obiettivo è pervenire alla seguente scomposizione:

$$\begin{array}{l} \textit{esborso atteso annuo} \\ (E(Z)) \end{array} = \left( \begin{array}{l} \textit{esborso atteso per} \\ \textit{singolo sinistro} \end{array} \right) * \left( \begin{array}{l} \textit{numero atteso} \\ \textit{annuo di sinistri} \end{array} \right)$$

# *Scomposizione dell'esborso aleatorio*

$$N = (0,1,2,\dots)$$

Numero aleatorio di sinistri  
che colpiscono il rischio  
durante l'anno di copertura

$$Z^{(j)} \text{ con } j = 1,2,\dots,N$$

Esborso aleatorio  
dell'assicuratore relativo  
al j-esimo sinistro

Per definire  $N$  e  $Z^{(j)}$  bisogna conoscere:

- a) La definizione di "sinistro"
- b) La definizione delle prestazioni dell'assicuratore al verificarsi di un sinistro
- c) Eventuali particolari condizioni di copertura (condizioni di polizza)

### c) **Eventuali particolari condizioni di copertura:**

- Massimali di importo
- Massimali di durata
- Franchigie
- Periodo iniziale di carenza

$C^{(j)}$  = costo aleatorio a carico dell'assicuratore  
imputabile al sinistro  $j$

$Z^{(j)} = C^{(j)} \rightarrow$  garanzia illimitata

$Z^{(j)} = \min(C^{(j)}, M) \rightarrow$  massimale  $M$

$Z^{(j)} = \max(C^{(j)} - f, 0) \rightarrow$  franchigia assoluta  $f$

$Z^{(j)} = 0$  se  $C^{(j)} < f$ ;  $Z^{(j)} = C^{(j)}$  se  $C^{(j)} \geq f \rightarrow$  franchigia relativa  $f$

# *Scomposizione dell'esborso aleatorio*

- Risarcimento aleatorio totale nell'anno di copertura

$$Z = \sum_{j=0}^N Z^{(j)}$$

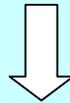
- Probabilità che si verifichino  $n$  sinistri nell'anno di copertura

$$\pi_n = \Pr\{N = n\}$$

→ PREMIO UNICO PURO

$$U = E(Z) = \sum_{n=1}^k \pi_n \cdot E(Z|N = n)$$

$$U = E(Z) = \sum_{n=1}^k \pi_n \cdot \sum_{j=1}^n E(Z^{(j)} | N = n)$$

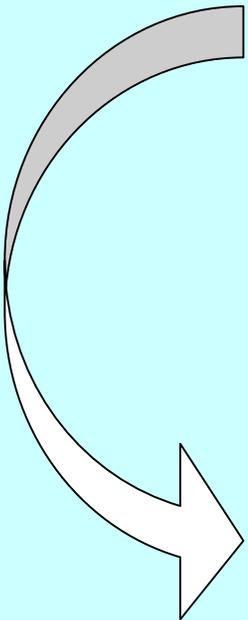


- Si ipotizza:
- uguale distribuzione delle  $Z^{(j)}$
  - $Z^{(j)}$  stocasticamente indipendenti da  $N$

$$E(Z) = E(N) \cdot E(Z^*)$$



Generica v.a. avente distribuzione uguale a quella comune alle  $Z^{(j)}$



<p>esborso atteso annuo</p>	$=$	$\left[ \begin{array}{c} \textit{numero atteso} \\ \textit{annuo di sinistri} \end{array} \right]$	$*$	$\left[ \begin{array}{c} \textit{esborso atteso per} \\ \textit{singolo sinistro} \end{array} \right]$
-------------------------------------	-----	--	-----	--

# *Valutazione del premio equo in base all'osservazione statistica*

Quantità provenienti da una rilevazione statistica



Valutazione numerica del premio equo

- Periodo di copertura: *1 anno*
- Collettività di rischi "analoghi":  $r$
- Numeri di sinistri annui registrati tra gli  $r$  rischi:  $s$
- Costi dei sinistri:  $c_1, c_2, \dots, c_s$

→ (*assicurazione di tipo risarcitorio*)

Stima di  $E(Z)$

Quota danni:  $Q = \frac{c_1 + \dots + c_s}{r} = \frac{s}{r} \cdot \bar{c}$

(Numero medio di sinistri pro-capite) ← Indice di sinistrosità ← Costo medio per sinistro

- Numero massimo di sinistri che colpiscono un singolo rischio  $\rightarrow h$
- Numero di rischi colpiti nell'anno da  $j$  sinistri  $\rightarrow r_j$

Numero di sinistri  $\rightarrow s = r_1 + 2r_2 + \dots + hr_h$

$$\Rightarrow \frac{s}{r} = \left( \frac{r_1 + 2r_2 + \dots + hr_h}{r_1 + r_2 + \dots + r_h} \right) \left( \frac{r - r_0}{r} \right) = \rho \alpha = \phi$$

$\nearrow r_1 + r_2 + \dots + r_h$

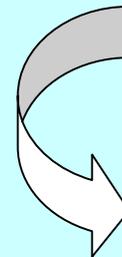
dove:

$$\rho = \frac{r_1 + 2r_2 + \dots + hr_h}{r_1 + r_2 + \dots + r_h}$$

**Indice di ripetibilità**

$$\alpha = \frac{r - r_0}{r}$$

**Frequenza di “almeno un sinistro”**



**Quota danni**

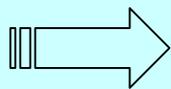
$$Q = \phi \cdot \bar{c}$$

# *Il caso della prestazione di diaria*

- Durate in giorni delle malattie verificatesi  $\rightarrow g_1, g_2, \dots, g_s$

$$\longrightarrow \bar{g} = \frac{g_1 + \dots + g_s}{s} \quad \text{Durata media in giorni}$$

- Numero medio di sinistri pro-capite  $\rightarrow \psi = \frac{S}{r}$
- Importo della diaria  $\rightarrow b$



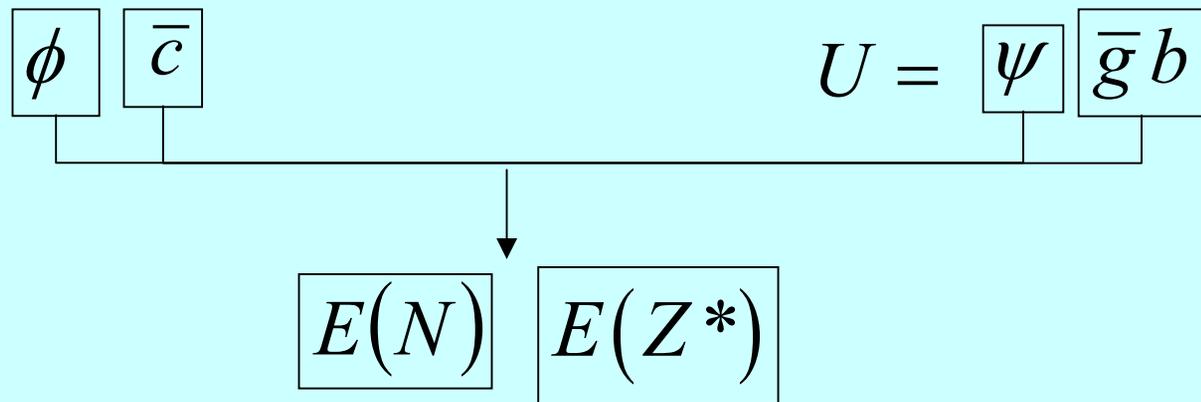
$$\text{Quota danni: } Q = \psi \bar{g} b$$

Dove:  $\psi \bar{g} = \frac{S}{r} \bar{g}$  rappresenta il *coefficiente di morbilità*

Prestazione di rimborso spese mediche → **Quota danni** =  $\phi \cdot \bar{c}$

Prestazione di diaria → **Quota danni** =  $\psi \bar{g} b$

- La quota danni rappresenta l' "immagine statistica" del premio equo ottenuto attraverso la matematica attuariale.



