Capitolo 4

Variabili Aleatorie Continue

4.1 Introduzione

Le variabili aleatorie affrontate finora sono caratterizzate dal fatto di avere un numero finito, o infinito numerabile, di valori possibili, ognuno con una probabilità positiva o nulla.

In molti problemi empirici conviene pensare ad una variabile aleatoria come la realizzazione di un processo continuo: la lunghezza, il tempo trascorso – ad esempio – sono esempi tipici di grandezze che possono, da un punto di vista teorico, assumere ogni possibile valore in un intervallo finito o infinito, ma per le quali diventa praticamente impossibile specificare quale valore assumeranno in ogni loro realizzazione. Infatti, nella pratica, per questi tipi di problemi si fa sempre riferimento ad approssimazioni più o meno buone; così si approssima il tempo ai minuti, o ai decimi di secondo, la lunghezza ai millimetri o ai decimillimetri, e così via (a seconda del tipo di applicazione) operando perciò una discretizzazione di una variabile che invece, per sua natura, è continua. Così, per esempio, nelle competizioni sportive si fa riferimento a strumenti di misura sempre più precisi per misurare il tempo impiegato da un atleta, fino ad arrivare ad una precisione espressa in decimi o centesimi di secondo. In altri casi, si effettuano misura ancora più precise.

Esistono quindi nella realtà molti fenomeni che vengono descritti da un numero finito di possibilità solamente perchè i sistemi di misura che si utilizzano, per quanto precisi, costringono ad un'approssimazione all'unità di misura che ci si è data.

Una variabile aleatoria continua è pertanto una variabile aleatoria che può assumere un qualunque valore all'interno di un intervallo (eventualmente non limitato). Si consideri, per esempio, la lancetta dei minuti di un orologio la quale può essere fermata schiacciando un pulsante. Ci si chiede quale sia la probabilità di fermare tale lancettta esattamente 10 secondi dopo il minuto, dove per "esattamente" si intende un numero di secondi pari a 10,0000000... Evidentemente maggiore è la precisione richiesta e minore sarà la probabilità di riuscire nell'impresa, al limite nel caso in cui si richiedesse una precisione infinita, tale probabilità risulta uguale a zero. In questo caso, la probabilità di fermare la lancetta in un tempo compreso fra 5 e 10 secondi dopo il minuto non è uguale alla somma delle probabilità di arrestare tale lancetta in uno dei qualsiasi istanti compresi in tale intervallo. Analogamente all'esempio precedente, se consideriamo un quadrato di area unitaria, l'area di ogni segmento interno sarà pari a zero e quindi non è possibile ottenere l'area di un quadrato come somma delle aree di infiniti segmenti.

Consideriamo la funzione di ripartizione:

$$F(x) := P(X \leq x) \qquad x \in \mathbb{R} \ .$$

Nel caso di v.a. discrete essa gode di alcune proprietà, che qui richiamiamo:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

2. $F(x)$ è non decrescente;

3. $F(x)$ è continua da destra;

4. $F(x_i) - F(x_{i-1}) = p(x_i)$.

In generale, la proprietà 1. si può scrivere:

1. $\lim x \to -\infty F(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Infatti, la funzione di ripartizione, essendo una funzione monotona, ammette limite da destra e da sinistra in ogni punto. In particolare, indicato con $F(x-)$ il limite da sinistra e con $F(x+)$ il limite da destra della funzione di ripartizione, si ha per definizione:

$$F(x-) := \lim_{t\to 0^+} F(x-t) \qquad\qquad F(x+) := \lim_{t\to 0^+} F(x+t) \ .$$

La seguente proposizione, di cui si omette la dimostrazione, generalizza la proprietà 4. della funzione di ripartizione data in precedenza.

Proposizione 4.1 Sia X una v.a. definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si ha allora:

$$F(x) - F(x-) = P\{X = x\} \ . \tag{4.1}$$

In particolare, diversamente da quanto accade per le v.a. discrete, se la funzione di ripartizione F è continua, risulta:

$$P\{X = x\} \ = \ 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \ . \tag{4.2}$$

Diremo che una v.a. X è continua se la sua funzione di ripartizione è continua oppure, il che è lo stesso, se vale la (4.2). In altre parole, se X è una v.a. continua, allora, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, i quattro eventi $\{a < X < b\}$, $\{a < X \leq b\}$, $\{a \leq X < b\}$ e $\{a \leq X \leq b\}$ hanno la stessa probabilità, cioè:

$$P\{a < X < b\} \ = \ P\{a < X \leq b\} \ = \ P\{a \leq X < b\} \ = \ P\{a \leq X \leq b\} \ .$$

Infatti si ha ad esempio:

$$P\{a \leq X < b\} - P\{a < X < b\} \ = \ P\{X = a\} \ = \ 0 \ .$$

4.2 Variabili aleatorie assolutamente continue

Per introdurre il concetto di variabile aleatoria assolutamente continua, bisogna premettere il concetto di *densità di probabilità*.

Definizione 4.2 Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si chiama *funzione di densità di probabilità*, se verifica le seguenti due proprietà:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= 1\ . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Definizione 4.3 Una variabile aleatoria continua X, definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, si dice *assolutamente continua* quando può assumere valori in uno o più intervalli di $\mathbb{R}$, eventualmente non limitati, e se esiste una funzione di densità $f(x)$ tale che la sua funzione di ripartizione $F(x)$ può essere scritta:

$$F(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \tag{4.4}$$

o, in modo equivalente, per $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$:

$$P(a \leq X \leq b) \;=\; F(b) - F(a) \;=\; \int_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad \text{per ogni intervallo } (a, b) \subseteq \mathbb{R}\ .$$

dove l'intervallo (a, b) può essere anche non limitato.

Si indicherà ancora con Ω_X il codominio di X.

Si noti che, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, se la F è una funzione derivabile con derivata continua su tutto $\mathbb{R}$ (tranne al più in un numero finito di punti), allora F è la funzione integrale della sua derivata F'. Pertanto, in base alla (4.4), risulta:

$$F'(x) \;=\; f(x)\ .$$

Definizione 4.4 Si definisce *quantile di ordine* α, con $0 < \alpha < 1$ di una v.a. X il più grande numero q_α tale che

$$F_X(q_\alpha) \;=\; P\{X \leq q_\alpha\} \;\leq\; \alpha\ .$$

In particolare se X è una v.a. continua, allora la funzione di ripartizione F_X è continua e per il teorema dei valori intermedi l'equazione

$$F_X(x) \;=\; \alpha$$

ha soluzione per $0 < \alpha < 1$. Se inoltre la v.a. è strettamente crescente (e ciò accade se la funzione di densità di X è strettamente positiva) allora la soluzione è unica. In questo caso q_α è l'unico numero reale x tale che

$$P\{X \leq x\} \;=\; \alpha\ .$$

Esercizio 4.5 Una persona deve raggiungere l'ufficio di lavoro ogni giorno feriale alle ore 8,30. A causa della variabilità del traffico e di altri fattori casuali, egli arriva in ufficio ad orari diversi fra le 8,15 e le 8,35. Da una rilevazione degli orari di arrivo, su può desumere che la funzione di densità può essere approssimata da un triangolo isoscele. Qual è la probabilità che tale persona arrivi in ufficio in tempo, cioè alle 8.30 o prima?

