LA BASE TECNICA

Prof. Cerchiara Rocco Roberto

Materiale e Riferimenti

1. **Capitolo 2 del testo Tecnica attuariale delle assicurazioni contro i Danni (Daboni 1993)**

2. **Lucidi distribuiti in aula**

1. Impostazione teorica del calcolo del premio

Il risarcimento aleatorio *X* che grava sull'impresa di assicurazioni per effetto del contratto e che riguarda dunque il periodo contrattuale fa riferimento ad un danno globale, che è composto dalla somma di un numero aleatorio di danni, ciascuno oggetto di singolo risarcimento aleatorio.

L'importo *X* è pertanto rappresentabile con la $X = \sum_{i=0}^{N} Y_i$ dove *N* è il numero aleatorio di sinistri che possono colpire nel corso dell'anno il rischio e Y_i è il risarcimento aleatorio del sinistro i-esimo in ordine cronologico, si indica con Y_0 l'importo certo nullo. Z_i è l'importo aleatorio che misura il danno arrecato dal sinistro i-esimo, $Y_i = \varphi(Z_i)$ essendo $\varphi(.)$ una funzione di variabile reale che traduce le specifiche modalità del contratto assicurativo.

Se l'assicurazione è a valore intero $Y_i = Z_i$.
Se è previsto un massimale *M*, $Y_i = min(M, Z_i)$.
Se è previsto un massimale *M* e una franchigia assoluta d, $Y_i = min(M-d, Z_i-d)$.

Se sV è lo scoperto obbligatorio sul valore intero V, $Y_i = Z_i \frac{S}{V}$ in presenza di regola proporzionale.

<u>Ipotesi semplificatrici:</u>

- Gli Z_i e quindi gli Y_i, $i \geq 1$, sono importi aleatori stocasticamente indipendenti ugualmente distribuiti.
- Il numero aleatorio *N* è stocasticamente indipendente dagli Y_i.

Se *N* segue la distribuzione di Poisson, l'importo aleatorio segue la distribuzione di Poisson composta.

Indicando con p_n la probabilità dell'evento $\{N = n\}$ e con $F_y^{*(n)}(x)$ la funzione di ripartizione della somma di *n* importi aleatori Y_i ugualmente distribuiti e indipendenti, la funzione di ripartizione di *X* è data dalla

$$F_X(x) = \sum_{n=o}^{\infty} p_n \, F_y^{*(n)}(x)$$

dove $F_y^{*(n)}(x)$, nulla per *x*<0 assume il valore 1 per $x \geq 0$, mentre la $F_y(x)$ e quindi le $F_y^{*(n)}(x)$ si costruiscono a partire dalla $Y = \varphi(Z)$ e dalla distribuzione di *Z*. Le distribuzioni di *Z* e *N* costituiscono la base tecnica del rischio in esame. Ai fini del calcolo del premio netto, può bastare la conoscenza del momento primo e secondo di *X*.

Ora è $E(X) = E[E(X|N)]$ ove conta la sola subordinazione di *X* all'ipotesi $\{N > 0\}$ poiché $X|\{N = 0\}$ è la variabile certa 0. Per le ipotesi assunte è

$[E(X|N)] = N\,E(Y)$ [i] e dunque

$$E(X) = E(N) \cdot E(Y)$$

Il momento secondo è poi

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E\left[E(X^2|N)\right] = E\left[N \cdot E(Y^2) + N(N-1)\,[E\,(Y)]^2\,\right] = \\ &= E(N)\left[\,E(Y^2) - [\,E(Y)]^2\right] + E(N^2)[E(Y)]^2 \end{aligned}$$ [ii]

e ne segue che

$$var(X) = \; E(N)\, var(Y) + var(N)\left[E(Y)\,\right]^2. \qquad \textbf{[2]}$$

Quindi il calcolo dei momenti di X è ricondotto a quello dei momenti di N e Y separatamente. Si ipotizza ora che il numero aleatorio dei sinistri che gravano in un anno sul rischio sia poissoniana di parametro λ, quindi $E(N) = var(N) = \lambda$. Quindi sarà

$$var\,(X) = E(N)\, E(Y^2).$$

Se le distribuzioni statistiche invece evidenziano una sensibile differenza tra $E(N)$ e $var(N)$, in alternativa alla distribuzione poissoniana si può assumere che N segua una distribuzione mistura di Poisson, quindi sarà

$$Pr\{N = n\} = p_n = \int_0^\infty \frac{x^n}{n!} e^{-x} dF_\Lambda(x), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

in cui $F_\Lambda(x)$ rappresenta la funzione di ripartizione del parametro aleatorio Λ. Se si ipotizza che Λ segua una distribuzione di tipo Gamma di parametri ρ, ν si ottiene:

$$\begin{aligned} p_n &= \int_0^\infty \frac{x^n}{n!} e^{-x} \frac{\rho^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\rho x} dx = \frac{\Gamma(n+\nu)}{n!\,\Gamma(\nu)} \; \frac{\rho^\upsilon}{(\rho+1)^{n+\nu}} = \\ &= \frac{(\nu)_n}{n!} \left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^\nu \left(\frac{1}{\rho+1}\right)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

la distribuzione di N è dunque una Binomiale Negativa di parametri $\dfrac{\rho}{\rho+1}$ e ν. Inoltre poiché, come è noto, si verifica che $E\,(N) = \dfrac{\nu}{\rho}$ e $var\,(N) = \nu\,\dfrac{\rho+1}{\rho^2}$, si ottiene, in questo caso è $var(N) > E(N)$.