→  $U = \phi \cdot \bar{c} \cdot v^{1/2}$

$U = \psi \cdot \bar{g} \cdot b \cdot v^{1/2}$

# *Le classi di rischio*

Suddivisione della collettività assicurata in classi di rischio  
→ rischi sufficientemente “*analoghi*”

## Fattori di rischio oggettivo

- Caratteristiche fisiche
- Condizioni contrattuali
- Condizioni socio-economiche

## Fattori di rischio soggettivo

- Atteggiamento personale nei confronti della salute

Se si considera unicamente il fattore età  $y$ :

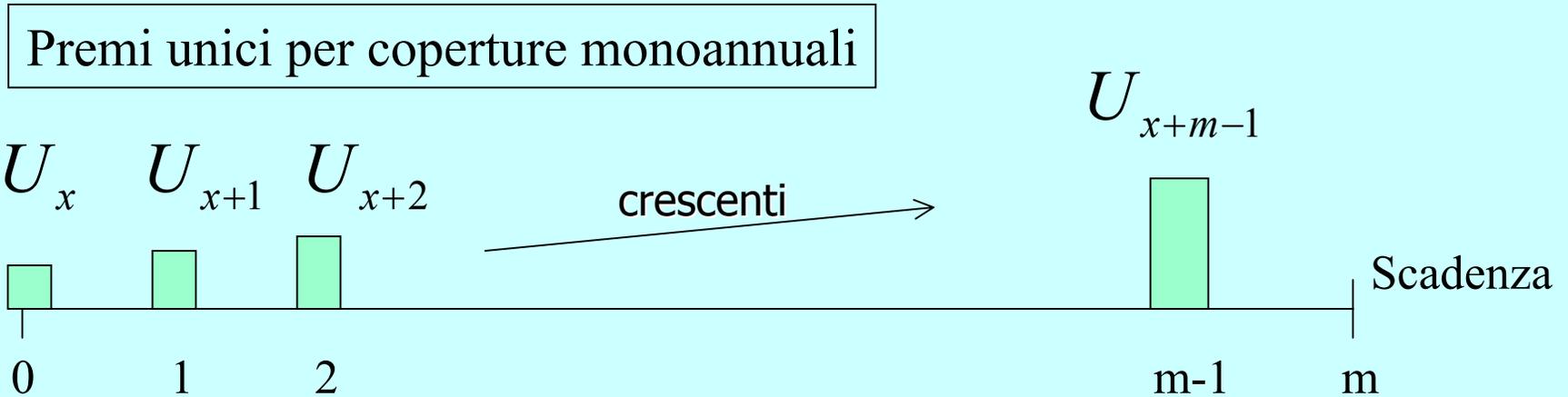
$$U_y = \phi_y \cdot \bar{c}_y \cdot v^{1/2}$$

$$U_y = \psi_y \cdot \bar{g}_y \cdot b \cdot v^{1/2}$$

Generalmente sono assunti costanti al variare dell'età

# *Coperture pluriennali*

➔ Valutazione del premio sul base monoannuale



Il premio unico per coperture pluriennali

$U_{x,m} =$  *Somma dei premi delle coperture monoannuali  
attualizzati in senso finanziario e demografico*

# *Coperture pluriennali*

${}_h P_x$  → Probabilità di sopravvivenza per un assicurato di età  $x$  all'ingresso in assicurazione

- Durata della copertura:  $m$  anni

PREMIO UNICO PURO      *Rimborso spese mediche:* ↘

$$U_{x,m} = \sum_{h=0}^{m-1} {}_h P_x \cdot v^h \cdot U_{x+h} = \sum_{h=0}^{m-1} {}_h P_x \cdot \phi_{x+h} \cdot \bar{c}_{x+h} \cdot v^{h+1/2}$$

*Diaria:* → 
$$U_{x,m} = \sum_{h=0}^{m-1} {}_h P_x \cdot \psi_{x+h} \cdot \bar{g}_{x+h} \cdot b \cdot v^{h+1/2}$$

Premi su base monoannuale CRESCENTI

In alternativa: valutazione di un premio annuo costante

$$P_{x,m} = \frac{\sum_{h=0}^{m-1} {}_h P_x \cdot v^h \cdot U_{x+h}}{\sum_{h=0}^{m-1} {}_h P_x \cdot v^h}$$



Sia per la copertura rimborso spese mediche, sia per la diaria

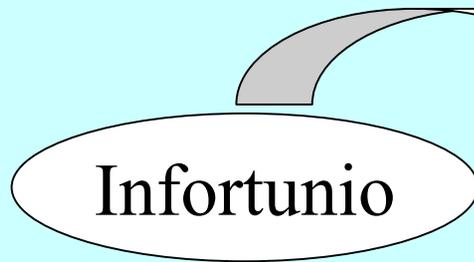
# *L'assicurazione infortuni*

# *L'assicurazione infortuni*

## **Scopo:**

la prestazione di determinati benefici nel momento in cui l'assicurato a causa di infortunio subisce un danno

- Adozione unitaria delle condizioni generali
- Altre norme che disciplinano il contratto → lasciate alla libera contrattazione



*“un evento dovuto a causa fortuita, violenta ed esterna che produce lesioni corporali obiettivamente constatabili, che abbiano come conseguenza la morte o un’invalidità permanente o un’inabilità temporanea”*

- **Le prestazioni**

- *Capitale* in caso di decesso
- *Capitale* in caso d'invalidità permanente, totale o parziale; (in funzione del “*grado*” di invalidità)
- *Diaria* in caso d'inabilità temporanea causata da infortunio

- **Le forme di assicurazione**

- Assicurazione infortuni professionali
- Assicurazione infortuni extraprofessionali
- Assicurazione infortuni completa

*a) polizze individuali*

*b) polizze collettive*

# *Indennizzo per morte*

L'indennizzo è dovuto se la morte si verifica – anche successivamente alla scadenza della polizza – entro due anni dal giorno dell'infortunio

**Liquidazione ai beneficiari designati o, in difetto di designazione, agli eredi in parti uguali**

- *Indennizzo non cumulabile con quello per invalidità permanente*

Se la morte si verifica dopo la liquidazione dell'indennizzo per invalidità permanente:

*differenza tra indennizzo per morte ed indennizzo per invalidità permanente già liquidato*

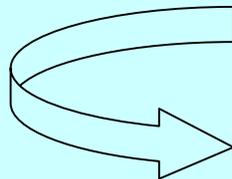
# *Indennizzo per invalidità permanente*

L'indennizzo è dovuto se l'invalidità permanente si verifica – anche successivamente alla scadenza della polizza – entro 2 anni dal giorno dell'infortunio

Invalidità  
permanente parziale



Indennizzo calcolato sulla somma assicurata per invalidità permanente totale, in proporzione al grado d'invalidità accertato secondo determinati criteri e percentuali



TABELLA

## TABELLA

In cui sono indicate le % attribuibili in caso di "Perdita totale anatomica o funzionale" di determinate parti del corpo

	Destro	Sinistro
Un arto superiore	70%	60%
Una mano o un avambraccio	60%	50%
Un pollice	18%	16%
Un indice	14%	12%
Un piede	40%	40%
Ambedue i piedi	100%	100%
Un alluce	5%	
Un arto inferiore sopra il ginocchio	60%	
Un occhio	25%	
Ambedue gli occhi	100%	
Un rene	20%	
La milza	10%	
Sordità completa da un orecchio	10%	
Sordità completa da due orecchi	40%	
Perdita totale della voce	30%	
Vertebre dorsali	10%	
12° dorsale	7%	
Cinque lombari	12%	

## *Indennizzo per inabilità temporanea*

- ❑ Dovuto integralmente per ogni giorno in cui l'assicurato si è trovato nella totale incapacità fisica di attendere alle sue occupazioni;
- ❑ al 50% per ogni giorno in cui l'assicurato non ha potuto attendere che in parte alle sue occupazioni



**Prestazione  
DIARIA**

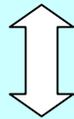
- ✓ Corresponsione per un periodo massimo di 365 giorni
- ✓ Indennizzo cumulabile con quelli dovuti per invalidità permanente o per morte

# *Le condizioni aggiuntive*

Limitative



clausole adottate per limitare  
il rischio



- Limitare il massimo indennizzo
- Coinvolgere maggiormente l'assicurato
- Motivi di natura speculativa
- Politiche aziendali

Estensive



riguardano la copertura

## **Franchigie:**

- per invalidità permanente
- per inabilità temporanea

assoluta

relativa

# *Osservazioni*

- Importanza del fattore *età*
- *Attività professionale* svolta dall'assicurato: parametro essenziale per la valutazione del rischio

Le osservazioni statistiche suggeriscono quanto segue:

- La *dipendenza tra età ed infortunio* è abbastanza debole, ma diversificata al variare della professione.
- Professioni particolarmente rischiose dal punto di vista infortunistico rivelano:
  - ✓ Frequenza *decrescente* al crescere dell'età (maggiore esperienza)
  - ✓ Durata media dell'inabilità temporanea *crescente* con l'età in cui si verifica l'infortunio
- Elevata frequenza d'infortunio ad età basse (20-25)
- L'andamento della *frequenza di decesso* per infortunio è lievemente crescente fino ai 50-55 anni; dopo i 55 anni crescita più accentuata

***Osservazione statistica e  
valutazione del premio equo  
nell'assicurazione infortuni***

# *Diaria in caso d'inabilità temporanea*

❑ Durata monoannuale

❑ Stima del numero medio di giorni di inabilità per ogni caso di infortunio  $\longrightarrow$   $\boxed{\bar{g}}$

❑ Stima del numero medio di casi d'infortunio per contratto in un anno (frequenza annuale)  $\xrightarrow{E(N)}$   $\boxed{\psi}$

❑ Importo Diaria:  $\longrightarrow$  **b**

Premio unico puro  $\Rightarrow$   $\boxed{U = \psi \cdot \bar{g} \cdot b \cdot v^{1/2}}$

✓ E' importante dare rilievo all'età dell'assicurato:

$$U_y = \psi_y \cdot \bar{g}_y \cdot b \cdot v^{1/2}$$

# *Assicurazioni monoannuali di capitale in caso d'invalidità permanente da infortunio*

➤ E' necessario quantificare il “grado” di invalidità causato da infortunio e l'importo della *somma assicurata*.