Se indichiamo con X la v.a. "orario di arrivo in ufficio", in termini formali, il problema richiede il calcolo della quantità

$$P(X \leq 8.30) \;=\; 1 - P(8.30 < X \leq 8.35)\;.$$

Per risolvere il problema, basta quindi calcolare $P(8.30 < X \leq 8.35)$. In Figura 4.1 viene data la rappresentazione grafica della funzione di densità di X. Poichè la funzione $f(x)$ è una funzione di densità, per la seconda proprietà della funzione di densità, l'area sottesa al triangolo deve essere uguale a 1, pertanto l'altezza di tale triangolo (essendo la base pari a 20 minuti) è uguale a 0.1.

La quantità $P(8.30 < X \leq 8.35)$ è data dal triangolo NMC. In base a criteri di proporzionalità, l'altezza del triangolo è data da:

$$\overline{NM} \;=\; \frac{\overline{MC}\cdot\overline{BH}}{\overline{CH}} \;=\; 0.05\;.$$

Da cui:

$$P(8.30 < X \leq 8.35) \;=\; \frac{\overline{NM}\cdot\overline{MC}}{2} \;=\; 0.125$$

e quindi

$$P(X \leq 8.30) \;=\; 1 - P(8.30 < X \leq 8.35) \;=\; 1 - 0.125 \;=\; 0.875\;.$$

♣

Esercizio 4.6 Verificare che le seguenti funzioni sono funzioni di densità:

1. $f(x) = 1 - |1 - x|$ per $0 \leq x \leq 2$;
2. $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\beta}{\beta^2 + (x-\alpha)^2}$, con $\beta > 0$ e $x \in \mathbb{R}$;
3. $f(x) = \dfrac{1}{2\sigma}\,\mathrm{e}^{-|x-\mu|/\sigma}$, con $\sigma > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Per ciascuna di tali funzioni, dobbiamo verificare le due proprietà della funzione di densità indicate in (4.3). Per quanto riguarda la prima funzione $f(x) = 1 - |1 - x|$, per $0 \leq x \leq 2$, poichè in tale intervallo si ha $|1 - x| \leq 1$, allora risulta $f(x) \geq 0$. Inoltre, tenendo conto che:

$$f(x) = \begin{cases} 1-(1-x) = x & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ 1-(x-1) = 2-x & \text{per } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

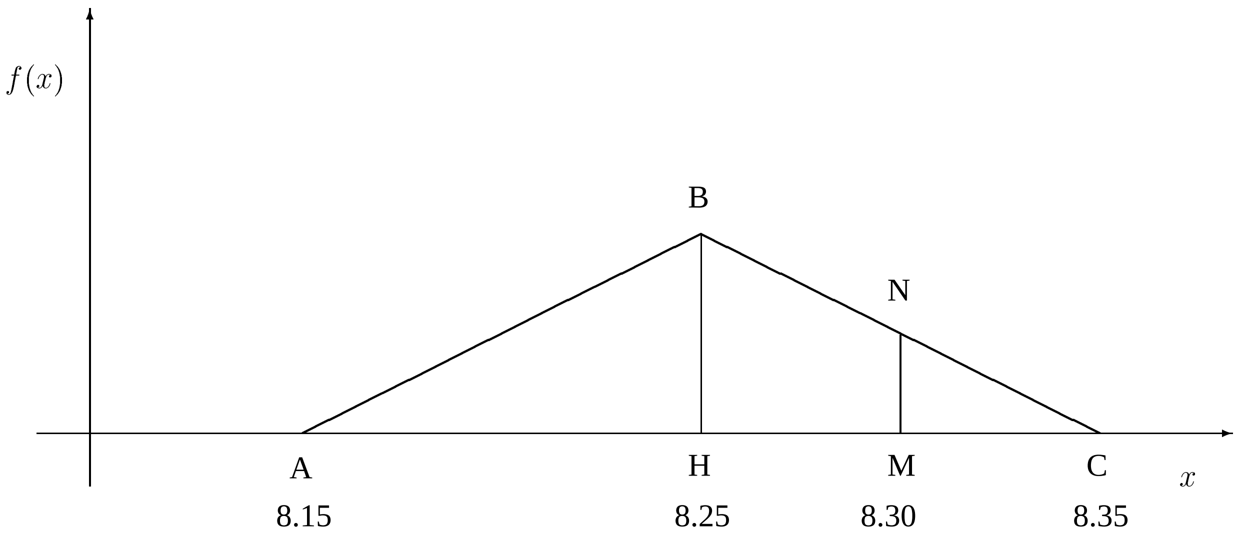

Figura 4.1: Rappresentazione grafica della funzione di densità del tempo di arrivo in ufficio.

allora si ha:

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,dx &= \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} + \left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right) = 1\,.\end{aligned}$$

Per quanto concerne la seconda funzione $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\beta}{\beta^2 + (x-\alpha)^2}$, osserviamo dapprima che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ in quanto per definizione $\beta > 0$. Si ha quindi:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta}{\beta^2 + (x-\alpha)^2} = \frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{x-a}{\beta}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1\,.\end{aligned}$$

Infine per quanto concerne la terza funzione $f(x) = \dfrac{1}{2\sigma}\,\mathrm{e}^{-|x-\mu|/\sigma}$, anche in questo caso osserviamo dapprima che si ha $f(x) > 0$ in quanto la funzione esponenziale è a valori strettamente positivi; inoltre risulta:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sigma}\,\mathrm{e}^{-(x-\mu)/\sigma} & \text{per } x \geq \mu \\ \dfrac{1}{2\sigma}\,\mathrm{e}^{-(\mu-x)/\sigma} & \text{per } x < \mu\,. \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{\mu} \mathrm{e}^{-(\mu-x)/\sigma}\,dx + \int_{\mu}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mu)/\sigma}\,dx \\
&= \frac{1}{2\sigma}\left[\sigma \mathrm{e}^{-(\mu-x)/\sigma}\right]_{-\infty}^{\mu} + \frac{1}{2\sigma}\left[-\sigma \mathrm{e}^{-(x-\mu)/\sigma}\right]_{\mu}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2\sigma}\left(\sigma - (-\sigma)\right) = 1
\end{aligned}$$

♣

Esercizio 4.7 La quantità di pane (in quintali) che un fornaio vende in un giorno è assimilabile ad una variabile aleatoria avente densità

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{per } 0 \le x \le 3 \\ \alpha(6-x) & \text{per } 3 < x \le 6 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Calcolare il valore di α affinchè f risulti una funzione di densità;
2. calcolare la probabilità che la quantità venduta in un giorno sia *i*) maggiore di 3 quintali; *ii*) compresa fra 1.5 e 4.5 quintali;
3. considerati gli eventi A e B di cui rispettivamente ai punti *i*) e *ii*) del uesito precedente, verificare se essi sono stocasticamente indipendenti.

