ESERCITAZIONE

Prof. Cerchiara Rocco Roberto

Materiale e Riferimenti

1. **Lucidi distribuiti in aula**
2. **Loss Models 1998 – First Edition**

1. Variabili condizionate e Distribuzione di Poisson Misturata
2. Distribuzione Lognormale
3. Stima del parametro della Poisson Semplice con l'effetto delle "esposizioni"

EVENTI CONDIZIONATI:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

che equivale a

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

se *A* e *B* sono indipendenti

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

quindi avremo

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

nel discreto:

$$P\left(X = x \mid Y = y\right) = \frac{P\left(X = x, Y = y\right)}{P\left(Y = y\right)}$$

nel continuo

$$f_{X|Y}\left(x \mid y\right)dx = \frac{f_{X,Y}\left(x, y\right)dxdy}{f_Y\left(y\right)dy}$$

$$E(X|Y) = \sum_x x\, P(X = x | Y = y)$$

$$E(X) = \sum_y E(X|Y = y)P(Y = y)$$

dim:

$$E(X) = \sum_y \sum_x x\, P(X = x | Y = y)P(Y = y)$$

$$E(X) = \sum_y \sum_x x\, P(X = x, Y = y) =$$

$$E(X) = \sum_x x \sum_y P(X = x, Y = y) =$$

$$E(X) = \sum_x x\, P(X = x)$$

POISSON MISTURATA (DAIKIN ET AL 1994)

N ~ Poisson(λ) e

$\tilde{q}$ variabile aleatoria *disturbo o misturante*, distribuita con funzione di densità *$f_q(q)$*

$$p_k(\tilde{q}) = \int_0^\infty P(k \mid q)\, f_Q(q) dq = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda q}(\lambda q)^k}{k!} f_{\tilde{q}}(q) dq$$

$$E(\tilde{q}) = 1$$

Proprietà

- $E(N) = \lambda$
- $Var[N] = \lambda + \lambda^2 Var[\tilde{q}]$

La varianza della misturata è pari alla varianza dovuta alla poissoniana – uguale alla media e cioè λ - più quella aggiunta dalla distribuzione misturante: $\lambda^2\, Var[\tilde{q}]$.

OPPURE: POISSON MISTURATA (BÜHLMANN)

$N \sim Poisson(\Lambda)$ e

Λ variabile aleatoria *misturante*, distribuita con funzione di densità $f_\Lambda(\lambda)$

$$p_k(\Lambda) = \int_0^\infty P(k \mid \lambda)\, f_\Lambda(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\, f_\Lambda(\lambda) d\lambda$$

Proprietà

- $E(N) = E(\Lambda)$
- $Var[N] = E[\Lambda] + Var[\Lambda]$

La varianza della mistura è pari alla varianza dovuta alla poissoniana – uguale alla media e cioè $E[\Lambda]$ - più quella aggiunta dalla distribuzione misturante: $Var[\Lambda]$.

CASO POISSON – GAMMA

Se si usa come funzione misurante una *Gamma(α,τ)*:

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{\tau^\alpha e^{-\lambda\tau} \lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad con\,\alpha,\tau > 0$$

$$\text{e } \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

$$E[\Lambda] = \frac{\alpha}{\tau} \;\ldots\; Var[\Lambda] = \frac{\alpha}{\tau^2}$$

si ottiene per *N* una distribuzione *Binomiale negativa (τ,α)*:

$$p_k(\alpha,\tau) = \binom{k+\alpha-1}{\alpha-1} \left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\tau}{1+\tau}\right)^k$$

con

$$E[N] = \frac{\alpha}{\tau}$$

$$Var[N] = \frac{\alpha}{\tau}\left(1 + \frac{1}{\tau}\right) = E[N] + \frac{\alpha}{\tau^2}$$

La *binomiale negativa* converge ad una *Poisson* in particolari condizioni:

$$BinNeg(\alpha,\tau)\xrightarrow[\substack{\alpha\to\infty \\ \tau\to 0 \\ \alpha/\tau=cost.}]{} Poisson\left(\alpha/\tau\right).$$

Quindi il parametro α può essere interpretato come una misura del grado di eterogeneità del portafoglio; quando α è grande, il portafoglio è abbastanza omogeneo, i sinistri accadono in maniera abbastanza casuale e la loro distribuzione si avvicina a quella di *Poisson*.

Esercizio 1

Si è rilevata la seguente distribuzione delle polizze secondo il numero di sinistri.