$\Gamma$  : v.a. che esprime il grado aleatorio di invalidità causata dal generico infortunio

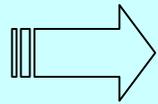
$$\text{Premio equo puro} = \left[ \begin{array}{c} \text{numero atteso} \\ \text{di infortuni} \end{array} \right] \times \left[ \begin{array}{c} \text{esborso atteso per} \\ \text{singolo infortunio} \end{array} \right]$$

$$U = E(Z) = E(N) \cdot S \cdot E(\Gamma)$$

*somma  
assicurata*

*grado medio  
di invalidità*

# *Valutazione del premio in base all'osservazione statistica*



Collettività di  $r$  rischi assicurati "analoghi" in cui si registrano  $s$  infortuni

$\gamma_1, \dots, \gamma_s$  Gradi di invalidità verificatisi negli  $s$  sinistri

$$\bar{\gamma} = \frac{\gamma_1 + \dots + \gamma_s}{s} \quad \text{Grado medio d'invalidità}$$

Se tutti i contratti hanno uguale somma assicurata  $S$ :

Quota danni:

$$Q = S \cdot \frac{s}{r} \cdot \bar{\gamma}$$

# *Assicurazione monoannuale di capitale in caso di decesso da infortunio*

Copertura che prevede il pagamento della somma assicurata,  $S$ , qualora l'assicurato *deceda* a causa del verificarsi dell'infortunio

Premio equo puro:  $U = S \pi$

Dove  $\pi$  è la probabilità del verificarsi di tale evento



Uniforme distribuzione dei sinistri e dei risarcimenti nell'anno di contratto

$$U = S \cdot \pi \cdot v^{1/2}$$

# *Il modello multistato*

# *Il modello probabilistico “Multistato” - 1*

Consente di riassumere la "*storia assicurativa*" di ciascun individuo mediante la rappresentazione dei possibili stati assunti dall'individuo in un istante di tempo.

## DEFINIZIONE DI MODELLO MULTISTATO

- Spazio degli stati  $\{1,2,\dots,N\}$
- Insieme delle transizioni dirette tra stati

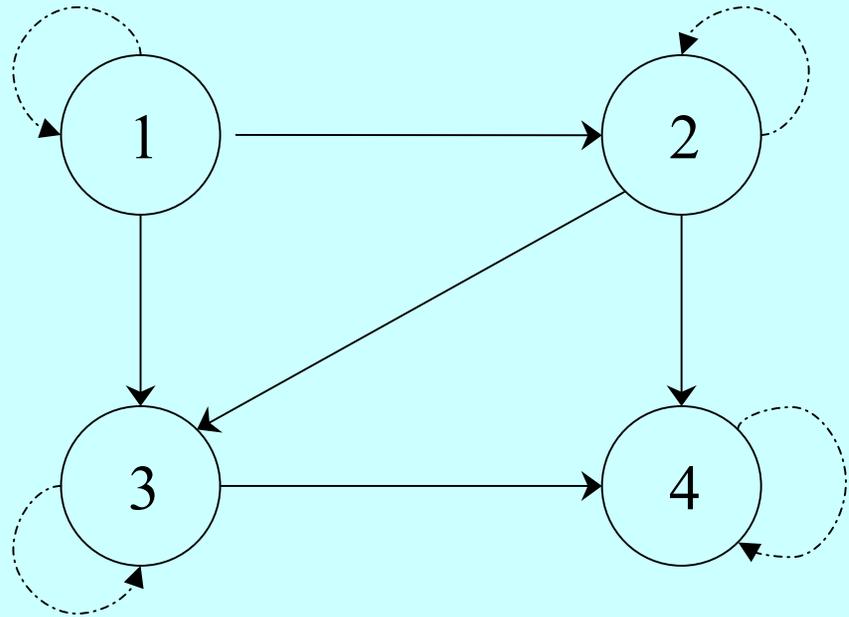
L'evoluzione di un rischio può essere descritta in termini di presenza del rischio, in ogni istante di tempo, in un determinato stato appartenente ad uno specificato insieme di stati

# *Il modello probabilistico “Multistato” - 2*

ESEMPIO:

Modello multistato a 4 stati

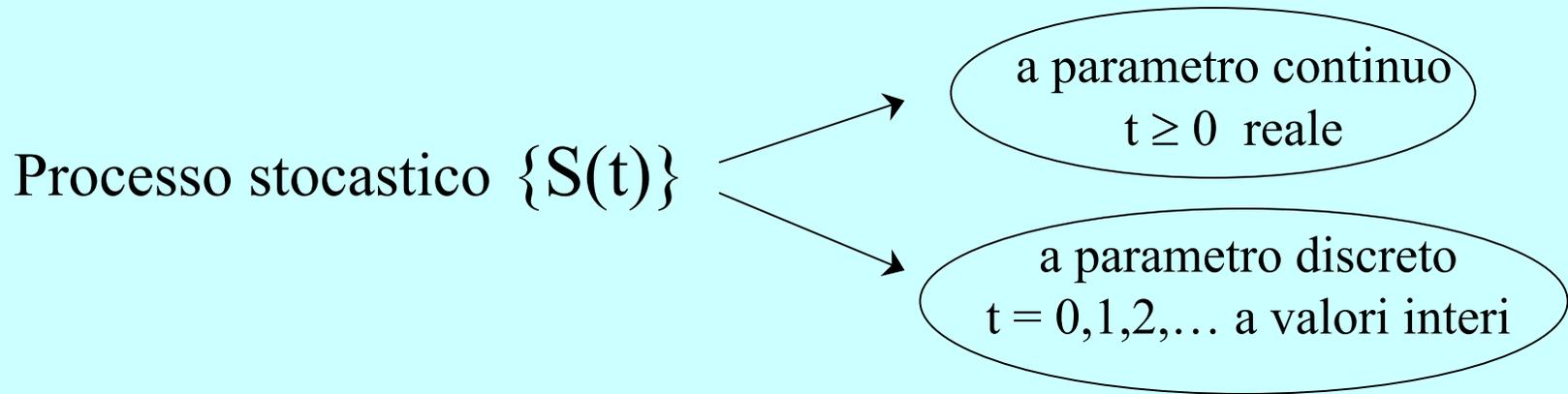
- *Spazio degli stati: (1,2,3,4)*
- *transizioni possibili:  $1 \rightarrow 2$ ,  $1 \rightarrow 3$ ,  $2 \rightarrow 3$ ,  $2 \rightarrow 4$ ,  $3 \rightarrow 4$*



**S(t)**: stato aleatorio occupato dall'assicurato all'epoca t ( $t \geq 0$ )

L'insieme degli stati aleatori occupati dall'assicurato costituiscono il **processo stocastico  $\{S(t)\}$** , con t parametro operativo

# *Il modello probabilistico “Multistato” - 3*



Modelli discreti

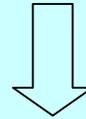
Assegnazione di probabilità di transizione tra stati che si riferiscono ad intervalli di tempo di ampiezza determinata

Modelli continui

Assegnazione di intensità istantanee di transizione tra stati che si riferiscono ad intervalli di tempo infinitesimi ( $dt$ )

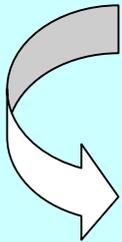
# *Le catene markoviane - 1*

Si assume che  $\{S(t)\}$  sia una **catena di Markov** a stati discreti del 1° ordine, non omogenea



Particolare PROCESSO STOCASTICO in cui:

La probabilità condizionata di un evento futuro, dati lo stato attuale e tutti gli eventi passati, dipende esclusivamente dallo stato attuale ed è indipendente dalla traiettoria del processo



- ✓ La distribuzione del processo è determinata unicamente dalla distribuzione iniziale e dalle probabilità (o intensità) di transizione

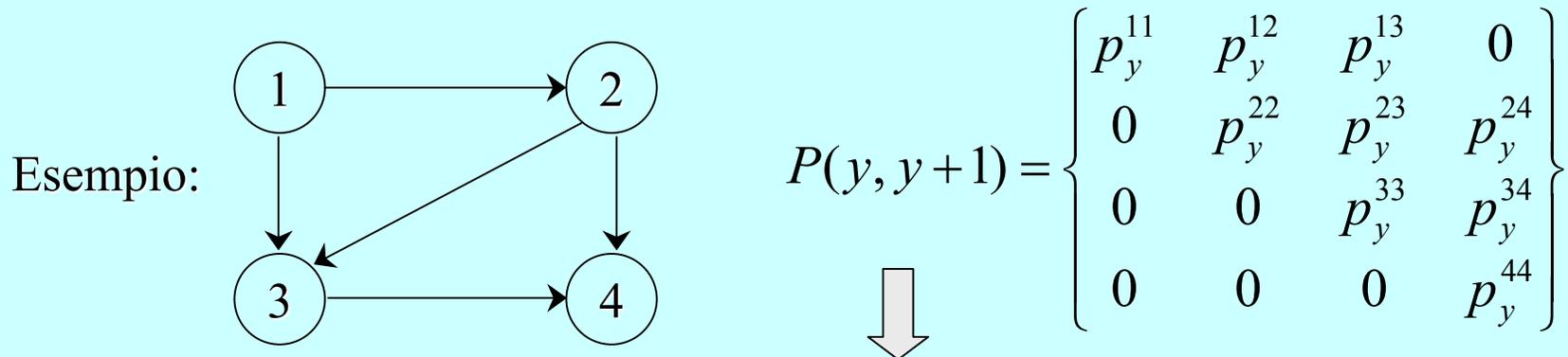


Modelli ampiamente utilizzati nelle assicurazioni di invalidità

# *Le catene markoviane - 2*

- **del 1° ordine:** nell'assegnare le probabilità di transizione relative alle età  $(y, y+1)$  si dà rilievo solo allo stato occupato all'età  $y$
- **non omogenea:** si dà rilievo all'età  $y$  dell'assicurato