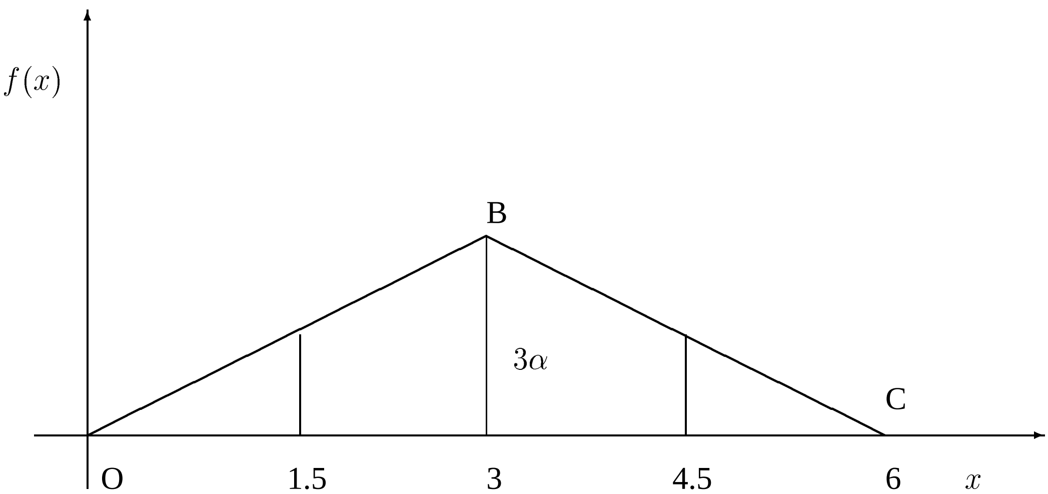

Figura 4.2: Rappresentazione grafica della funzione di densità del quantità di pane venduto.

Soluzione. Affinchè f sia una funzione di densità deve verificare le due condizioni (4.3). La prima implica che $\alpha \geq 0$; la seconda si scrive

$$\int_0^3 \alpha x \, dx + \int_3^6 \alpha(6-x)\, dx = 1$$

da cui con semplici calcoli segue $\alpha = \dfrac{1}{9}$. Più semplicemente lo stesso risultato potrebbe essere ottenuto imponendo che l'area del triangolo OBC sia eguale a uno. Per quanto concerne il secondo quesito, in base a considerazioni di simmetria si vede subito che $P(A) = P(X > 3) = 0.5$; in alternativa, si ha:

$$\frac{1}{9}\int_3^6 (6-x)\, dx = \frac{1}{9}\left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_3^6 = \frac{1}{9}(36 - 18 - 18 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} \; .$$

Per quanto riguarda il secondo valore di probabilità richiesto, può essere ricavato ancora in base a considerazioni geometriche, oppure utilizzando sempre il calcolo integrale, e si ottiene: $P(B) = P(1.5 \leq X \leq 4.5) = 0.75$.

Infine sul terzo quesito, osserviamo che

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(X > 3, 1.5 \leq X \leq 4.5) = P(3 < X \leq 4.5) = 0.375 \\ P(A)P(B) &= 0.5 \cdot 0.75 = 0.375 \end{aligned}$$

e quindi i due eventi sono stocasticamente indipendenti. ♣

4.3 Densità congiunte

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e sia $\mathbf{X} : \Omega \in \mathbb{R}^m$ un'applicazione da Ω in $\mathbb{R}^m$. Diremo che $\mathbf{X}$ è una variabile aleatoria m-dimensionale – o anche un *vettore aleatorio* m-dimensionale – se le sue componenti $X_1, \ldots, X_m$ sono sono delle v.a. (reali). Nel seguito assumeremo che $X_1, \ldots, X_m$ siano v.a. continue.

Un importante caso particolare è il caso $m = 2$, in questo caso parleremo di v.a. bidimensionale e scriveremo (X, Y). Poichè X e Y sono v.a., allora gli insiemi $\{X \leq x\}$ e $\{Y \leq y\}$ sono degli eventi e quindi anche l'insieme $\{X \leq x \, , \, Y \leq y\} = \{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}$ è un evento. Denotato con $A_{x,y}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$A_{x,y} := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \;:\; u \leq x \, , \, v \leq y\} \; ,$$

possiamo introdurre la *funzione di ripartizione*:

$$F(x, y) := P\{X \leq x \, , \, Y \leq y\} = P\{Z \in A_{x,y}\} \; .$$

La funzione di ripartizione permette di calcolare la probabilità di eventi del tipo $\{Z \in A_{x,y}\}$.

Definizione 4.8 Diremo che le v.a. X e Y hanno *densità congiunta* f se esiste una funzione f a valori reali non negativi ed integrabile tale che

$$F(x,y) := \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}v = \int_{A_{x,y}} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

ovvero tale che:

$$P\{(X,Y) \in A_{x,y}\} := P\{Z \in A_{x,y}\} \ = \ \int_{A_{x,y}} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \ . \tag{4.5}$$

Nota 4.9 Se le v.a. X e Y sono discrete, allora il sottoinsieme $\{(X,Y) \in A\}$ è un evento, qualunque sia il sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$; al contrario ciò non è vero nel caso continuo. Si conoscono infatti esempi di sottoinsiemi $A \subset \mathbb{R}^2$ tali che $\{(X,Y) \in A\}$ non è un evento.

Come è per il caso reale, si può dimostrare che se esiste una densità congiunta (cioè una funzione per cui valgano le condizioni (4.5), allora essa deve essere non negativa integrabile e tale che

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1 \ .$$

Analogamente al caso discreto, a partire dalla distribuzione $f(x,y)$ congiunta possiamo introdurre le *densità marginali* $f_X(x)$ e $f_Y(y)$:

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$f_Y(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Esempio 4.10 Consideriamo la seguente funzione di densità (uniforme sul cerchio di raggio unitario):

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{se } x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{4.6}$$

e calcoliamo le densità marginali. Dobbiamo scrivere in maniera opportuna i domini di integrazione. Rispetto alla variabile x, il cerchio unitario si scrive: $\{-1 \le x \le 1\ ,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$ e pertanto per $-1 \le x \le 1$ si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}y \ = \ \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

e quindi

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{4.7}$$

Analogamente si ottiene:

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & \text{se } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{4.8}$$

♣

Definizione 4.11 Le v.a. $X_1, \ldots, X_m$ si dicono *indipendenti* se e solo se per ogni scelta di $a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m$ con $a_1 \leq b_1, \ldots, a_m \leq b_m$, si ha:

$$P\{a_1 \leq X_1 \leq b_1, \ldots, a_m \leq X_m \leq b_m\} = P\{a_1 \leq X_1 \leq b_1\} \cdots P\{a_m \leq X_m \leq b_m\}.$$

Nel caso in cui le v.a. $X_1, \ldots, X_m, \ldots$ sono in numero infinito, diremo che esse sono indipendenti se e solo se per ogni insieme di indici $i_1, \ldots, i_m$ sono indipendenti le v.a. $X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}$.