Per calcolare i momenti del singolo risarcimento aleatorio Y occorre rifarsi alla funzione φ in $Y = \varphi\,(Z)$, che indica come, per ogni sinistro, il risarcimento sia legato al danno. Indicata con $F(x)$ la funzione di ripartizione del danno Z, sussiste la: $E\,(Y) = E\,(Z) = \int_0^{+\infty} x\, dF(x)$

Nel caso di garanzia illimitata o a valore intero V (in questo caso l'estremo superiore a secondo membro è V o, comunque è $F(x) = 1$ per $x \geq V$). Mentre è

$$E(Y)=\int_d^M x\, d\, F(x)+M\int_M^{+\infty} dF(x)$$

nel caso di contratto con franchigia relativa o fissa *d* e massimale fisso *M*.

La seguente relazione

$$E(Y)=\int_d^M (x-d)\, dF(x)+(M-d)\int_M^{+\infty} dF(x)$$

fornisce invece il valore del risarcimento medio nel modello di franchigia assoluta *d* e massimale *M*. Si veda inoltre quanto riportato nelle pagg. 31-33 del testo di riferimento.

I modelli più frequentemente usati per descrivere la distribuzione del danno Z sono:

1. Distribuzioni Gamma (erlangiane)

La funzione di densità è $f_Z(x)=\dfrac{\rho^{\nu}}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}e^{-\rho x}$ $\quad 0<x<+\infty\,,\quad \nu>0,\quad \rho>0$

$E(Z)=\dfrac{\nu}{\rho}$, $\qquad \mathrm{var}(Z)=\dfrac{\nu}{\rho^2}$.

La distribuzione è detta erlangiana quando ν è un numero naturale *n* e sarà: $\Gamma(n)\ =\ (n-1)!$

Il danno *Z* segue una distribuzione di questo tipo quando può pensarsi generato dalla somma di *n* addendi indipendenti e distribuiti tutti secondo la distribuzione esponenziale di parametro ρ, la cui densità è $f(x)=\rho\ e^{-\rho x}$.

2. Distribuzioni lognormali

La funzione di densità è $f_Z(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}\,\sigma}\ e^{-\frac{(\ln x-m)^2}{2\sigma^2}}$ $\quad$ con $\ 0<x<+\infty\,,\quad \sigma>0$

$E(Z)=e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$ e $var(Z)=e^{2m+\sigma^2}\left[e^{\sigma^2}-1\right]$

Il danno segue una distribuzione lognormale quando ln*Z* segue una distribuzione normale. La lognormale è quindi adatta a descrivere la distribuzione del danno generato da un grande numero di fattori ugualmente distribuiti, indipendenti, che agiscono in senso moltiplicativo l'uno dell'altro.

3. Distribuzioni di Pareto

La funzione di densità è $\mathrm{f}_Z(\mathrm{x})=\alpha\dfrac{\mathrm{x}_0^{\alpha}}{\mathrm{x}^{\alpha+1}}$ $\quad$ con $\ \mathrm{x}_0\le \mathrm{x}<+\infty,\quad \mathrm{x}_0>0,\quad \alpha>0$

$\mathrm{E}(\mathrm{Z})\ =\mathrm{x}_0\,\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\ (\textbf{se}\ \ \alpha>\mathbf{1})$ $\quad$ e $\qquad \mathrm{var}(\mathrm{Z})\ =\ \mathrm{x}_0^2\,\dfrac{\alpha}{(\alpha-1)^2\,(\alpha-2)}\ (\textbf{se}\ \ \alpha>\mathbf{2})$

Questa distribuzione può essere utilizzata per descrivere, in maniera semplice, la coda della distribuzione del danno.