La struttura probabilistica del processo  $\{S(t)\}$  può essere riassunta in una Matrice delle probabilità (subordinate) di transizione:



Somma delle probabilità su ciascuna riga = 1

# *Le rendite d'invalidità*

# *Rendite d'invalidità - 1*

Corresponsione di una rendita per i periodi durante i quali, a causa di infortunio o malattia, l'assicurato è incapace di svolgere attività adatta a produrre reddito

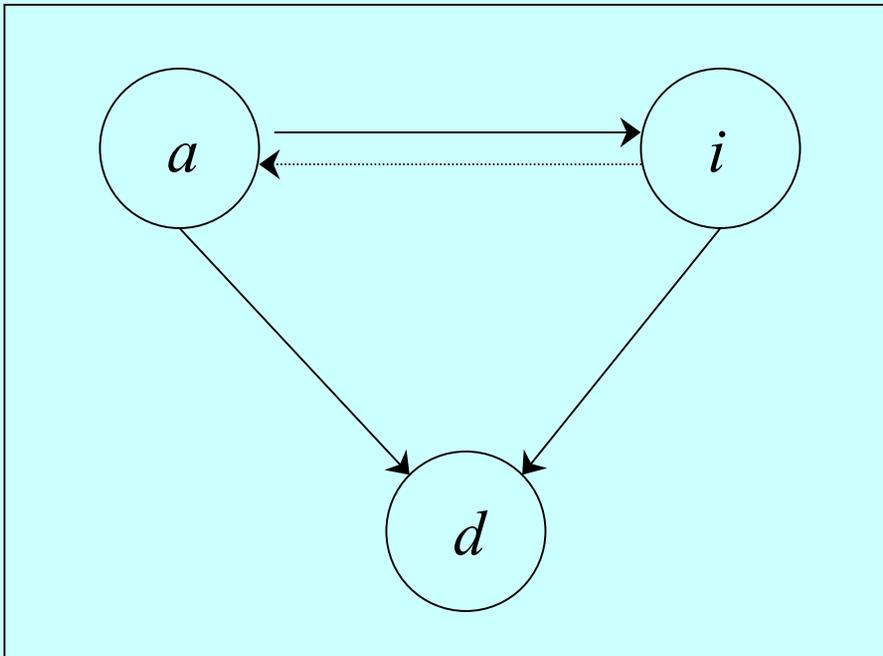
$R_h$  (v.a.)  $\longrightarrow$  Rata pagata al generico anniversario  $h$

$$R_h = \begin{cases} 0 & \text{Se l'assicurato non è invalido} \\ 1 & \text{Se l'assicurato è invalido} \end{cases}$$

- Il *costo* della copertura per la rendita d'invalidità è uguale al V.A.M. delle rate di rendita erogate durante il periodo di vita del contratto
- Il *calcolo del premio* richiede la valutazione delle probabilità di essere nello stato di invalido nel generico anniversario  $h$

# *Rendite d'invalidità - 2*

Grafo del modello multistato



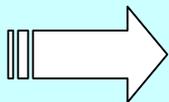
## Il modello multistato

**3 stati**

$a$  = attivo

$i$  = invalido

$d$  = deceduto



Bisogna scegliere una struttura probabilistica da associare al grafo

## *Rendite d'invalidità - 3*

PREMIO EQUO PURO → Valore Attuale Medio delle rate di rendita *erogate* durante il periodo di vita del contratto.

$E(R_h)$  attualizzato mediante il fattore  $v^h = (1+i)^{-h}$

Dovremo perciò valutare la **probabilità dell'evento *invalidità***



può essere valutata considerando:

- ✓ La probabilità di *entrare* nello stato  $i$  in un istante compreso tra le generiche epoche  $h-r$  e  $h-r+1$
- ✓ La probabilità di *rimanere* con continuità nello stato  $i$  almeno fino all'epoca  $h$

# *Rendite d'invalidità - 4*

## **Sistemi di valutazione del costo della copertura: 2 approcci "storici"**



*Manchester Unity Method*  
(o *Friendly Society Method*)



***Inception/Annuity***  
**(o *Continuance Table Model*)**

# *Metodo Manchester Unity*

Il costo di una copertura di invalidità è basato sulla stima del *tempo mediamente trascorso* in ciascun anno d'età nello stato d'invalidità.

N.B. Non vengono prese in considerazione probabilità di passaggio tra gli stati.

## **Caratteristiche:**

- ✓ Periodo base pari ad 1 anno
- ✓ Collettività di individui coetanei di età  $x$
- ✓ Numero di individui presenti nella collettività in  $t$
- ✓ Numero di individui invalidi in  $t$

# *Metodo Inception/Annuity*

Si fonda sulla valutazione della *probabilità* (funzione dell'età) di iniziare (*inception*) un periodo di invalidità e sul valore attuale atteso di una rendita (*annuity*) di durata aleatoria collegata con il tempo di permanenza (*continuance*) nello stato di invalidità

## **Caratteristiche:**

- ✓ Modello discreto
- ✓ Periodo base pari ad 1 anno
- ✓ Struttura probabilistica assegnata tramite probabilità di passaggio tra stati

# *Metodo Inception/Annuity*

# *Metodo Inception/Annuity - 1*

## Individuo di età $y$ ( $(y)$ ) nello stato di attivo

$p_y^{aa}$  Probabilità per  $(y)$  di essere in vita ed attivo ad età  $y + 1$

$q_y^{aa}$  Probabilità per  $(y)$  di morire da attivo entro l'anno

$p_y^{ai}$  Probabilità per  $(y)$  di essere in vita ed invalido ad età  $y + 1$

$q_y^{ai}$  Probabilità per  $(y)$  di morire da invalido entro l'anno

$p_y^a$  Probabilità per  $(y)$  di raggiungere in vita l'età  $y + 1$

$w_y$  Probabilità per  $(y)$  di diventare invalido durante l'anno

$q_y^a$  Probabilità per  $(y)$  di morire entro l'anno

# Metodo Inception/Annuity - 2

## (y) nello stato di invalido

$p_y^i$  Probabilità per (y) di essere in vita ad età  $y + 1$

$q_y^i$  Probabilità per (y) di morire entro l'anno

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{In questo caso:} \\ p_y^i = p_y^{ii} + \cancel{p_y^{ia}} \\ q_y^i = q_y^{ii} + \cancel{q_y^{ia}} \end{array} \right.$$

### Funzioni fondamentali di Zimmermann

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_y & \longrightarrow \text{Tassi di invalidità} \\ q_y^a & \longrightarrow \text{Tavola di mortalità degli attivi} \\ q_y^i & \longrightarrow \text{Tavola di mortalità degli invalidi} \end{array} \right.$$

✓ L'importanza di tali funzioni risiede nella possibilità di stimare queste grandezze dalla rilevazione statistica

# *Metodo Inception/Annuity - 3*

N.B. sono state escluse riattivazioni: transizioni  $i \rightarrow a$

Valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{array}{ll} p_y^a = p_y^{aa} + p_y^{ai} & p_y^a + q_y^a = 1 \\ \textcircled{q_y^a} = q_y^{aa} + q_y^{ai} & p_y^i + \textcircled{q_y^i} = 1 \\ \textcircled{w_y} = p_y^{ai} + q_y^{ai} & p_y^{aa} + q_y^{aa} + w_y = 1 \end{array}$$

Hp

Ipotesi di uniformità nel corso dell'anno del possibile verificarsi dell'invalidità  $\rightarrow$  il rischio di decesso nello stato  $i$  riguarda solo la seconda metà dell'anno

# *Metodo Inception/Annuity - 4*

Allora:  $q_y^{ai} = w_y \frac{q_y^i}{2}$   $\longrightarrow$

Insieme alle 3 funzioni di Zimmermann consente di determinare le altre probabilità che definiscono il modello

***Premio unico puro***  
(invalidità temporanea)



Probabilità di *ingresso*  
nello stato *i*

$${}_h P_x^{ai}$$



# *Premio unico puro*

(Copertura d'invalidità temporanea per  $n$  anni)

$$a_{x:\bar{n}}^{ai} = \sum_{h=1}^n E(R_h) v^h = \sum_{h=1}^n {}_h P_x^{ai} v^h$$

Relazioni ricorrenti:

$${}_h P_x^{aa} = {}_{h-1} P_x^{aa} P_{x+h-1}^{aa} + \cancel{{}_{h-1} P_x^{ai} P_{x+h-1}^{ia}}$$

$${}_h P_x^{ai} = {}_{h-1} P_x^{ai} P_{x+h-1}^{ii} + {}_{h-1} P_x^{aa} P_{x+h-1}^{ai}$$

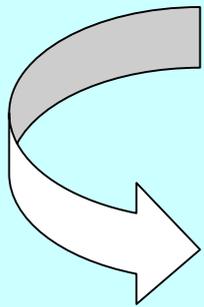
Prob. di essere nello stato  $i$  all'istante  $h$