In particolare, per $m = 2$ la precedente definizione si scrive:

$$P\{a \leq X \leq b\,,\, c \leq Y \leq d\} = P\{a \leq X \leq b\}P\{c \leq Y \leq d\}\ . \tag{4.9}$$

Se X e Y hanno densità congiunta f e marginali f_X, f_Y, allora la (4.9) si scrive:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d f_Y(y)\,\mathrm{d}y \tag{4.10}$$

e tale uguaglianza è soddisfatta se e solo se

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \tag{4.11}$$

per ogni x, y. Viceversa, se vale la (4.10) per ogni scelta di $a \leq b$ e $c \leq d$ allora deve valere necessariamente la (4.11) tranne al più per un insieme di punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ di misura nulla.

Analogamente a quanto visto nel caso discreto, per verificare l'indipendenza di due v.a. basta conoscere la densità congiunta e da questa ricavare le densità marginali e quindi verificare l'uguaglianza (4.11).

Esempio 4.10 (continua). Riprendiamo l'esempio precedente. In questo caso le due marginali f_X e f_Y assumono valori positivi negli intervalli $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$. Dunque la densità $(x,y) \to f_X(x)f_Y(y)$ è strettamente positiva sul quadrato $Q = [-1,1] \times [-1,1]$; mentre la densità congiunta $f(x,y)$ è nulla al di fuori del cerchio $C = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Pertanto l'insieme $Q \setminus C$ è un insieme di misura non nulla su cui le funzioni $f(x,y)$ e $f_X(x)f_Y(y)$ differiscono. Pertanto le due v.a. non sono indipdenti. ♣

Nota 4.12 L'esempio precedente mostra che in generale per dimostrare che due v.a. continue non sono indipendenti non basta trovare un punto (x,y) in cui $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, in quanto un punto ha misura nulla; bisogna trovare un insieme di misura nulla in cui non vale l'uguaglianza (4.11).

Ovviamente se però le funzioni f, f_X e f_Y sono continue in un punto (x,y) tale che $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ esisterà un intorno di tale punto in cui resta valida tale disuguaglianza e pertanto X e Y non sono indipendenti.

Ad ogni vettore aleatorio bidimensionale (X,Y) si possono associare due variabili aleatorie X e Y. Dalla funzione di probabilità o di densità del vettore, con operazioni elementari, si ottengono le funzioni di probabilità o di densità delle due variabili aleatorie. Esse si chiamano funzioni di probabilità *marginali* ed informano intorno alla distribuzione di probabilità delle due variabili aleatorie considerate separatamente.

Concetti analoghi a quelli di v.a. discrete, possono essere espressi nel caso continuo:

Definizione 4.13 Sia (X,Y) un vettore aleatorio continuo con funzione di densità $f(x,y)$ e funzioni di densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$. Si definisce *funzione di densità condizionale di X dato $Y=y$* la funzione definita da:

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad\qquad f_Y(y) > 0$$

e *funzione di densità condizionale di Y dato $X=x$* la funzione definita da:

$$f_{Y|X}(y|x) := \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \qquad\qquad f_X(x) > 0$$

Esercizio 4.14 Sia (X,Y) una v.a. doppia a valori in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; 0 \leq x \leq 1\,, 0 \leq y \leq x^2\}$ ed avente densità:

$$f(x,y) = \begin{cases} 10(x^2-y) & \text{per } 0 \leq x \leq 1\,, 0 \leq y \leq x^2 \\ & \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare le seguenti funzioni di densità di $f_1(x)$ e di $f(y|x)$.

Soluzione. Calcoliamo dapprima la funzione di densità marginale di Y:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{x^2} 10(x^2-y)\,\mathrm{d}y = 10\left[x^2y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{x^2} = 5x^4$$

per $0 \leq x \leq 1$. Successivamente possiamo calcolare la funzione di densità condizionale:

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{10(x^2-y)}{5x^4} = \frac{2(x^2-y)}{x^4} \qquad\qquad \text{per } y \in [0,x^2]\;.$$

♣

Si dimostra immediatamente che due variabili aleatorie continue X e Y sono stocasticamente indipendenti, se e solo se $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$ o equivalentemente $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$.

Definizione 4.15 Siano $X_1, \ldots, X_m$ v.a. a valori rispettivamente in $\mathbb{R}^{d_1}, \ldots, \mathbb{R}^{d_m}$. Esse si dicono *indipendenti* se e solo se per ogni scelta di sottoinsiemi $A_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}, \ldots, A_m \subset \mathbb{R}^{d_m}$, si ha:

$$P\{X_1 \in A_1, \ldots, X_d \in A_d\} = P\{X_1 \in A_1\} \cdots P\{X_d \in A_d\}$$

Proposizione 4.16 Siano $X_1, \ldots, X_m$ v.a. indipendenti a valori rispettivamente in $\mathbb{R}^{d_1}, \ldots, \mathbb{R}^{d_m}$ e siano $\phi_1 : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}, \cdots, \phi_d : \mathbb{R}^{d_m} \to \mathbb{R}$ delle applicazioni regolari. Allora le v.a. $\phi_1(X_1), \ldots, \phi_m(X_m)$ sono indipendenti.

4.4 Speranza matematica

Sia X una v.a. definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Analogamente al caso discreto, consideriamo ora il problema della sintesi di v.a. continue. Nel caso continuo, anzichè far riferimento alla funzione di probabilità, si fa riferimento alla funzione di densità.

Definizione 4.17 (caso continuo) Sia X una v.a. continua avente funzione di densità $f(x)$ ed assumiamo che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) \mathrm{d}x < +\infty \ .$$

In questo caso si definisce *speranza matematica* di X, la quantità

$$\mathbb{E}[X] := \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, \mathrm{d}x \ . \tag{4.12}$$

Nel caso continuo la speranza matematica ha le stesse proprietà viste per v.a. discrete.