4. Distribuzioni troncate normalizzate

Si ritenga che la distribuzione di Z e/o di N possa essere ben approssimata da una funzione $F_Z(x)$ e $F_N(x)$, se si è interessati a considerare il caso in cui le determinazioni del danno Z (del numero N) sono contenute in un intervallo I, allora si considera la distribuzione di Z condizionata all'ipotesi $\{ Z \in I \}$ e si parlerà di distribuzione troncata o normalizzata. Nel caso continuo la funzione di densità sarà:

$$f_{Z|Z\in I}(x) = \frac{f_Z(x)}{\int_I f(x)dx} \quad , \qquad x \in I$$

Nel caso discreto e con riferimento all'ipotesi $\{ N \in I \}$, posto
$p_n = Pr\{N = n\}$, $n = 0, 1, \ldots,$ si ha:

$$p\left(N = n \,\middle|\, N \in I\right) = \frac{p_n}{\sum_{h \in I} p_h} \quad , \qquad n \in I \ .$$

Si veda l'esempio E.IV del testo, nelle pagg. 67-69, ai fini della stima dei parametri di queste distribuzioni.

2. Il calcolo del premio netto attraverso l'osservazione statistica

1. assicurazioni di risarcimento (R.C.)

Si pensi di aver esaminato la storia di un certo numero r di rischi omogenei, per un periodo di un anno. Si sono registrati globalmente n sinistri i cui rispettivi costi sono stati $c_1,\ldots,c_n$. Il rapporto

$$P_s = \frac{c_1 + \ldots + c_n}{r} = \text{Quota danni}$$

tra il costo globale e il numero r delle esposizioni è il premio statistico, cioè è propriamente un risarcimento medio. Pensando di applicare a ciascun rischio il costo P_s si sarebbe realizzato l'equilibrio, quindi P_s potrebbe essere interpretato come un premio equo.

Considerando anche il numero di sinistri risarciti n è

$$P_s = \frac{n}{r}\frac{c_1 + \ldots + c_n}{n} = \frac{n}{r} \cdot \bar{c} \qquad \textbf{[3]}$$

dove $\bar{c}$ è il costo medio di sinistro. Il rapporto $\frac{n}{r}$ è interpretabile come numero medio di sinistri che colpiscono in un periodo di osservazione un rischio. Esso è detto indice di sinistrosità o frequenza di sinistro. Di norma tale rapporto si mantiene inferiore a 1 ma in base alle definizioni di n e di r potrebbe superare l'unità, poiché può accadere che una polizza può registrare un numero anche elevato di sinistri nel periodo contrattuale. Si può osservare che la [3] può essere vista come la versione statistica, in termini di stime, della $P_e = E(X) = E(N)\cdot E(Y)$.

Interessa ora porre in evidenza un altro indice caratteristico della collettività esaminata: l'indice di ripetibilità. Decomponendo il numero di rischi nella somma $r = r_0 + r_1 + ... + r_h$ dove r_j è il numero dei rischi che hanno registrato esattamente j sinistri, $j = 0,1,...,h$ e sarà $h \le n$. Sussiste la seguente relazione:
$n = r_1 + 2r_2 + ... + hr_h$ e la frequenza può essere fattorizzata secondo la

$$\frac{n}{r} = \frac{r_1 + 2r_2 + ... + hr_h}{r_1 + r_2 + ... + r_h}\cdot\frac{r - r_0}{r} \qquad \textbf{[4]}$$

dove il rapporto $\frac{r_1 + 2r_2 + ... + hr_h}{r_1 + r_2 + ... + r_h}$ è il numero medio di sinistri per rischio sinistrato e ad esso si dà il nome di indice di ripetibilità. Il significato del rapporto $\frac{r - r_0}{r}$ è quello di complemento a 1 della frequenza osservata di non sinistro. La [4] traduce la relazione

$$E(N) = E(N \mid N \ge 1)\ Pr\{N \ge 1\} + E(N \mid N = 0)\, Pr\{N = 0\}$$

dove ovviamente $E(N \mid N = 0) = 0$.

In conclusione posto $1 - \frac{r_0}{r} = \alpha$ e $\frac{n}{r_1 + ... + r_h} = \nu$, il premio statistico è espresso da $P_s = \alpha\cdot\nu\cdot\bar{c}$.

La fattorizzazione del numero medio di sinistri, $\frac{n}{r}$, nel prodotto dell'indice di ripetibilità e della probabilità che il rischio subisca almeno un sinistro nell'esercizio, consente di evidenziare due caratteristiche di sinistrosità che variano notevolmente da ramo a ramo o, nello stesso ramo, tra sotto rami. Per pervenire alla costruzione del premio, basandosi sui criteri della varianza e dello scarto quadratico medio citati precedentemente, bisogna trovare una stima della varianza del risarcimento aleatorio X.