- 1) L'assicurato proviene dallo stato di invalido
- 2) L'assicurato proviene dallo stato di attivo e si è invalidato nel corso dell'anno  $(h-1, h)$



$$\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h+1}}^i = 1 + \sum_{k=1}^{n-h} {}_k P_{x+h}^{ii} v^k \quad \text{valore attuale medio di una rendita annua (temporanea) d'invalidità}$$

dove:  ${}_k P_{x+h}^{ii}$  probabilità che un individuo invalido all'età  $x+h$  permanga in tale stato fino all'età  $x+h+k$



$$a_{x:\overline{n}}^{ai} = \sum_{h=1}^n {}_{h-1} P_x^{aa} P_{x+h-1}^{ai} v^h \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h+1}}^i$$

## Formula di tipo inception/annuity

E' basata sulla probabilità,  $P_{x+h-1}^{ai}$ , di inizio (inception) di un periodo di invalidità che si protrae almeno fino all'anniversario di contratto successivo e sul valore attuale medio della rendita (annuity) conseguentemente corrisposta

# **Permanent Health Insurance (PHI)**

# ***PHI - Permanent Health Insurance***

- ✓ Introdotta in Italia dalla legge n.742 del 1986
- ✓ Costituisce il IV dei Rami Vita
- Forma assicurativa che prevede la corresponsione di una rendita, di *rata prestabilita*, per i periodi in cui, a causa di infortunio o malattia, l'assicurato è *totalmente* incapace di percepire reddito da occupazione.
- Definizione Britannica: “incapacità, ai fini di questo contratto, significa che l'assicurato è totalmente incapace, a causa di infortunio o malattia, di svolgere *la propria* occupazione o le occupazioni *previste in polizza* e che l'assicurato stesso *non* svolge nessun'altra occupazione”

# ***PHI - Permanent Health Insurance***

- **Rendita di invalidità** (professionale) non necessariamente permanente
- Durata pluriennale (ma che non supera l'età di pensionamento)
- Non rescindibile (permanent)
- A premio annuo costante
- La durata non supera l'età di pensionamento
- Periodo di franchigia temporale assoluta
- Breve periodo di qualificazione della malattia o dell'infortunio
- Periodo iniziale di carenza

# *Il calcolo del premio - PHI*

Prestazione → Corresponsione di una rendita per i periodi durante i quali, a causa di infortunio o malattia, l'assicurato è *totalmente* incapace di percepire reddito da occupazione.

PREMIO EQUO PURO → Valore attuale medio (v.a.m.) delle rate di rendita erogate durante il periodo di vita del contratto.

Copertura d'invalidità temporanea per  $n$  anni

$$a_{x:\bar{n}}^{ai} = \sum_{h=1}^n E(R_h) v^h = \sum_{h=1}^n {}_h p_x^{ai} v^h$$

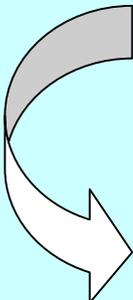
✓ **Metodo di calcolo del premio: modello inception/annuity**

# *Premio unico puro - PHI*

= v.a.m. di una copertura d'invalidità temporanea per  $n$  anni

$$a_{x:\bar{n}}^{ai} = \sum_{h=1}^n {}_{h-1}P_x^{aa} P_{x+h-1}^{ai} v^h \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h+1}}^i$$

**Premio annuo costante** (pagabile per  $m$  anni) da un assicurato entrato in assicurazione ad età  $x$


$$P_{x,m} = \frac{a_{x:\bar{n}}^{ai}}{\ddot{a}_{x:m}^{aa}}$$

Dove:  $\ddot{a}_{x:m}^{aa} = \sum_{k=0}^{m-1} P_x^{aa} v^k$

è il v.a.m. di una rendita pagabile per un periodo di  $m$  anni da un individuo attivo

# **Assicurazione Dread Disease (DD)**

# *Assicurazione Dread Disease (DD) - 1*

Forma assicurativa che interviene nella circostanza in cui l'assicurato sia colpito da una malattia particolarmente grave, mediante il pagamento di un capitale forfettariamente prefissato.

- ✓ Non ha carattere risarcitorio
- ✓ Non offre un risarcimento commisurato alle effettive spese di cura e/o chirurgiche
- ✓ Il supporto finanziario fornito mira a far fronte alle necessità dell'assicurato mentre è in vita
- ✓ Non intende offrire introiti mirati alla sostituzione parziale del reddito da lavoro
- ✓ Il pagamento ha luogo solo in seguito alla diagnosi della malattia

## *Assicurazione Dread Disease - 2*

- Beneficio pari alla somma pattuita in polizza
- Durata pluriennale
- Premio annuo costante
- Breve periodo di qualificazione della malattia
- Periodo iniziale di carenza
- Autonoma o “Stand Alone”
- Abbinata con un assicurazione vita (TCM) – caso più frequente
  - “anticipativa”
  - “aggiuntiva”
- Copertura di sopravvivenza (pagamento del capitale in caso di sopravvivenza dell’assicurato ad una malattia grave)

## *Assicurazione Dread Disease - 3*

**Per essere inclusa in un contratto DD ogni malattia deve soddisfare i seguenti criteri:**

- deve comportare alla persona un bisogno di denaro
- deve avere una definizione chiara e precisa
- non deve permettere l'antiselezione da parte degli assicurati
- deve esistere una base statistica solida e sufficiente per il calcolo dei costi della copertura

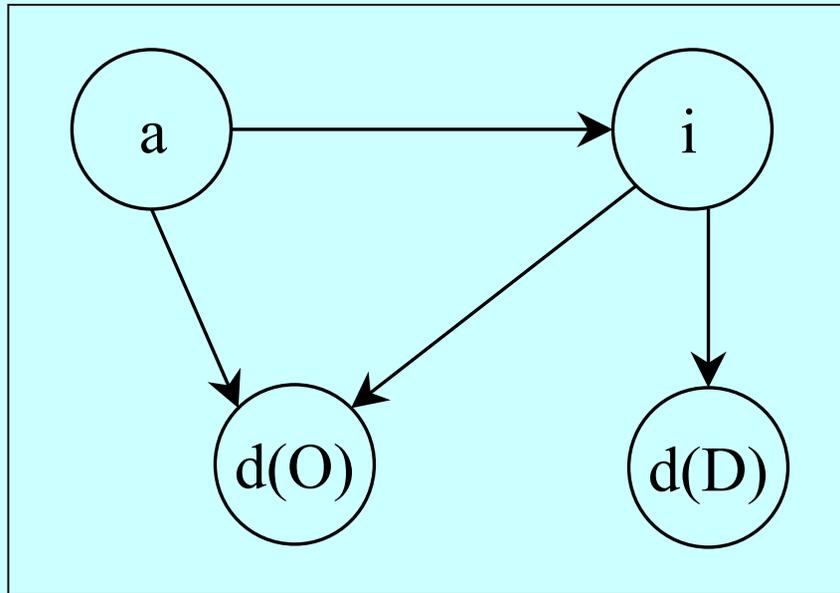
# *Assicurazione Dread Disease - 4*

Malattie generalmente coperte dall'assicurazione (appartengono alle principali cause di morte della popolazione):

- ✓ Infarto
- ✓ Tumore
- ✓ Ictus
- ✓ Chirurgia del cuore o del by-pass
- ✓ Insufficienza renale
- ✓ Trapianto di organo
- ✓ Sclerosi multipla

# *Un modello multistato per assicurazioni Dread Disease*

Grafo del modello multistato



a = Attivo

i = Invalido

d(O) = Deceduto per cause diverse dalla DD (O = “other”)

d(D) = Deceduto a causa di DD (D = “Dread Disease”)

✓ Lo stato di **attivo** comprende gli assicurati non colpiti dalle malattie gravi (DD) previste in polizza

✓ Lo stato di **invalido** comprende gli assicurati colpiti dalle malattie gravi (DD) previste in polizza

# ***La struttura probabilistica - DD***

## Individuo di età $y$ ( $(y)$ ) nello stato di attivo

$P_y^{aa}$  Probabilità per  $(y)$  di essere in vita ed attivo ad età  $y + 1$

$q_y^{aa}$  Probabilità per  $(y)$  di morire da attivo entro l'anno

$P_y^{ai}$  Probabilità per  $(y)$  di essere colpito da DD entro l'anno e di essere in vita ad età  $y + 1$

$q_y^{ai}$  Probabilità per  $(y)$  di essere colpito da DD e di morire entro l'anno

$P_y^a$  Probabilità per  $(y)$  di raggiungere in vita l'età  $y + 1$

$W_y$  Probabilità per  $(y)$  di essere colpito da DD durante l'anno

$q_y^a$  Probabilità per  $(y)$  di morire entro l'anno

$q_y^{ai(O)}$  Probabilità per (y) di essere colpito da DD e di morire entro l'anno per causa diversa dalla DD

$q_y^{ai(D)}$  Probabilità per (y) di essere colpito da DD e di morire entro l'anno a causa di DD

**(y) nello stato di invalido DD**

$p_y^i$  Probabilità per (y) di essere in vita ad età  $y + 1$

$q_y^i$  Probabilità per (y) di morire entro l'anno

$q_y^{i(O)}$  Probabilità per (y) di morire entro l'anno per causa diversa dalla DD