Numero sinistri	Numero polizze
0	3288
1	642
2	66
3	4
totale	4000

E' ragionevole modellizzare tale distribuzione con una Poissoniana? Con quali parametri?

Soluzione esercizio 1

Numero sinistri	Numero polizze	Frequenze relative	Poisson (0,1965)	Numero polizze stimato
0	3288	0,8220	0,82160	3286
1	642	0,1605	0,16144	646
2	66	0,0165	0,01586	63
3	4	0,0010	0,00104	4
totale	4000	1	circa 1	c. 4000

$$\bar{X} = 0.1965 \quad \text{AND} \quad S^2 = 0.196888$$

stima con il metodo dei momenti:

$$Hp: \quad \hat{\lambda} = \bar{X} \quad \Rightarrow Poisson(0.1965)$$

Esercizio 2

Si è rilevata la seguente distribuzione delle polizze secondo il numero di sinistri.

MERCATO RCAUTO ITALIA 1993.

Numero sinistri	Numero polizze
0	90550
1	8733
2	652
3	56
4	9
totale	10000

E’ ragionevole modellizzare tale distribuzione con una Poissoniana? Con quali parametri?

Soluzione esercizio 2

$$\overline{X} = 0.10241 \quad \text{AND} \quad S^2 = 0.109402$$

Numero sinistri	Numero polizze	Frequenze relative	Poisson (0,10241)	Numero polizze stimato
0	90550	0,90550	0,90266	90266
1	8733	0,08733	0,09244	9244
2	652	0,00652	0,00473	473
3	56	0,00056	0,00016	16
4	9	0,00009	0,00000	0
totale	10000	1	circa 1	c. 10000

stima con il metodo dei momenti:

$$Hp: \quad \hat{\lambda} = \overline{X} \quad \Rightarrow Poisson(0.10241)$$

Soluzione esercizio 2 (Continua)

La media e la varianza empiriche sono sufficientemente diverse per giustificare una distribuzione del numero dei sinistri con 2 parametri.

Usando la Binomiale Negativa (Polya) e stimandone i parametri col metodo dei momenti si ottengono migliori risultati

Numero sinistri	Numero polizze	Frequenze relative	Stime Poisson	Stime Polya
0	90550	0,90550	90266	90568
1	8733	0,08733	9244	8682
2	652	0,00652	473	694
3	56	0,00056	16	52
4	9	0,00009	0	4
totale	10000	1	circa 1	c. 10000

ESERCIZIO 3

La variabile *N* numero dei sinistri sia distribuita secondo la tabella seguente:

Numero sinistri	Numero polizze
0	17353
1	1414
2	620
3	25
totale	19412

Si ipotizzi che l'ammontare *Z* di un sinistro sia distribuito secondo una esponenziale negativa di media 1000:

$$F_Z(z) = 1 - e^{-0.001z} \quad \dots \quad f_Z(z) = 0.001 \cdot e^{-0.001z}$$

Supponendo i costi dei sinistri indipendenti tra di loro e dal numero dei sinistri e posto

$$X = \sum_{i=0}^{N} Z_i ,$$

si calcoli:

- ***E(X|N=0)* , *E(X|N=1)* , *E(X|N=2)* , *E(X|N=3)***
- ***E(X)***

SOLUZIONE

N	$P(N=n)$
0	**89.39%**
1	**7.28%**
2	**3.19%**
3	**0.13%**

$$E\left(X \mid N=0\right)=0$$

$$E\left(X \mid N=1\right)=E(Z)=1000$$

$$E\left(X \mid N=2\right)=E(Z+Z)=2E\left(Z\right)=2000$$

$$E\left(X \mid N=3\right)=E(Z+Z+Z)=3E\left(Z\right)=3000$$

$$E\left(X\right)=\sum_{i=0}^{3}E\left(X \mid N=i\right)P\left(N=i\right)=140.58$$

ESERCIZIO 4

Il numero di sinistri N per polizza RCAuto di una compagnia sia distribuito secondo Poisson(λ). La compagnia ritenga di avere un portafoglio omogeneo. Per l'anno successivo ci si attende:

1. **una diminuzione generalizzata della frequenza sinistri pari al 5% (trend decrescente del mercato italiano);**
2. **un fattore di disturbo non generalizzato (effetto patente a punti? Blocco del traffico?) sintetizzato da q:**

Valore	**Probabilità**
90%	**0.4**
110%	**0.4**
100%	**0.2**

Calcolare :

1. **il numero medio di sinistri commessi da un guidatore nell'anno successivo**
2. **la probabilità che tale guidatore commetta 0 sinistri.**