Esempio 4.18 (Distribuzione di Cauchy) Consideriamo una v.a. avente funzione di densità:

$$f(x) := \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \ . \tag{4.13}$$

La (4.13) è effettivamente una funzione di densità in quanto è non negativa in tutto l'asse reale e risulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} [\arctan x]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1 \ .$$

La distribuzione (4.13) è nota come *distribuzione di Cauchy*. Al fine di vedere se esiste la speranza matematica, deve esistere finito l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \ .$$

In effetti si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}(1+x^2) = \lim_{t \to +\infty} \ln(1+t^2) = +\infty \ .$$

Pertanto la distribuzione di Cauchy non possiede speranza matematica. In termini generali la (4.13) si può scrivere:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\beta}{\beta + (x-\alpha)^2} \ . \tag{4.14}$$

in dipendenza di due parametri α, β con $\beta > 0$. ♣

4.5 Varianza

In modo generale si può affermare che tutte le caratteristiche di una distribuzione di probabilità sono rappresentate da una famiglia di parametri chiamati *momenti*.

Definizione 4.19 Sia k un intero positivo, sia c una costante ed assumiamo che v.a. $(X-c)^k$ abbia speranza matematica finita. Si definisce *momento di ordine k* intorno al punto c la quantità:

$$\mathbb{E}[(X-c)^k] := \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^k f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.15}$$

Due casi notevoli. Il primo si ottiene per $c=0$, in tal caso si ha il *momento di ordine k*:

$$m_k \;=\; \mathbb{E}[X^k]\;, \tag{4.16}$$

nell'ipotesi in cui questo esista finito. Il secondo si ottiene per $c=\mathbb{E}[X]=\mu$, in tal caso si ottiene il *momento centrale di ordine k* intorno alla media:

$$\mu_k \;=\; \mathbb{E}[(X-\mu)^k]\;, \tag{4.17}$$

sempre nell'ipotesi in cui esso esista finito.

Definizione 4.20 Sia X una variabile aleatoria definita su un dato spazio di probabilità $(\Omega,\mathcal{A},P)$ avente momento secondo $\mathbb{E}[X^2]$ finito. Si definisce *varianza* di X la quantità Var$(X)=\sigma^2=\mathbb{E}[(X-\mu)^2]$. La quantità σ viene chiamata *scarto quadratico medio* o *deviazione standard* della v.a. X.

Nel caso continuo si hanno le stesse proprietà viste in precedenza, in particolare risulta:

$$\mathrm{Var}(X)=\mu_2=\mathbb{E}[X^2]-\mu^2\;.$$

4.6 Funzioni di variabili aleatorie

Sia X una v.a. definita su uno spazio $(\Omega,\mathcal{A},P)$, a valori in un certo insieme Ω_X, ed avente funzione di probabilità $p_X(x)$ o di densità $f_X(x)$. Considerata una funzione $y=g(x)$ definita su Ω_X ed a valori in $\mathbb{R}$, consideriamo la v.a. $Y=g(X)$ che associa ad ogni realizzazione x di X, il valore $y=g(x)$. Il problema che ci poniamo è quello di determinare la funzione di ripartizione o di probabilià o di densità di Y.

Per risolvere il problema si osservi anzitutto che se B è un evento riguardante la v.a. Y e se $A=\{x\in\Omega_X \mid g(x)\in B\}$, cioè A è il sottoinsieme di Ω_X tale che $g(x)\in B$ per ogni $x\in A$, allora A e B possono riguardarsi come eventi equivalenti (sebbene essi siano definiti in insiemi differenti). Da ciò segue:

$$P\{Y\in B\}\equiv P\{x\in\Omega_X \mid g(x)\in B\} \;=\; P\{X\in A\} \tag{4.18}$$

che afferma che la probabilità di un evento nell'insieme Ω_Y può calcolarsi in termini della probabilità di un altro evento ad esso equivalente nell'insieme Ω_X.

Naturalmente, con riferimento all'insieme Ω su cui è definita la probabilità P si ha anche:

$$P\{Y \in B\} = P\{x \in \Omega_X \mid g(x) \in B\} = P\{\omega \mid g(X(\omega)) \in B\} \ .$$

Un caso particolarmente importante riguardante la v.a. $Y = g(X)$ concerne l'evento $\{Y \leq y\}$ dove y è un qualunque numero reale. In tal caso $P\{Y \leq y\}$ rappresenta la funzione di ripartizione di Y valutata in y, cioè $P\{Y \leq y\} = F_Y(y)$. In base alla (4.18) si ha allora:

$$P\{Y \leq y\} = F_Y(y) = P\{x \in \Omega_X \mid g(x) \leq y\} \tag{4.19}$$

ed il suo calcolo potrà effettuarsi utilizzando ancora la funzione di probabilità o di densità di probabilità di X.

Nel seguito è opportuno distinguere i due casi: il caso in cui X è una v.a. discreta con funzione di probabilità $p_X(x)$ e quello in cui X è una v.a. continua con funzione di densità di probabilità $f_X(x)$.

4.6.1 Variabili aleatorie discrete

Se X è una v.a. discreta con $\Omega_X = \{x_1, x_2, \ldots,\}$ allora la v.a. $Y = g(X)$ sarà necessariamente discreta in quanto potremo enumerare i suoi valori come $g(x_1), g(x_2), \ldots$ anche se non necessariamente risulteranno tutti distinti. In tal caso dalla (4.19) segue:

$$P\{Y \leq y\} = F_Y(y) = P\{x \in \Omega_X \mid g(x) \leq y\} = \sum_{\{x \in \Omega_X \mid g(x) \leq y\}} p_X(x) \ . \tag{4.20}$$

In altre parole, per calcolare la probabilità dell'evento $\{Y \leq y\}$ si determina il suo evento equivalente in termini della variabile X, cioè $\{x \mid g(x) \leq y\}$ e si sommano poi le probabilità dei valori x appartenenti a quest'ultimo insieme. In maniera analoga alla (4.20), si può calcolare la funzione di probabilità di Y:

$$P\{Y = y\} := \sum_{\{x \in \Omega_X \mid g(x) = y\}} p_X(x) \ .$$

Esempio 4.21 Sia X una v.a. avente distribuzione di Poisson, con densità:

$$p(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!} & \text{per } x = 0, 1, 2 \ldots \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare la legge della v.a. $Y = X^2 + 3$.

Soluzione. Poichè x assume solo valori interi non negativi, allora la funzione $y = g(x) = x^2 + 3$ è un'applicazione da $A = \{0, 1, 2, \ldots\}$ in $B = \{3, 4, 7, 12, 19, 28, \ldots\}$. La funzione inversa è $x = g^{-1}(y) = \sqrt{y-3}$ e poichè x assume solo valori non negativi, allora possiamo considerare solo i valori non negativi di $y-3$. Si ha pertanto:

$$P\{Y=y\} = p_Y(y) = P\{X=\sqrt{y-3}\} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{\sqrt{y-3}}}{\sqrt{y-3}!} & \text{per } y \in B \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

♣

4.6.2 Funzioni di variabili aleatorie continue

Spesso il problema si riconduce al calcolo della densità di una v.a. della forma $Y = \phi(X)$, dove X è una v.a. m-dimensionale (caso particolare: $m=1$) di cui si conosce la densità f e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ è una funzione che soddisfi opportune ipotesi di regolarità. Al fine del calcolo della legge di $g(X)$, considerata la relazione:

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \in (-\infty, y] = P\{X \in g^{-1}(-\infty, y]\} \tag{4.21}$$

il problema è quello di esplicitare opportunamente la quantità: $P\{X \in g^{-1}(-\infty, y]\}$.