$q_y^{i(D)}$  Probabilità per (y) di morire entro l'anno a causa di DD

✓ N.B. sono state escluse riattivazioni: transizioni  $i \rightarrow a$

Valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{array}{ll} q_y^{ai} = q_y^{ai(O)} + q_y^{ai(D)} & p_y^{aa} + q_y^{aa} + w_y = 1 \\ w_y = p_y^{ai} + q_y^{ai} & p_y^i + q_y^{i(O)} + q_y^{i(D)} = 1 \\ q_y^{aa} + q_y^{ai} = q_y^a & q_y^{i(O)} + q_y^{i(D)} = q_y^i \end{array}$$

$$w_y + q_y^{aa} = 1 - p_y^{aa}$$



Probabilità che, entro l'anno, l'assicurato sia colpito da DD o deceda per altra causa senza essere colpito dalla DD



A meno del fattore di sconto, rappresenta il costo annuo atteso di una copertura TCM alla quale è abbinata una copertura DD di tipo "anticipativo" al 100%

# Premio unico puro - DD

Hp

Ipotesi di uniforme distribuzione dei decessi e dei casi di invalidità nel corso dell'anno

✓ *Pagamento di un capitale unitario*

a) Copertura autonoma

$$U_{x,n}^{(DD)} = \sum_{h=0}^{n-1} {}_h p_x^{aa} w_{x+h} v^{h+1/2}$$

b) Copertura TCM di durata  $n$  anni alla quale è abbinata una DD di tipo anticipativo al 100%

$$U_{x,n}^{(TCM+100\%)} = \sum_{h=0}^{n-1} {}_h p_x^{aa} (q_{x+h}^{aa} + w_{x+h}) v^{h+1/2}$$

Scomposizione del premio unico in due addendi →

Per  $n=1$  si ha:  $U_{x,1}^{(TCM+100\%)} = (q_x^{aa} + w_x)v^{1/2} = \underbrace{q_x^{aa} v^{1/2}} + w_x v^{1/2}$

Premio unico di una TCM in cui la prestazione è limitata al caso di decesso di persone non colpite dalla DD

$$= q_x^a v^{1/2} + (q_x^{aa} - q_x^a + w_x)v^{1/2} = q_x^a v^{1/2} + (w_x - q_x^{ai})v^{1/2} =$$

$$= \boxed{q_x^a v^{1/2}} + \boxed{p_x^{ai} v^{1/2}}$$

Premio unico di una TCM monoannuale

Premio unico della prestazione anticipativa pagabile all'insorgere della DD

*In generale si ha:*



$$U_{x,n}^{(TCM+100\%)} = \sum_{h=0}^{n-1} {}_h p_x^{aa} (q_{x+h}^{aa} + w_{x+h}) v^{h+1/2} = U_{x,n}^{(TCM)} + U_{x,n}^{(100\%)}$$

# Premio annuo costante - DD

a) Copertura autonoma di durata  $n$  anni

$$P_{x,n}^{(DD)} = \frac{U_{x,n}^{(DD)}}{\ddot{a}_{x:n}^{aa}}$$

Premio pagabile al più per  $n$  anni da un assicurato entrato in assicurazione ad età  $x$

dove: 
$$\ddot{a}_{x:n}^{aa} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kP_x^{aa} v^k$$

b) Copertura TCM di durata  $n$  anni alla quale è abbinata una DD di tipo anticipativo al 100%

$$P_{x,n}^{(TCM +100\%)} = \frac{U_{x,n}^{(TCM +100\%)}}{\ddot{a}_{x:n}^{aa}}$$

✓ Esonero dal pagamento dei premi dal momento in cui si verifica il sinistro DD

# Riserve matematiche - DD

Valutazione delle riserve attraverso il **metodo prospettivo**:  
(v.a.m. degli impegni futuri dell'assicuratore) – (v.a.m. degli  
impegni futuri dell'assicurato)

**Si tiene conto dello stato in cui si trova l'assicurato all'epoca di  
valutazione → attivo, invalido DD**

- Riserva per un **attivo** valutata all'epoca  $t$  ( $t=0,1,\dots,n$ )

a) 
$${}_tV_{x,n}^{(a)(DD)} = U_{x+t,n-t}^{(DD)} - P_{x,n}^{(DD)} \ddot{a}_{x+t:n-t}^{aa} \Rightarrow$$
 Copertura DD  
autonoma di  
durata  $n$  anni

 Copertura TCM di  $n$  anni + copertura anticipativa al 100% DD

b) 
$${}_tV_{x,n}^{(a)(TCM+100\%)} = U_{x+t,n-t}^{(TCM+100\%)} - P_{x,n}^{(TCM+100\%)} \ddot{a}_{x+t:n-t}^{aa}$$

# *Riserve matematiche - DD*

- Riserva per un **invalido DD** valutata all'epoca  $t$ 
  - a) In caso di copertura DD autonoma il contratto risulta estinto quando l'assicurato entra nello stato di invalido DD. Di conseguenza non c'è accantonamento di riserva.
  - b) Per un individuo nello stato  $i$  (già colpito da DD) si ha che, in caso di beneficio anticipativo, il contratto risulta estinto anche per la parte concernente la prestazione principale. Quindi la riserva per gli invalidi non deve essere accantonata.

# **Assicurazione Long Term Care (LTC)**

# *Definizione di Long Term Care (LTC)*

Complesso di interventi, erogati da istituzioni pubbliche o private, necessari a fronte di situazioni di bisogno di assistenza per individui prevalentemente anziani in condizioni di non autosufficienza.

Persone incapaci  
di badare a se  
stesse

Necessità di assistenza a vari livelli:

- ✓ Assistenza domiciliare
- ✓ Soggiorno con assistenza in case di riposo
- ✓ Ricovero in case o istituti di cura

➤ Come costituire le risorse finanziarie per far fronte ai costi di assistenza agli individui non autosufficienti?

Ruolo dell'assicurazione privata



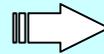
Coperture LTC

# *Il bisogno di coperture LTC*

Si origina da:

➤ Trend demografici

- *Allungamento della vita media*
- *Diminuzione dei tassi di natalità*



Invecchiamento della popolazione



impatto sulla domanda di prestazioni di lunga durata di carattere socio-sanitario

➤ Trend sociali

- *Polverizzazione dei nuclei familiari*
- *Aumento del tasso di attività lavorativa delle donne*



impatto sull'assistenza informale prestata dalle famiglie al loro interno

✓ Incertezza sui futuri tassi di disabilità

# *La copertura assicurativa LTC*

Contratto che copre il rischio contro la perdita dell'autosufficienza nello svolgimento delle attività elementari della vita quotidiana



*Eventi traumatici*

*Malattie degenerative*

**Cause della non autosufficienza**

*Malattie acute*

*Naturale processo di invecchiamento*

# *La definizione del rischio di non autosufficienza*

Capacità dell'individuo nel compiere una serie di attività elementari della vita quotidiana (Activities of Daily Living - ADL)



Quantificazione dei diversi livelli della non autosufficienza in relazione alla mancanza di autonomia nello svolgere le ADL

*Si definisce “non autosufficienza” l’incapacità di svolgere - in modo presumibilmente permanente e senza alcun ausilio - un certo numero di ADL*



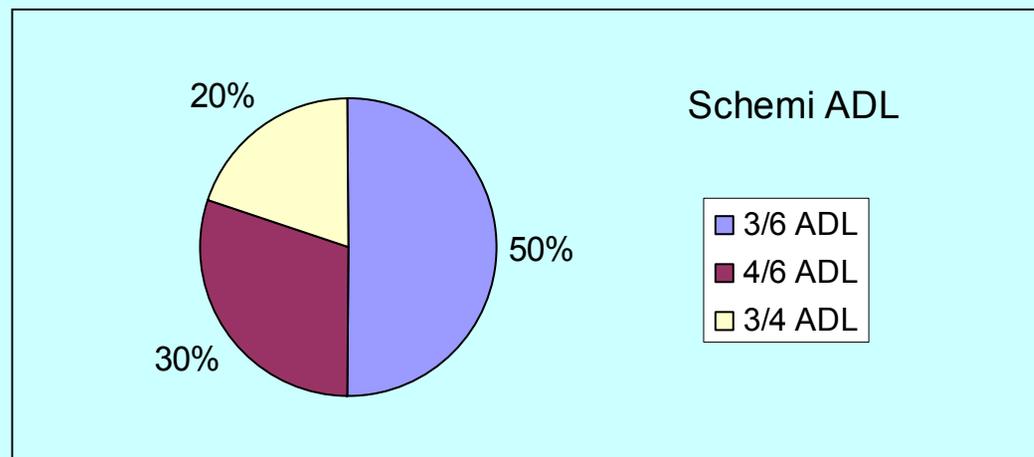
1. Lavarsi
2. Vestirsi e spogliarsi
3. Utilizzare i servizi
4. Trasferirsi dal letto alla poltrona e viceversa
5. Controllarsi nella continenza
6. Alimentarsi