Dalla relazione [2] si avrà:

$$\mathrm{var}(X) = E(N)\,\mathrm{var}(Y) + \mathrm{var}(N)[E(Y)]^2 .$$

Bisogna ora stimare la varianza del singolo risarcimento Y e quella del numero aleatorio N dei sinistri per esercizio. Con riferimento all'osservazione di r rischi relativamente ai quali siano stati registrati n sinistri i cui risarcimenti siano stati rispettivamente uguali a $c_1,...,c_n$, denotando ancora con $\bar{c}$ il risarcimento medio, si potrà stimare la varianza Y secondo la

$$\sigma^2(Y)=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(c_k-\bar{c})^2$$

e quella di N secondo la

$$\sigma^2(N)=\sum_{j=0}^{h}\left(j-\frac{n}{r}\right)^2\frac{r_j}{r}$$

ove h è il massimo numero di sinistri registrati da un rischio, tra gli r rischi osservati e r_j è il numero dei rischi che hanno registrato esattamente j sinistri. Dopo di ciò una stima della varianza di X è data dalla

$$\sigma^2(X)=\frac{n}{r}\sigma^2(Y)+\sigma^2(N)\bar{c}^2.$$

In via alternativa e supposto di poter disporre della storia di r rischi omogenei relativa ai t anni precedenti l'attuale esercizio, la varianza di X può essere stimata rilevando il risarcimento globale x_{ij} del rischio i-esimo nel j-esimo esercizio precedente quello attuale ($i=1,2,...,r;\quad j=1,2,...,t$) posto quindi $x_i=\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}x_{ij}$,
una stima della varianza di X è data dalla

$$\sigma^2(X)=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{t-1}\sum_{j=1}^{t}(x_{ij}-x_{i.})^2\right).$$

Occorre peraltro osservare che in presenza di fenomeni inflazionistici gli importi x_{ij} dovranno essere debitamente inflazionati e tradotti tutti in termini di valore riferito all'esercizio attuale.

2. <u>assicurazioni di beni con valori assicurati: tasso di premio</u>

Il premio statistico prima esaminato (concernente l'assicurazione R.C.) dovrà essere modificato nel caso d'assicurazioni di beni, tenendo conto del valore di esposizione. Riferendoci agli r rischi omogenei, consideriamo i valori delle rispettive esposizioni $w_1,...,w_r$ e poniamo

$$w=\sum_{k=1}^{r}w_k=r\bar{w}$$

quindi $\bar{w}$ è un'esposizione media. Siano ancora $c_1,...,c_n$ i risarcimenti imputabili agli n sinistri denunciati nell'esercizio dagli r rischi; il costo medio $\bar{c}$ è definito dalla $\sum_{h=1}^{n}c_h=n\bar{c}$.

È detto <u>tasso di premio</u>, o meglio tasso medio di premio relativo agli r rischi, il rapporto tra risarcimento globale ed esposizione globale, cioè la quantità:

$$\tau=\frac{\sum_{h=1}^{n}c_h}{\sum_{k=1}^{r}w_k}=\frac{n\,\bar{c}}{r\,\bar{w}}=\frac{n}{r}\frac{\bar{c}}{\bar{w}}.$$

Il rapporto adimensionale $\frac{\bar{c}}{\bar{w}}$ tra il costo medio e l'esposizione media prende il nome di grado medio di danno e, in conclusione, il tasso di premio è il prodotto della frequenza di sinistro per il grado medio di danno. Ovviamente si parlerà di tasso annuo di premio quando il periodo di esposizione è l'anno.

Per quanto riguarda l'esposizione al rischio e il corrispondente calcolo del premio equo attraverso il tasso, vediamo alcuni casi particolari:

- Caso di un'assicurazione a valore intero *V*: $P^{(V)} = \tau^{(V)} \cdot V$
- Caso di sotto-assicurazione, quindi la somma assicurata è $S < V$: $P^{(S)} = \tau^{(V)} \cdot S$

È dunque $P^{(S)} = P^{(V)} \cdot \frac{S}{V}$ e la riduzione di premio avviene nella stessa misura della riduzione del risarcimento secondo la regola proporzionale.

- Nell'assicurazione a primo rischio relativo, quindi $M < V$ sarà $P^{(M)} = \tau^{(M)} \cdot M$. In tale modalità il risarcimento medio $\bar{c}$ per sinistro, nota la funzione di ripartizione del singolo danno *Z*, è dato dalla

$$\bar{c} = \int_0^M x dF(x) + M \int_M^V dF(x) = \int_0^M H(x) dx$$

e il grado medio di danno $g_V(M) = \frac{\bar{c}}{M}$ è dato dunque dalla

$$g_V(M) = \frac{1}{M} \int_0^M H(x) dx. \qquad \textbf{[5]}$$ [iii]

È agevole stabilire che $g_V(M)$ è funzione decrescente di *M*. È infatti, nell'ipotesi di continuità di $H(x)$ in $x=M$

$$g'_V(M) = -\frac{1}{M^2} \int_0^M H(x) dx + \frac{1}{M} H(M) = \frac{1}{M} \left[H(M) - \frac{1}{M} \int_0^M H(x) dx \right]$$

e tenuto conto che $H(x)$ è decrescente risulta $g'_V(M) < 0$. Ne segue che il tasso di premio $\tau^{(M)}$ per un'assicurazione a primo rischio è più elevato che con il tasso $\tau^{(V)}$, per l'assicurazione a valore intero. La [5] fornisce il valore del grado medio di danno anche nel caso delle assicurazioni a valore non prestabilito e garanzia limitata al massimale *M*, o a primo rischio assoluto, sempre in assenza di franchigia.