Un primo metodo consiste nel determinare la funzione di ripartizione di $g(X)$, che in linea di principio può essere ottenuta in base alla relazione:

$$P\{X \in \phi^{-1}(]-\infty, t])\} = \int_{\phi^{-1}(]-\infty,t]} f(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{4.22}$$

Questo calcolo è praticabile se si riesce a determinare l'insieme $g^{-1}(]-\infty, t]$ dei valori x tali che $g(x) \leq t$ e poi calcolare l'integrale. Una volta determinata la funzione di ripartizione, la funzione di densità g si ottiene per derivazione. A tal proposito, consideriamo il seguente importante esempio:

Esempio 4.22 ($g(x) = x^2$) Sia X una v.a. reale con densità f. Calcoliamo la legge di $Y = X^2$.

In questo caso $g(x) = x^2$ e, se $t > 0$, allora $g^{-1}(]-\infty, t]) = g^{-1}([0,t]) = [-\sqrt{t}, \sqrt{t}]$. Si ha pertanto, in base alla (4.22) per $t > 0$

$$G(t) = P\{X^2 \leq t\} = \begin{cases} P\{-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}\} = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

da cui derivando:

$$g(t) = G'(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \Big(f_X(\sqrt{t}) + f_X(-\sqrt{t}) \Big) & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{4.23}$$

In generale, in casi del genere dovremmo verificare che la (4.23) sia una funzione di densità; bisogna verificare che l'integrale di $g(t)$ sia uguale a $G(t)$. Si ha in effetti:

$$\int_{-\infty}^{t} g(u)\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{t} \frac{1}{2\sqrt{u}}\big(f(\sqrt{u}) + f(-\sqrt{u})\big)\,\mathrm{d}u$$

e posto $z = \sqrt{u}$, segue $z^2 = u$ da cui $2z\mathrm{d}z = \mathrm{d}u$ e quindi:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t} g(u)\,\mathrm{d}u &= \int_{0}^{\sqrt{t}} \big(f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})\big)\,\mathrm{d}z = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) \;=\; G(t)\end{aligned}$$

♣

Esempio 4.23 ($g(x) = ax + b$) Sia X una v.a. reale di densità f e siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Vogliamo calcolare la legge di $g(X) = aX + b$.

Supponiamo dapprima $a > 0$, allora:

$$G(t) = P\{aX + b \leq t\} \;=\; P\left\{X \leq \frac{t-b}{a}\right\} = F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

da cui derivando:

$$g(t) = G'(t) = \frac{1}{a} f\left(\frac{t-b}{a}\right) \;.$$

Se $a < 0$, si ha invece:

$$G(t) = P\{aX + b \leq t\} \;=\; P\left\{X \geq \frac{t-b}{a}\right\} = 1 - F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

da cui derivando:

$$g(t) = G'(t) = -\frac{1}{a} f\left(\frac{t-b}{a}\right) \;.$$

In generale i due casi possono essere scritti sinteticamente:

$$g(t) = G'(t) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{t-b}{a}\right) \;. \tag{4.24}$$

♣

Nel caso continuo si ha il seguente teorema (di cui si omette la dimostrazione).

Teorema 4.24 Sia X una v.a. continua a valori in $\Omega_X \subseteq \mathbb{R}$ avente densità di probabilità $f_X(x)$ e sia $y = g(x)$ una funzione strettamente crescente (descrescente) e differenziabile con $g'(x) > 0$

($g'(x) < 0$) per ogni $x \in \Omega_X$. Allora la v.a. $Y = g(X)$ è continua e la sua densità di probabilità è data da:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| & \text{se } \alpha < y < \beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{4.25}$$

dove $\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, $\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$.

Esercizio 4.25 Sia $X \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e consideriamo la funzione $g(x) = \tan x$. Calcolare la densità della v.a. $Y = \tan x$.

Soluzione. La v.a. X è uniforme nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, pertanto la sua funzione di densità è data da:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{per } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In base alla (4.25) dobbiamo considerare dapprima la funzione inversa di $g(x)$, cioè $g^{-1}(y) = \arctan y$ e quindi

$$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{d}{dy}(\arctan y) = \frac{1}{1+y^2}$$

e quindi, in base alla (4.25), si ha:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2} .$$

Si vede pertanto che la v.a. Y segue una distribuzione di Cauchy. ♣

Esercizio 4.26 Sia X una v.a. avente densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{2} & \text{per } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare la densità di $Y = X^2$.

Soluzione. Possiamo scrivere la funzione di densità nella forma

$$f_X(x) \;=\; \frac{1+x}{2}\, I_{(-1,1)}(x)$$

dove $I_A(x)$ denota la funzione indicatrice, cioè $I_A(x) = 1$ per $x \in A$ e 0 altrimenti. Calcoliamo dapprima la funzione di ripartizione; per $x \in (-1, 1)$ si ha:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1+u}{2}\, I_{(-1,1)}(u)\, du = \int_{-1}^{x} \frac{1+u}{2}\, du \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(1+u)^2}{2}\right]_{-1}^{x} = \frac{(1+x)^2}{4}\;. \end{aligned}$$

E quindi otteniamo:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \le -1 \\ \dfrac{(1+x)^2}{4} & \text{per } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{per } x \ge 1\;. \end{cases}$$

La funzione di densità della v.a. $Y = X^2$ può essere ricavata in due modi diversi. Consideriamo dapprima il *metodo della funzione di ripartizione*. Per $x \in (-1, 1)$ si ottiene $y \in [0, 1)$. Si ha quindi $F_Y(y) = 0$ per $y < 0$;

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P[Y \le y] \;&=\; P[X^2 \le y] = P[-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}] = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \\ &= \frac{(1+\sqrt{y})^2}{4} - \frac{(1-\sqrt{y})^2}{4} = \frac{1+y+2\sqrt{y}-1-y+2\sqrt{y}}{4} = \sqrt{y} \end{aligned}$$

per $y \in [0, 1)$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \ge 1$. E quindi, riassumendo si ha:

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y < 0 \\ \sqrt{y} & \text{per } 0 < y \le 1 \\ 1 & \text{per } y > 1. \end{cases}$$

La funzione di densità si ottiene derivando la funzione di ripartizione:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{d}{dy}\sqrt{y} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} & \text{per } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

che possiamo scrivere sinteticamente utilizzando la funzione indicatrice:

$$f_Y(y) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{y}}\, I_{[0,1)}(y)\;. \tag{4.26}$$

In alternativa si può utilizzare il teorema del calcolo di funzioni di densità per trasformazioni di v.a. Per applicare tale metodo, devono essere soddisfatte due ipotesi:

i. la funzione $y = g(x)$ deve definire una trasformazione biunivoca da $R_X = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$ in $R_Y = \{y \in \mathbb{R} : y = g(x)$ per qualche $x \in R_X\}$;

ii. la derivata della funzione inversa $x = g^{-1}(y)$ rispetto a y deve essere continua e diversa da zero per $y \in R_Y$.