SOLUZIONE

Modellizzazione:

$$N = Poisson(\lambda)$$

inserisco il trend decrescente (costante)

$$N = Poisson\left(\lambda \frac{95}{100}\right)$$

disturbo aleatorio:

$$\tilde{q} = \begin{cases} 0.9 & p(q = 0.9) = 0.4 \\ 1.0 & p(q = 1.0) = 0.2 \\ 1.1 & p(q = 1.1) = 0.4 \end{cases} \qquad \text{N.B: } E(\tilde{q}) = 1$$

N **si distribuisce quindi**

$$P(N = k) = e^{-\lambda \frac{95}{100}\tilde{q}} \frac{\left(\lambda \frac{95}{100}\tilde{q}\right)^k}{k!}$$

Poisson misturata **(non è Poisson pura! q è aleatorio)**

PUNTO 1

Dato che

$$E(X) = \sum_y E(X \mid Y = y) P(Y = y)$$

nel nostro caso diventa:

$$E(N) = \sum_i E(N \mid q = q_i) P(q = q_i)$$

$$E(N) = E(N \mid q = 0.9)(0.4) +$$
$$+ E(N \mid q = 1.0)(0.2) + E(N \mid q = 1.1)(0.4)$$

cioè

$$= \lambda \frac{95}{100} 0.9(0.4) + \lambda \frac{95}{100} 1.0(0.2) + \lambda \frac{95}{100} 1.1(0.4)$$

$$E(N) = \lambda \frac{95}{100} 1 = \lambda \frac{95}{100} E(q) = \lambda \frac{95}{100}$$

PUNTO 2

$$P(N=2)$$

$$= P(N=2\,|\,q=0.9)P(q=0.9)+$$

$$+ P(N=2\,|\,q=1.0)P(q=1.0)+$$

$$+ P(N=2\,|\,q=1.1)P(q=1.1)$$

$$= e^{-\lambda\frac{95}{100}0.9}\frac{\left(\lambda\frac{95}{100}0.9\right)^2}{k!}(0.9)+\ \ldots$$

$$=$$

$$e^{-\lambda\frac{95}{100}}\frac{\left(\lambda\frac{95}{100}\right)^2}{2!}\bullet\left(e^{-0.9}P(0.9)+e^{-1.0}P(1.0)+e^{-1.1}P(1.1)\right)$$

$$=$$

$$p_2\left(\lambda\frac{95}{100}\right)\bullet E\left(e^{-q}\right)\neq p_2\left(\lambda\frac{95}{100}\right)\bullet E(q)$$

ESERCIZIO 5

Il numero di sinistri N per polizza RCAuto di una compagnia sia distribuito secondo Poisson(λ). La compagnia ritenga di suddividere il proprio portafoglio in 2 sole categorie: *buoni guidatori* e *cattivi guidatori*, caratterizzati da frequenza sinistri media pari a 10% e 30% rispettivamente. Detta α la percentuale di cattivi guidatori all'interno del portafoglio, calcolare:

3. **la probabilità che un *cattivo guidatore* commetta più di un sinistro;**
4. **il numero medio di sinistri causati da un guidatore scelto a caso**
5. **il livello massimo di α affinché la probabilità che un guidatore a caso non commetta sinistro sia non inferiore a 85%.**

SOLUZIONE

Punto 1

$$N_C = numero\ sinistri\ cattivo\ guidatore$$

$$N_C = N \mid guidatore\ \grave{e}\ cattivo = Poisson(0.3)$$

$$P(N_C > 1) = 1 - P(N_C = 0) - P(N_C = 1) =$$

= 1 – 0.7408 – 0.2222 = 0.0369

Punto 2

N.B. λ è variabile aleatoria *BERNOULLIANA*:

$$\lambda = \begin{cases} 0{,}3 & p = \alpha \\ 0{,}1 & p = 1-\alpha \end{cases}$$

$$P(N = k) = P\{(N = k) \cap [(\lambda = 0.3) \cup (\lambda = 0.1)]\} =$$

$$= P\{(N = k) \cap (\lambda = 0.3)\} + P\{(N = k) \cap (\lambda = 0.1)\} =$$

$$= P(N = k \mid \lambda = 0.3) \cdot P(\lambda = 0.3) +$$

$$+ P(N = k \mid \lambda = 0.1) \cdot P(\lambda = 0.1) =$$

$$= P(N = k \mid 0.3) \cdot \alpha + P(N = k \mid 0.1) \cdot (1-\alpha)$$

$$E(N) = \sum_k k \cdot p_k(0.3) \cdot \alpha + k \cdot p_k(0.1) \cdot (1-\alpha)$$

$$= \sum_k k \cdot p_k(0.3) \cdot \alpha + \sum_k k \cdot p_k(0.1) \cdot (1-\alpha) =$$

$$= \alpha \cdot 0.3 + (1-\alpha) \cdot 0.1 = \underline{\boldsymbol{E(\lambda)}}$$