# *Criterio delle ADL: differenti applicazioni*

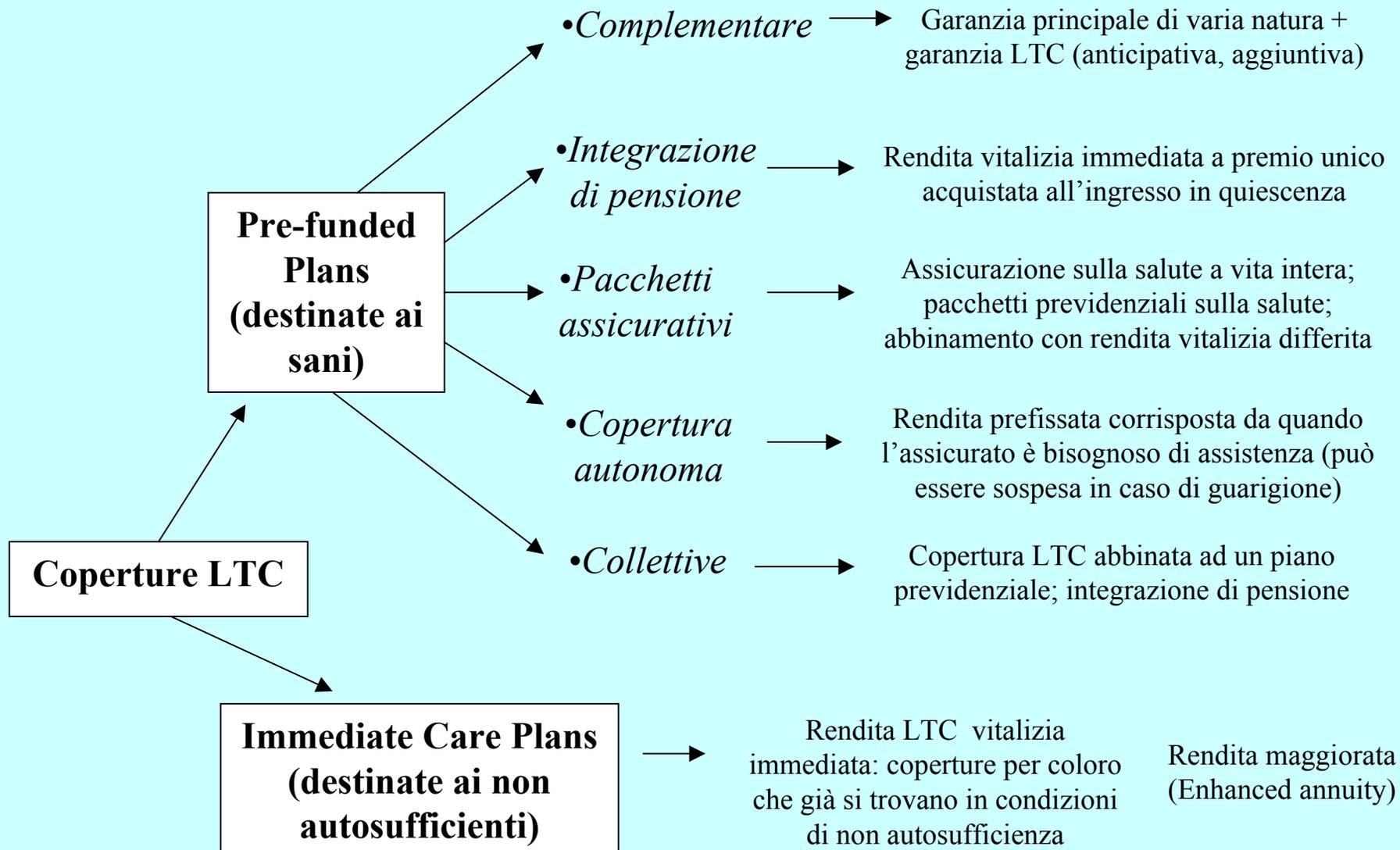
Differenti modalità di applicazione in base a:

- a) *Numero e tipo di ADL considerate*
- b) *Numero di livelli di difficoltà per ogni ADL*
- c) *Meccanismo utilizzato per attribuire il punteggio complessivo alla non autosufficienza attraverso la valutazione di ciascun livello di ADL*

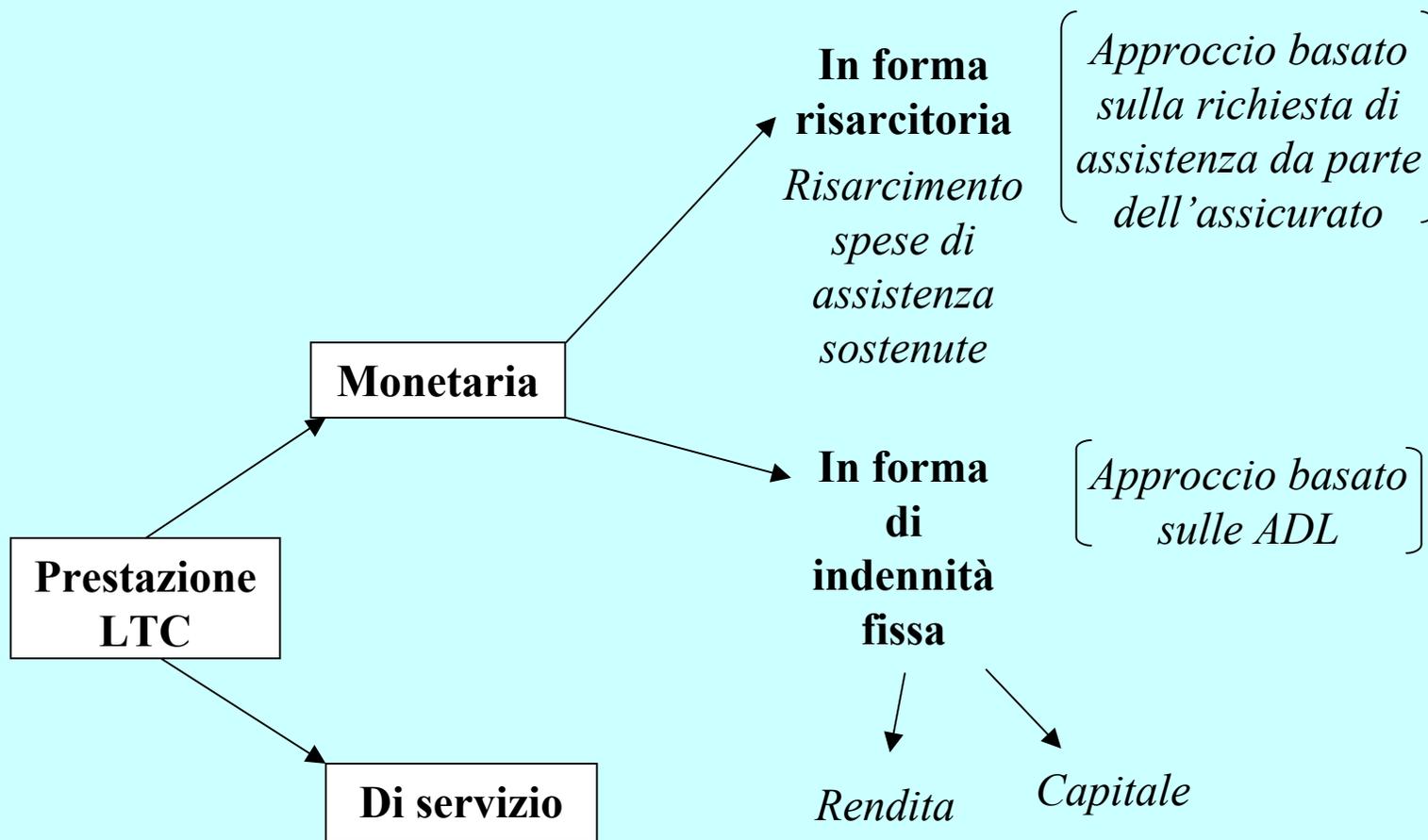
Su 10 compagnie analizzate



# Le principali tipologie di copertura LTC



# *Le modalità di erogazione della prestazione*



*Assistenza presso istituti di cura e centri convenzionati con la compagnia*

# *Le assicurazioni Long Term Care (LTC) - 1*

(Contratti di lunga durata)

- Modalità più frequente: prestazione in forma di rendita da corrispondersi al verificarsi della non autosufficienza:
  - a) rata di rendita prestabilita nel contratto in modo forfettario*
  - b) rata di rendita variabile con il grado di autosufficienza*
- Modalità di pagamento:
  - *premi periodici temporanei*
  - *premi periodici vitalizi non temporanei*
  - *premio unico*
- Periodo iniziale di carenza
- Massimali, franchigie ed esclusioni
- Meccanismi di indicizzazione delle prestazioni o dei premi  
*(per fronteggiare l'aumento nel tempo dei costi dei servizi LTC)*

# *Le assicurazioni Long Term Care - 2*

**Livello della rata di rendita definito e quantificato attraverso il cosiddetto: “Metodo ADL - Activities of Daily Living”**

Si considerano:

- *s attività elementari* (camminare, mangiare, lavarsi, vestirsi,...)
- *per ogni attività j* viene fissato **un livello di mancanza di autosufficienza**  $\alpha_j$

✓ Autosufficienza  $\alpha_j = 0$

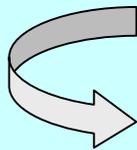
✓ Parziale autosufficienza  $\alpha_j = 1$

✓ Mancanza di autosufficienza  $\alpha_j = 2$

L'importo della rendita è quindi funzione del livello complessivo,  $\alpha$ , di mancanza di autosufficienza, cioè:

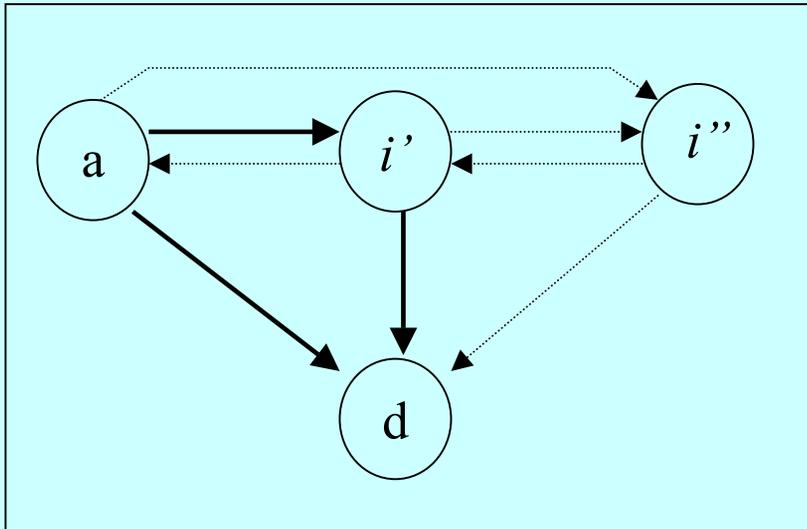
$$R(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq \alpha < \alpha' \\ R' & \text{se } \alpha' \leq \alpha < \alpha'' \\ R'' & \text{se } \alpha'' \leq \alpha \leq 2s \end{cases} \quad \text{dove} \quad \alpha = \sum_{j=1}^s \alpha_j$$

Nella pratica assicurativa: rendita di rata unica  $R$  a fronte dell'incapacità di svolgere, in modo presumibilmente permanente, un numero  $r$  di attività tra le  $s$  ( $\alpha_j$  assume valore 0 (autosufficiente) o 1 (non autosufficiente)).



$$R(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq \alpha < r \\ R & \text{se } r \leq \alpha \leq s \end{cases}$$

# *Il modello probabilistico multistato LTC*



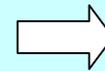
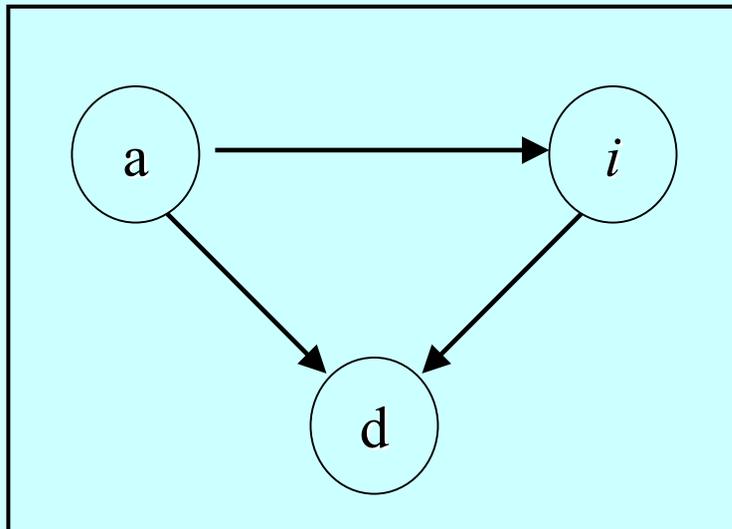
Grafo di un modello multistato LTC con 2 stati di non autosufficienza

a = attivo

i' = invalido LTC a livello I

i'' = invalido LTC a livello II

d = deceduto



1 stato di non autosufficienza

a = attivo

i = invalido LTC

d = deceduto

# *La struttura probabilistica - LTC*

## Individuo di età $y$ ( $(y)$ ) nello stato di attivo

- $p_y^{aa}$  Probabilità per  $(y)$  di essere in vita ed attivo ad età  $y + 1$
- $q_y^{aa}$  Probabilità per  $(y)$  di morire da attivo entro l'anno
- $p_y^{ai}$  Probabilità per  $(y)$  di essere in vita ed invalido LTC ad età  $y + 1$
- $q_y^{ai}$  Probabilità per  $(y)$  di morire da invalido LTC entro l'anno
- $p_y^a$  Probabilità per  $(y)$  di raggiungere in vita l'età  $y + 1$
- $w_y$  Probabilità per  $(y)$  di diventare invalido LTC durante l'anno
- $q_y^a$  Probabilità per  $(y)$  di morire entro l'anno

## (y) nello stato di invalido LTC

$p_y^i$  Probabilità per (y) di essere in vita ad età  $y + 1$

$q_y^i$  Probabilità per (y) di morire entro l'anno

Valgono le seguenti relazioni:

$$p_y^a = p_y^{aa} + p_y^{ai}$$

$$p_y^a + q_y^a = 1$$

$$q_y^a = q_y^{aa} + q_y^{ai}$$

$$p_y^i + q_y^i = 1$$

$$w_y = p_y^{ai} + q_y^{ai}$$

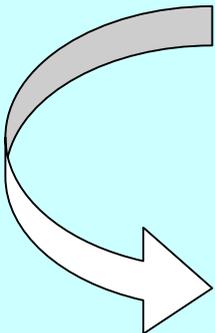
$$p_y^{aa} + q_y^{aa} + w_y = 1$$

# *Il calcolo del premio – LTC*

Sia  $R_h$  la rata aleatoria pagata all'epoca  $h \rightarrow R$  costante

**Premio unico puro** (rendita LTC vitalizia)

$$U_x^{(LTC)} = \sum_{h=1}^{+\infty} E(R_h) v^h = R \cdot \sum_{h=1}^{+\infty} {}_h P_x^{ai} v^h$$



$$U_x^{(LTC)} = R \cdot \sum_{h=1}^{+\infty} {}_{h-1} P_x^{aa} P_{x+h-1}^{ai} v^h \cdot \underbrace{\ddot{a}_{x+h}^i}_{\text{arrow}}$$

$$\ddot{a}_{x+h}^i = 1 + v p_{x+h}^{ii} + v^2 p_{x+h}^{ii} p_{x+h+1}^{ii} + \dots + v^n p_{x+h}^{ii} p_{x+n-1}^{ii} + \dots$$

(v.a.m di una rendita vitalizia annua per non autosufficienza)

# *Il calcolo del premio - LTC*

**Premio annuo costante:** 
$$P_{x,m}^{(LTC)} = \frac{U_x^{(LTC)}}{\ddot{a}_{x:m}^{aa}}$$

(pagabile per  $m$  anni) da un assicurato entrato in assicurazione ad età  $x$

dove: 
$$\ddot{a}_{x:m}^{aa} = \sum_{k=0}^{m-1} {}_kP_x^{aa} v^k$$

# *Riserve matematiche - LTC*

Riserve per gli **attivi**:

$${}_tV_x^{(a)} = U_{x+t}^{(LTC)} - P_{x,m}^{(LTC)} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}^{aa}$$

(Copertura a premi temporanei per  $m$  anni con  $0 \leq t \leq m-1$ )

$${}_tV_x^{(a)} = U_{x+t}^{(LTC)}$$

(Copertura a premio unico o a premi temporanei per  $m$  anni con  $t > m-1$ )

Riserve per gli **invalidi LTC**:  ${}_tV_x^{(i)} = R \cdot \ddot{a}_{x+t}^i$  Per  $t \geq 1$

# Struttura probabilistica del modello espressa in termini di “tavole di sopravvivenza”

$l_y$  Numero atteso di individui appartenenti alla collettività

$l_y^a$  Numero atteso di individui **attivi**

$l_y^i$  Numero atteso di individui **invalidi LTC**

- Per ogni  $y$  sussistono le seguenti relazioni ricorrenti:

$$\boxed{l_y = l_y^a + l_y^i} \quad \boxed{l_{y+1}^a = l_y^a - l_y^a \cdot p_y^{ai} - l_y^a \cdot q_y^a} \quad \boxed{l_{y+1}^i = l_y^i + l_y^a \cdot p_y^{ai} - l_y^i \cdot q_y^i}$$

Sono generalmente disponibili dati statistici di tipo:

$$\text{prevalence rates} = \frac{\text{Numero LTC } (y_1, y_2)}{\text{Numero viventi } (y_1, y_2)}$$

- Prevalence rates degli invalidi LTC:  
(*dati statistici*)

$$\lambda_y^i = \frac{l_y^i}{l_y}$$

- Tavola di sopravvivenza  $\rightarrow l_y, q_y$

Si ricavano allora:  $l_y^i = \lambda_y^i \cdot l_y$  e quindi:  $l_y^a = l_y - l_y^i$

Si approssima la mortalità degli invalidi con la mortalità degli attivi, opportunamente maggiorata (modello di aggravamento):

$$q_y^i = (1 + \eta) \cdot q_y$$



$$p_y^{ai} = \frac{l_{y+1}^i - l_y^i (1 - q_y^i)}{l_y^a} = \frac{\lambda_{y+1}^i \cdot l_{y+1} - \lambda_y^i \cdot l_y (1 - q_y^i)}{l_y (1 - \lambda_y^i)}$$

$$= \frac{\lambda_{y+1}^i \cdot (1 - q_y) - \lambda_y^i \cdot (1 - q_y^i)}{(1 - \lambda_y^i)}$$

# Testi di riferimento

**Pitacco E. (1995) – *Modelli attuariali per le assicurazioni sulla salute* – CERAP - Ed. EGEA, Milano**

Haberman S., Pitacco E. (1999) – *Actuarial models for Disability Insurance* – Chapman & Hall, Londra