In questo caso, per $x \in (-1, 1)$, la funzione $g(x) = x^2$ non è biunivoca; è pertanto necessario considerare i due sottointervalli $-1 < x < 0$ e $0 \leq x < 1$ in cui la funzione $g(x) = x^2$ è biunivoca ed operare separatamente in ciascuno di essi.

Consideriamo dapprima l'intervallo $-1 < x < 0$ in cui la funzione inversa è $g^{-1}(y) = -\sqrt{y}$; per $0 < y < 1$ si ha:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| f_X(g^{-1}(y)) = \left|\frac{d}{dy}\left(-\sqrt{y}\right)\right| \frac{1-\sqrt{y}}{2} = \left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| \frac{1-\sqrt{y}}{2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{1-\sqrt{y}}{2} = \frac{1-\sqrt{y}}{4\sqrt{y}} \ . \end{aligned} \tag{4.27}$$

Con riferimento all'intervallo $0 < x < 1$, si ha:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| f_X(g^{-1}(y)) \left|\frac{d}{dy}\sqrt{y}\right| \frac{1+\sqrt{y}}{2} = \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| \frac{1+\sqrt{y}}{2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{1+\sqrt{y}}{2} = \frac{1+\sqrt{y}}{4\sqrt{y}} \ . \end{aligned} \tag{4.28}$$

E quindi la funzione di densità di $Y = X^2$ è data dalla somma delle due funzioni di densità (4.27) e (4.28):

$$f_Y(y) = \left(\frac{1-\sqrt{y}}{4\sqrt{y}} + \frac{1+\sqrt{y}}{4\sqrt{y}}\right) I_{[0,1)}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\, I_{[0,1)}(y)$$

per $0 < y < 1$. Si ritrova pertanto la densità (4.26). ♣

Nota 4.27 Si noti che il punto di partenza del Teorema 4.24 è sempre la relazione (4.21). Se le condizioni del Teorema 4.24 sono soddisfatte, allora l'insieme $\{X \in \phi^{-1}(-\infty, y]\}$ è equivalente all'insieme $\{X \leq \phi^{-1}(y)\}$ oppure all'insieme $\{X \geq \phi^{-1}(y)\}$ a seconda che la funzione ϕ sia crescente o decrescente. Il 4.24 è abbastanza utile, ma se le ipotesi non sono soddisfatte, bisogna ripartire dalla 4.21, come illustra il seguente esempio.

Esercizio 4.28 Sia X una v.a. avente funzione di densità:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\pi^2} & \text{per } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare la funzione di densità della variabile $Y = \sin X$.

Soluzione. Consideriamo la funzione $y = g(x) = \sin x$. Questa funzione in $(0, \pi)$ non è strettamente monotona e quindi le condizioni del Teorema 4.24 non sono soddisfatte. Pertanto dobbiamo distinguere i due sotto intervalli $0 < x < \pi/2$ e $\pi/2 < x < \pi$. Si ha quindi, per $0 < y < 1$:

$$\begin{aligned} P\{Y \leq y\} = P\{\sin X \leq y\} &= P\{[0 \leq X \leq \arcsin y] \cup [\pi - \arcsin y \leq X \leq \pi]\} , \\ &= P\{[0 \leq X \leq \arcsin y]\} + P\{[\pi - \arcsin y \leq X \leq \pi]\} , \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} P\{Y \leq y\} &= \int_0^{\arcsin y} f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{\pi^2}\right]_0^{\arcsin y} + \left[\frac{x^2}{\pi^2}\right]_{\pi - \arcsin y}^{\pi} \\ &= \left(\frac{\arcsin y}{\pi}\right)^2 + 1 - \left(\frac{\pi - \arcsin y}{\pi}\right)^2 . \end{aligned}$$

Pertanto la funzione di densità di Y, per $0 < y < 1$, è data da:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\arcsin y}{\pi}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[1 - \left(\frac{\pi - \arcsin y}{\pi}\right)^2\right] \\ &= \frac{2 \arcsin y}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} - 2\left(\frac{\pi - \arcsin y}{\pi}\right) \frac{-1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \\ &= \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1 - y^2}} (2 \arcsin y + 2\pi - 2 \arcsin y) \\ &= \frac{2}{\pi \sqrt{1 - y^2}} . \end{aligned}$$

In definitiva si ha:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi \sqrt{1 - y^2}} & \text{per } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

♣

4.7 Altri Esercizi

Esercizio 4.29 Si consideri la seguente funzione $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax & \text{per } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare la costante a affinchè $f(x)$ sia una funzione di densità.

Soluzione. Affinchè $f(x)$ sia una funzione di densità, devono essere rispettate le seguenti due proprietà:

$$f(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \ .$$

Dalla prima condizione segue che deve risultare $ax \geq x^2$ per ogni $0 \leq x \leq 2$, da cui $a \geq 2$. Imponendo la seconda condizione, si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^2 (-x^2 + ax)dx = \left[\frac{x^3}{3} + a\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -\frac{8}{3} + 2a = 1$$

da cui si ottiene:

$$a = \frac{11}{6}$$

che risulta non ammissibile in quanto inferiore a 2 (per la condizione precedente). Pertanto non esiste alcun valore di a per cui $f(x)$ è una funzione di densità. Infatti per $x = 2$ risulta

$$f(2) = -4 + \frac{11}{3} = -\frac{1}{3} < 0 \ .$$

♣

Esercizio 4.30 Si consideri la funzione di densità bivariata:

$$f(x_1, x_2) = 2 \qquad 0 < x_1 < x_2 < 1 \ .$$

Si calcolino le densità marginali $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ e si verifichi che X_1 e X_2 sono dipendenti.