Punto 3

$$P(N=0) \geq 0.85$$

$$p_0(0.3) \cdot \alpha + p_0(0.1) \cdot (1-\alpha) \geq 0.85$$

$$0.741 \cdot \alpha + 0.905 \cdot (1-\alpha) \geq 0.85$$

$$-0.164 \cdot \alpha \geq -0.058 \Rightarrow \alpha \leq 33\%$$

ESERCIZIO 6

Dalle statistiche dei sinistri di una compagnia di assicurazioni si può assumere che se *X* è il costo del sinistro, allora *Y=lnX* è distribuita come Normale di media 6,012 e varianza 1,792.

1. **Qual è la probabilità che un sinistro sia maggiore di 1200?**
2. **Qual è la probabilità che un sinistro sia compreso tra 0 e 200?**
3. **Qual è la probabilità che un sinistro sia compreso tra 200 e 500?**

soluzioni

1 = 0,210
2 = 0,297
3 = 0,263

ESERCIZIO 7

Determinare la stima di massima verosimiglianza del parametro della Poisson Semplice per i seguenti dati

Anno	Esposizioni	Sinistri
1986	2.145	207
1987	2.452	227
1988	3.112	341
1989	3.458	335
1990	3.698	362
1991	3.872	359

Indichiamo con λ il parametro della Poisson per una singola esposizione.

Nell'anno k avremo e_k esposizioni.

Quindi la v.a. numero sinistri segue una distribuzione di Poisson con parametro $\lambda\, e_k$.

Indicando con n_k il numero di sinistri in un anno allora la funzione di verosimiglianza è:

$$L = \prod_{k=1}^{6} \frac{e^{-\lambda \cdot e_k} \left(\lambda \cdot e_k\right)^{n_k}}{n_k!}$$

da cui si ottiene

$$l = LogL = \sum_k \left[-\lambda \cdot e_k + n_k \log(\lambda \cdot e_k) - \log(n_k!) \right]$$

e quindi

$$dl / d\lambda = \sum_k \left[-e_k + n_k \lambda^{-1} \right] = 0$$

e

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{k=1}^{6} n_k}{\sum_{k=1}^{6} e_k} = \frac{1.831}{18.737} = 0{,}09772$$

Al fine di verificare la bontà di adattamento di tale modello potremmo ricorrere al <u>test del chi-quadro</u>.

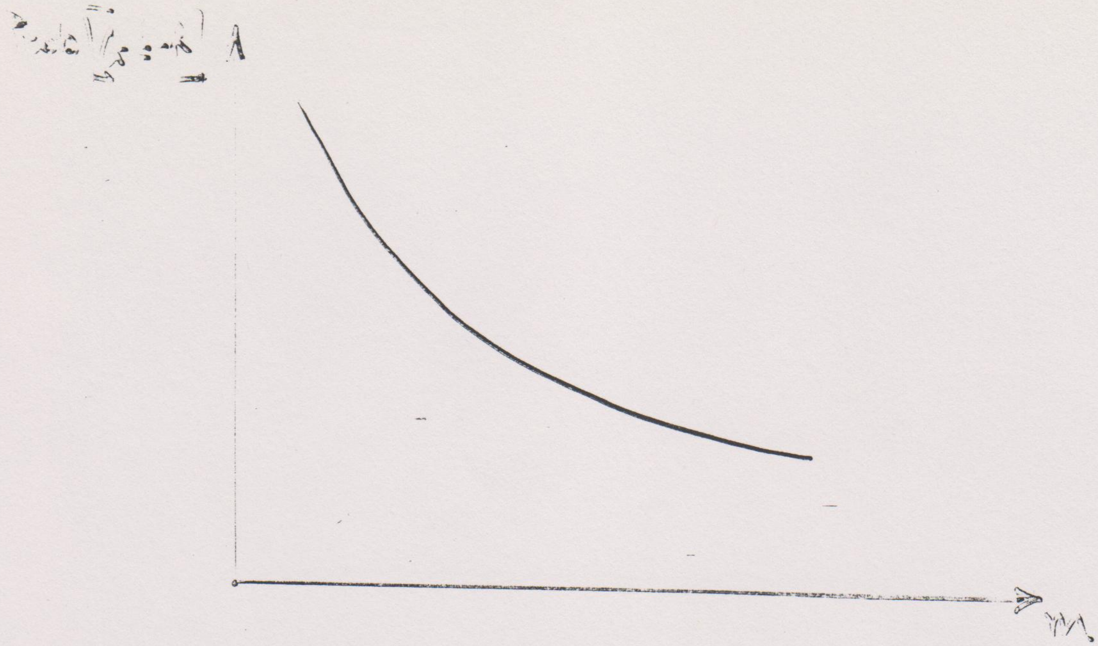
Se ipotizziamo che per ciascun anno il numero sinistri è il risultato della somma di un numero (esposizione) di v.a. iid, ➔ possiamo applicare il Teorema del Limite Centrale (ipotesi Dist. Normale)