3. Premio di tariffa

Il *premio di tariffa* richiesto dall'assicuratore all'assicurato deve tener conto delle varie spese che gravano sull'impresa stessa e che vanno poste a carico del contraente, per la parte che lo riguarda. Il premio di tariffa, a meno di eventuali tasse, è l'importo effettivamente pagato dal contraente e quindi rappresenta la configurazione di premio di concreto interesse sul piano commerciale. Può essere semplicemente raffigurato così:

$$\underbrace{\underbrace{\boxed{\text{Premio equo}} + \boxed{\text{Caricamento di sicurezza}}}_{\textbf{Premio netto}} + \boxed{\text{Caricamento per spese}}}_{\textbf{Premio di tariffa}}$$

Si distinguono le spese di acquisizione e incasso premi e spese di gestione amministrativa. Gli oneri provvisionali per l'acquisizione del contratto e le spese di incasso vengono commisurati in termini di una percentuale α del premio di tariffa P^T, mentre per le spese di gestione si prevede un recupero attraverso l'imputazione di un costo pari ad una percentuale β sempre del premio di tariffa. Essendo P il premio netto, il premio di tariffa nel caso in cui sia corrisposto in un'unica soluzione è dato da

$$P^T = P + (\alpha + \beta)P^T$$

e quindi

$$P^T = \frac{P}{1-(\alpha+\beta)} = P(1+\gamma)$$

dove

$$\gamma\, P = \frac{(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)} P$$

rappresenta il caricamento per spese del premio di tariffa espresso in percentuale del premio netto. I coefficienti di caricamento sono diversi a seconda del ramo, dipendono dal volume del portafoglio e da altre sue caratteristiche, oltre che dalle condizioni di mercato.

Nel caso in cui il premio viene frazionato in k rate, la corrispondente rata di premio di tariffa è necessariamente maggiore della frazione $\frac{1}{k}P^T$ del premio annuo e ciò perché bisogna tener conto dell'accresciuto onere amministrativo e della perdita di interessi.

Può avvenire infine che la copertura di un rischio sia richiesta per un periodo inferiore ad un anno. La riduzione di premio rispetto all'esposizione annuale non è regolata da un semplice criterio di proporzionalità e ciò perché non si riducono in maniera proporzionale le spese di acquisizione e di gestione. Inoltre il caricamento di sicurezza, necessariamente presente nella determinazione del premio netto, non può ridursi secondo una legge lineare del tempo.

4. Variazioni conseguenti a cambiamenti di modalità contrattuali

All'atto del rinnovo del contratto annuale l'entità del premio può subire delle modifiche rispetto a quanto pagato all'inizio dell'anno precedente e ciò per varie cause e fondamentalmente da:

a) Richiesta da parte del contraente, di una variazione del valore assicurato o del massimale e/o della franchigia.
b) Fenomeni inflazionistici.
c) Aggiornamento della base tecnica.

Le cause appena menzionate sono tra loro correlate in misura più o meno significativa.

Caso a) <u>Variazione del massimale assicurato</u> ipotizzando una invarianza della base tecnica.

$$X = \sum_{i=0}^{N} Y_i = \sum_{i=0}^{N} min(M, Z_i)$$

Per il premio equo, date le ipotesi fatte e le relazioni precedenti, si ha:

$$P(M) = E(N)E(Y) = E(N)\left[\int_0^M x\, d\, F(x) + M\int_M^\infty d\, F(x)\right]$$

Consideriamo ora la variazione del massimale che diventa pari a $M + \Delta M$. La variazione di premio è:

$$\Delta P = P(M + \Delta M) - P(M)$$

Nella pratica, come visto nel corso di statistica assicurativa, occorre conoscere la funzione di sopravvivenza $H(x) = 1 - F(x)$ costruita a partire da informazioni statistiche relative a fasce di importi e tali informazioni sono però molto scarse per valori elevati del danno denunciato Z. A volte può non essere disponibile la registrazione del danno denunciato ed esserci solamente quella del pagamento del massimale $M < Z$. Comunque le informazioni disponibili e affidabili consentono, in generale, solamente di pervenire ad un'approssimazione della funzione $H(x)$ in un intorno sufficientemente ampio di M o, in alternativa, ad una perequazione del costo medio:

$$C(M) = \int_0^M x\, d\, F(x) + M\int_M^\infty d\, F(x)$$

di risarcimento del singolo sinistro, relativa a valori osservati di M, dalla quale ricavare estrapolazioni per "nuovi" valori del massimale.