Soluzione. Risulta:

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \int_{x_1}^1 f(x_1, x_2)dx_2 \ = \int_{x_1}^1 2dx_2 2(1 - x_1) \\ f_2(x_2) &= \int_0^{x_2} f(x_1, x_2)dx_1 \ = \int_0^{x_2} 2dx_1 = 2x_2 \ . \end{aligned}$$

Poichè risulta

$$f(x_1, x_2) = 2 \neq 4x_2(1 - x_1) = f_1(x_1)f_2(x_2)$$

in un insieme di misura non nulla del dominio $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x_1 < x_2 < 1\}$, ne segue che le v.a. X_1 e X_2 sono dipendenti. ♣

Esercizio 4.31 Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due funzioni di densità esponenziali di parametro rispettivamente $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Si consideri la funzione $f(x)$ definita come segue:

$$f(x) = \alpha f_1(x) + (1 - \alpha)f_2(x) \qquad 0 < \alpha < 1 \ .$$

1. Dimostrare che la funzione $f(x)$ è anch'essa una funzione di densità.

2. Calcolare la speranza matematica di $f(x)$.

3. Denotata con X una v.a. avente legge $f(x)$, calcolare il valore della costante α tale che $P(X > 2) = 0,1$.

Soluzione. In base alle ipotesi del problema, le funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono funzioni di densità esponenziali di parametri $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$:

$$f_1(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Ne segue che $f(x)$ è definita su tutto l'asse reale essendo una combinazione lineare di $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Per quanto riguarda il primo punto bisogna verificare che $f(x)$ soddisfa le due ipotesi richieste per la funzione di densità:

1. $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in R$,
2. $\int_R f(x)\, dx = 1$.

La verifica della prima condizione è immediata in quanto $f(x)$ è una combinazione lineare di funzioni di densità rispetto ai pesi α e $(1-\alpha)$ che sono entrambi positivi. Anche la seconda condizione è verificata poichè:

$$\begin{aligned}\int_R f(x)\, dx &= \int_R [\alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_2(x)]\, dx = \alpha \int_R f_1(x) dx + (1-\alpha) \int_R f_2(x)\, dx \\ &= \alpha + (1-\alpha) = 1 \; .\end{aligned}$$

La speranza matematica di X si ottiene da un'applicazione della proprietà di linearità, ricordando che la speranza matematica di una v.a. esponenziale di parametro λ è uguale a $\frac{1}{\lambda}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_R x[\alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_2(x)]\, dx = \alpha \int_R x f_1(x) dx + (1-\alpha) \int_R x f_2(x)\, dx \\ &= \alpha + \frac{1-\alpha}{2} = \frac{\alpha+1}{2} \; .\end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'ultimo punto, calcoliamo dapprima $P(X > 2)$. Analogamente a quanto visto in precedenza, ricordando che la funzione di sopravvivenza di una densità esponenziale di parametro λ è $S(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$, si ha:

$$\begin{aligned}P(X > 2) &= \int_2^{+\infty} f(x) dx = \int_2^{+\infty} [\alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_2(x)]\, dx \\ &= \alpha \int_2^{+\infty} f_1(x) dx + (1-\alpha) \int_2^{+\infty} f_2(x)\, dx = \alpha \mathrm{e}^{-2} + (1-\alpha)\mathrm{e}^{-4} \; .\end{aligned}$$

Pertanto il valore di α tale che $P(X > 2) = 0,1$ si ricava come soluzione dell'equazione:

$$\alpha \mathrm{e}^{-2} + (1-\alpha)\mathrm{e}^{-4} = 0,1 \; ,$$

da cui

$$\alpha = \frac{0,1 - \mathrm{e}^{-4}}{\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-4}} \approx 0,6980 \; .$$

♣

Esercizio 4.32 Un vettore aleatorio (X, Y) ha densità di probabilità

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{per } (x,y) \in [0,a] \times [0,a] \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

1. Calcolare la costante a
2. Calcolare la densità marginale $f_X(x)$;
3. Verificare se $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq y, X \leq x)$.

Soluzione. Essendo $f(x, y)$ una funzione di densità, deve risultare:

$$\int_0^a \int_0^a (x+y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 \ . \tag{4.29}$$

Si ha pertanto:

$$\int_0^a \int_0^a (x+y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a (x+y)\, \mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}x \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^a = \int_0^a \left(ax + \frac{a^2}{2} \right) \mathrm{d}x$$
$$= \left[a\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2}x \right]_0^a = a^3 \ .$$

In base alla condizione (4.29), segue che $a = 1$. La densità marginale di X è data da:

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\, \mathrm{d}y = \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = x + \frac{1}{2} \qquad x \in [0,1] \ .$$

Infine si ha:

$$P(X \leq x, Y \leq y) = \int_0^x \int_0^y (u+v) \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^x \left(uy + \frac{y^2}{2} \right) \mathrm{d}u = \frac{x^2}{2}y + \frac{y^2}{2}x \ .$$

Si vede immediatamente che la condizione $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq y, X \leq x)$ è soddisfatta. ♣

Esercizio 4.33 Sia X, Y una v.a. doppia avente funzione di densità $f(x, y)$ definita come segue:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & \text{per } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

1. Verificare se X e Y sono v.a. indipendenti;
2. Verificare se le v.a. X^2 e Y^2 sono indipendenti;
3. Calcolare la funzione di densità congiunta di X^2 e Y^2.

Soluzione. Per quanto riguarda il primo punto, bisogna determinare le funzioni di densità marginali di X e di Y e verificare se è soddisfatta la condizione di indipendenza. La funzione di densità marginale di X è data da:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 4xy\,dy = 4xI_{(0,1)}(x) \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \\ &= 2x\,I_{(0,1)}(x). \end{aligned}$$

Per simmetria si ha la funzione di densità marginale di Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = 2y\,I_{(0,1)}(y)\,.$$

Poichè risulta

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

ne segue in particolare che X e Y sono indipendenti. Ovviamente, poichè X e Y sono indipendenti, anche X^2 e Y^2 sono indipendenti in quanto funzioni di v.a. indipendenti. In base all'indipendenza di X^2 e Y^2 la funzione di densità congiunta di X^2 e Y^2 sarà uguale al prodotto delle densità delle v.a. X^2 e Y^2. Ricaviamo la funzione di densitò di X^2. Posto $z = g(x) = x^2$, possiamo applicare il teorema per il calcolo della densità di una funzione di v.a. essendo soddisfatte le due ipotesi del teorema:

1. la funzione $z = g(x)$ definisce una trasformazione biunivoca nell'intervallo $(0,1)$;
2. la derivata di $x = g^{-1}(z) = \sqrt{z}$ è continua rispetto a z ed è diversa da zero in $(0,1)$.

Per $0 < x < 1$ risulta $0 < z < 1$ Si ha pertanto:

$$f_Z(z) = \left|\frac{d}{dz} g^{-1}(z)\right| f_X[g^{-1}(z)] I_{(0,1)}(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} 2\sqrt{z} I_{(0,1)}(z) = I_{(0,1)}(z)\,.$$

Sege in definitiva:

$$f_{X^2}(x) = I_{(0,1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

$$f_{Y^2}(y) = I_{(0,1)}(y) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Pertanto, per l'ipotesi di indipendenza in base a quanto asserito in precedenza, la funzione di densità congiunta è:

$$f_{X^2,Y^2}(x,y) = f_{X^2}(x) \cdot f_{Y^2}(y) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x) \cdot I_{(0,1)}(y) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < x < 1\,, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

cioè è la densità unitaria sul quadrato di lato uno. ♣