Possiamo usare il test statistico

$$Q = \sum_k \frac{(n_k - E_k)^2}{V_k},$$

dove E_k (val. atteso) = λ e_k e V_k (varianza) = λ e_k

Tale Q ha un distribuzione (approssimata) chi-quadro con gradi di libertà uguale al numero di punti meno il numero di parametri da stimare (5).



QUINDI ANCHE IL CRITERIO DELLA ROVINA DEL GIOCATORE GIUSTIFICA IL RICORSO AL CARICAMENTO DEL PREMIO

CONSIDERIAMO ADESSO IL PREMIO (P) SECONDO IL CRITERIO DELL'UTILITÀ ATTESA

$$(*) \qquad E\left[u\left(P - X\right)\right] = 0$$

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE DI UTILITÀ QUADRATIC

$$u(x) = x - \frac{1}{2B}x^2 \qquad x \leq B$$

$$(*) \quad E\left[(P - X) - \frac{1}{2B}(P - X)^2\right] = 0$$

$$P - E(X) - \frac{1}{2B} E\left[P^2 - 2PX + X^2\right] = 0$$

$$2B\left[P - E(X)\right] - \left[P^2 + E(X^2) - 2PE(X)\right] = 0$$

$$-P^2 + P\left[2B + 2E(X)\right] - 2BE(X) - E(X^2) = 0$$

$$P^2 - 2P\left[B + E(X)\right] + 2BE(X) + E(X^2) = 0$$

$$P = \frac{2\left[B+E(X)\right] \pm \sqrt{4\left[B+E(X)\right]^2 - 4\left[2BE(X) + E(X^2)\right]}}{2}$$

$$P = B + E(X) \pm \sqrt{B^2 + 2BE(X) + E^2(X) - 2BE(X) - E(X^2)}$$

$$P = B + E(X) \pm \sqrt{B^2 - var(X)} \; ; \quad P = B + E(X) - \sqrt{B^2 - var(X)}$$

$$P = E(X) + B - \sqrt{B^2 - B^2 \frac{var(X)}{B^2}} = E(X) + B - \sqrt{B^2\left(1 - \frac{var(X)}{B^2}\right)}$$

$$P = E(X) + B\left[1 - \sqrt{1 - \frac{var(X)}{B^2}}\right]$$

RICORDIAMO LO SVILUPPO IN SERIE DI $(1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$(1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$P = E(X) + B\left[1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{var(X)}{B^2} + \frac{1}{8}\frac{var^2(X)}{B^4} + o\left(\frac{var^2(X)}{B^4}\right)\right]$$

TRASCURANDO NELLO SVILUPPO IN SERIE I TERMINI

$$\frac{\left[\operatorname{var}(X)\right]^n}{B^{n+1}}$$ DI ORDINE $N \geq 2$ OTTENIAMO

$$P \simeq E(X) + \frac{1}{2B}\operatorname{var}(X)$$

IL PREMIO SECONDO IL CRITERIO DELL'UTILITÀ ATTESA CONTIENE UN CARICAMENTO PROPORZIONALE ALLA VARIANZA DEL RISARCIMENTO ALEATORIO

I PIÙ DIFFUSI METODI DI CALCOLO DEL PREMIO P SONO:

- CRITERIO DELLA VARIANZA

$$P = E(X) + \alpha \operatorname{var}(X) \qquad \alpha > 0$$

- CRITERIO DELLO SCARTO QUADRATICO MEDIO

$$P = E(X) + \beta \sigma(X) \qquad \beta > 0$$

- CRITERIO DEL VALORE ATTESO

$$P = (1+\gamma) E(X) \qquad \gamma > 0$$

- CRITERIO DELL'UTILITÀ ATTESA