Per quanto riguarda l'approssimazione della funzione $H(x)$ in un intorno di $x = M$, si può utilizzare la funzione di Pareto. Si assume cioè che in un intorno di M, sia

$$H(x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha$$

con x_0 ed α parametri stimati in base all'osservazione statistica. Dovrà essere $\alpha > 1$ per assicurare l'esistenza del valor medio $E(Z)$, mentre $\alpha > 2$ assicurerà che sia finita la varianza.

Seguendo l'alternativa della perequazione del costo medio di risarcimento, si possono per esempio utilizzare funzioni del tipo Benktander.

Caso b) Variazione del potere di acquisto della moneta supponendo l'invarianza della base tecnica del rischio (distribuzioni di N e di Z) e delle modalità contrattuali.

Il premio equo annuale di un contratto pluriennale non subirebbe variazioni da un anniversario di contratto all'altro solo se si mantenesse invariato anche il potere di acquisto della moneta. È interessante vedere quale influenza eserciti sul premio equo una variazione del valore della moneta e come si possa far proseguire il contratto adeguando o meno il premio.

Supponiamo che all'epoca T-1 a fronte di un risarcimento aleatorio X_{T-1} sia stato chiesto all'assicurato di pagare un premio P_{T-1}, all'epoca T del rinnovo del contratto il potere di acquisto della moneta sia variato rispetto a quello in vigore all'epoca T-1 e denotiamo con ρ il coefficiente di variazione dei valori monetari. Ferme restando la forma funzionale della base tecnica e le modalità contrattuali, sarà dunque $X_T = \rho X_{T-1}$ il risarcimento aleatorio del contratto per l'anno che inizia in T e sarà $X_T > X_{T-1}$ se il potere d'acquisito è diminuito (mentre sarà $\rho < 1$ nel caso sia aumentato). Si tratta di esaminare cosa succede se si intende mantenere il premio P_T uguale a P_{T-1} o se invece P_{T-1} viene "adeguato".

Consideriamo un'assicurazione a valore intero V, il valore del bene assicurato si rivaluta nel tempo, poiché $V_T = \rho V_{T-1}$ o si rinnova il contratto con il premio $P_T = \rho P_{T-1}$ oppure non si modifica il premio ($P_T = P_{T-1}$) ed allora se $\rho > 1$ si manifesta una situazione di sotto-assicurazione, quindi scatterà la regola proporzionale, se invece $\rho < 1$ si crea una situazione di sopra-assicurazione e, a fronte di risarcimenti pieni, il contraente paga un premio maggiore del dovuto.

Nelle assicurazioni a primo rischio assoluto osserviamo che, ferma restando la distribuzione di N, le eventuali variazioni di premio sono imputabili alle variazioni del risarcimento medio, $E(Y)$, del singolo sinistro. Per essere $Z_T = \rho Z_{T-1}$, la supposta invarianza della forma funzionale della distribuzione del danno per sinistro comporta la

$$F_T(x) = F_{T-1}\left(\frac{x}{\rho}\right)$$

avendo denotato con $F_T(x)$ la funzione $Pr\{Z_T \geq x\}$ all'epoca T.

Pertanto o si mantiene inalterato il massimale e quindi risulta:

$$P_T(M) = \rho\, P_{T-1}\left(\frac{M}{\rho}\right) \qquad \textbf{[6]}$$

oppure si adegua il massimale M portandolo a $\rho\, M$ ed è:

$$P_T(\rho\, M) = \rho\, P_{T-1}(M)$$

Potrebbe essere concordato dalle due parti di mantenere invariato il premio e di adeguare invece il massimale portandolo a δM, con δ definito allora dalla $P_T(\delta M) = P_{T-1}(M)$. Qualora fosse stato adottato il massimale δM anche all'epoca T-1 dalla [6] si avrebbe

$$P_T(\delta\, M) = \rho\, P_{T-1}\left(\frac{\delta\, M}{\rho}\right)$$

deve essere dunque

$$\rho P_{T-1}\left(\frac{\delta\, M}{\rho}\right) = P_{T-1}(M).$$

Tenuto conto che P è una funzione di M crescente, quindi invertibile, δ è univocamente individuato dalla

$$\delta\, M = \rho P_{T-1}^{-1}\left[\frac{1}{\rho} P_{T-1}(M)\right]$$

con $P^{-1}(\cdot)$ funzione inversa di $P(\cdot)$.

Più immediata nel caso in cui $\rho > 1$ è la soluzione di mantenere inalterato il premio e liquidare in caso di sinistro la quota $\dfrac{1}{\rho}$ dell'importo del danno e ciò sino alla concorrenza di M.

Caso c) Variazione della base tecnica. *Studiare sul libro da pag. 53 a 57. Leggere le pagine successive di questi lucidi*

Tali variazioni si verificano in conseguenza della variazione del potere d'acquisto della moneta, di mutamenti nelle tecniche dell'impresa e/o di alterazioni di fattori esogeni. Per semplicità qui ipotizziamo che non ci siano variazioni del potere di acquisto della moneta, caso considerato in precedenza.

Per studiare questo problema prenderemo in considerazione la teoria della credibilità, nata originariamente negli Stati Uniti allo scopo di stabilire in quale maniera le esperienze più recenti possano essere considerate nella modifica della tariffazione esistente.

In altri termini la teoria della credibilità studia come combinare gli insiemi di informazioni basati sull'esperienza passata e un nuovo insieme di dati al fine di determinare i tassi di premio da applicare nel futuro. Da una parte non si può rifiutare l'utilizzo dei nuovi dati per il fatto che non sono sufficientemente numerosi (o nei termini usati dalla teoria non hanno piena credibilità), né si può ignorare il vecchio tasso che si suppone basato su un vasto volume di dati. È chiaro che occorre far ricorso a qualche combinazione delle due serie di informazioni[1] .

Supponiamo di avere per ciascuna categoria un tasso di premio valutato nel passato, nella categoria j ad esempio abbiamo applicato il tasso $P_{j,0}$. L'esperienza statistica successiva dovrà indicarci se dobbiamo lasciare immutato il tasso adottato o se ed in quale misura dobbiamo variarlo.

[1] Longley – Cook, L.H., *An Introduction to Credibility Theory*, Casualty Actuarial Society, New York 1962.

La teoria della credibilità americana risolve in pratica tale problema adottando una media ponderata

$$P_j = ZP_{j,1} + (1-Z)P_{j,0} \qquad \textbf{[7]}$$

tra il tasso vecchio $P_{j,0}$ e la frequenza fornita dai nuovi dati $P_{j,1}$, dando a quest'ultima un peso Z detto *credibilità*. Tale fattore è variabile tra 0 e 1: per Z=1 si parla di *piena credibilità* e ci si basa solo sui nuovi dati ignorando i vecchi; per Z=0 (caso di credibilità nulla) si conserva il vecchio tasso senza tener conto dei nuovi dati.

La letteratura americana ha dedicato ampio spazio alla giustificazione teorica di varie maniere di determinare *Z*. Tuttavia per meglio capire l'origine storica della teoria occorre rifarsi alla prassi assicurativa americana che determinava i premi da applicare sulla base del rapporto sinistri a premi. Per ciascun ramo veniva calcolato il cosiddetto rapporto ammissibile e se nell'ambito di una certa categoria l'esperienza mostrava un rapporto superiore la Compagnia era autorizzata ad aumentare i premi in base ad una tavola di credibilità.

Ai tempi in cui gli attuari europei cominciarono ad interessarsi della teoria, circolava il seguente esempio numerico relativo ad una tariffa incendi, in cui il rapporto ammissibile sinistri a premi veniva determinato nella seguente maniera:

Premi di competenza	100
Sinistri e spese di competenza	45
Caricamento di sicurezza e utile	6
Sinistrosità ammissibile	51

Se nell'ambito di qualche categoria si verificava un rapporto superiore al 51%, l'Organo di controllo autorizzava una revisione tariffaria effettuata sulla base della [7] mediante la seguente tavola di credibilità (di cui si riportano solo alcuni valori).

Premi in migliaia di dollari	Z
0 – 50	0.05
200 – 450	0.20
1250 – 1800	0.50
2500 – 3200	0.70
5000 e oltre	1.00

La tavola precedente, come d'altronde molte altre similari, mostra la seguente relazione:

$$Z = K\sqrt{P}$$

Se si pone nell'ambito di una singola categoria, un <u>premio medio</u> pari a $\overline{p} = \dfrac{P}{n}$ in cui n è il numero dei rischi, si perviene a definire Z come funzione della numerosità del campione, cioè

$$Z = K'\sqrt{n} \quad , \quad \text{con} \quad K' = K\sqrt{\overline{p}} \quad .$$

La formula precedente era un'approssimazione, facilmente spiegabile agli organi di controllo e intuibile dal punto di vista statistico. Infatti, per uno statistico, la costruzione della tavola di credibilità è assimilabile alla stima della dimensione campionaria. In questo caso si parte da una popolazione composta da H individui (rischi assicurabili), dei quali h subiranno un danno. La variabile aleatoria X (probabilità di sinistro) può essere così definita da:

$$X = \begin{cases} 0 \quad con \;\; probabilit\grave{a} \;\; \dfrac{H-h}{H} = q \\ 1 \quad con \;\; probabilit\grave{a} \;\; \dfrac{h}{H} = p \end{cases},$$

con media e varianza pari a :

$$E(X) = p, \qquad var(X) = p \cdot q .$$

L'estrazione dei campioni di n elementi comporta la definizione della variabile $\wp$, proporzione campionaria delle estrazioni di Bernoulli, con media pari a p e varianza pari a $\frac{p \cdot q}{n}$. Poiché la media campionaria è distribuita normalmente, si può affermare che il 95% delle stime del campione sono comprese tra $p - 2\sigma_{\wp}$ e $p + 2\sigma_{\wp}$. Dopo aver fissato un errore pari a 2ϑ che siamo preparati ad accettare nel 95% dei casi, la dimensione del campione è data da:

$$n = \frac{p \cdot q}{\vartheta^2} .$$

Dal momento che stiamo stimando una proporzione, il massimo valore di pq è uguale a $\frac{1}{4}$ [2] e quindi la misura richiesta per la *piena credibilità* è data da:

$$n = \frac{1}{4\vartheta^2} .$$

Una volta determinata tale dimensione, bisognerà decidere come utilizzare i risultati quando invece $n < \frac{1}{4\vartheta^2}$.

In questi casi si può determinare un peso $Z(n)$ come funzione

- crescente al decrescere di $\sigma_{\wp}$,
- tale che $Z(n) = 1$ quando $\sigma_{\wp} = \vartheta$.

In conclusione si può definire:

$$Z(n) = \frac{\vartheta}{\sigma_{\wp}} = \sqrt{n}\,\frac{\vartheta}{\sqrt{p \cdot q}}$$

per $p \cdot q = \frac{1}{4}$ e $Z(n) = \sqrt{n}\, 2\vartheta$.

---

[2] Poiché è : $p \cdot q = \left(\frac{H-h}{H}\right) \cdot \frac{h}{H} = \frac{h}{H} - \left(\frac{h}{H}\right)^2$. Questa funzione ha massimo per $\frac{h}{H} = \frac{1}{2}$ quindi sarà $h = \frac{1}{2} H$ e si ottiene $p \cdot q = \frac{1}{4}$

Z può essere definito anche in altri modi, per esempio

1. $Z = \frac{n}{n+m}$,

2. $Z = \frac{(1+k)n}{n+kN}$,

3. $Z = \sqrt{\frac{n}{N}}$.

Dove n è il numero di casi dei nuovi dati ed m dei vecchi, N è il numero di casi richiesto per la piena credibilità, e k è una costante positiva. La seconda e terza formula sono applicabili per $n \leq N$, mentre per $n > N$ vanno sostituite con $Z = 1$. La prima formula invece non porta mai a $Z = 1$ se non asintoticamente.

Gli interessanti commenti di De Finetti fanno notare che la prima formula considera solo un mero arricchimento di dati, con l'esclusione di un qualsiasi fattore di differenziazione tra i rischi vecchi e nuovi. Le altre formule sono di tipo empirico: la seconda corregge arbitrariamente la prima, nella terza si ritiene come peso il reciproco dello scarto quadratico medio, mentre è il reciproco del quadrato, inoltre $\sqrt{\frac{n}{N}}$ dovrebbe essere non Z ma il rapporto tra Z e 1-Z: $\frac{Z}{1-Z} = \sqrt{\frac{n}{N}}$, quindi otteniamo la

4. $Z = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{N}}$.

Correggendo entrambi gli errori presenti nella formula 3. è meglio sostituirla con la 4. sopprimendo le radici ed ottenendo la

5. $Z = \frac{n}{n+N}$.

Quest'ultima corrisponde alla formula 1. ponendo $m = N$, poiché la formula 1. era giustificabile sotto ipotesi speciali risulta plausibile una scelta opportuna del valore N da sostituire ad m. Infatti sviluppando la [1] si ha:

$$P_j = ZP_{j,1} + (1-Z)P_{j,0} = \frac{NP_{j,0} + nP_{j,1}}{N+n} = \frac{R+r}{N+n}$$

dove $r = n\,P_{j,1}$ è il numero dei sinistri osservati nei nuovi dati e $R = N\,P_{j,0}$ è il numero dei sinistri che si avrebbe sul numero convenzionale N di rischi con la frequenza $P_{j,0}$ dei vecchi dati. Il risultato può essere espresso considerando P_j come la frequenza dei nuovi dati corretta pensando di aggiungere alle n osservazioni nuove (di cui r sinistri e s non-sinistri) un numero conveniente N di osservazioni fittizie, di cui R sinistri e S non-sinistri in conformità della frequenza $P_{j,0}$.

Ipotizziamo ora che la distribuzione di probabilità iniziale[3] del valore del nuovo tasso sia di tipo Beta con funzione di distribuzione

$$\Phi(x) = Pr\{X \le x\} = \frac{\int_0^x \xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta-1} d\xi}{B(\alpha,\beta)}.$$

La decisione di scegliere una funzione analitica Beta è la più vantaggiosa in quanto se l'opinione iniziale è rappresentata da una distribuzione appartenente alla famiglia Beta, tale appartenenza continua sempre a sussistere per l'opinione via via modificata in seguito ai risultati via via conosciuti. Precisamente dopo ogni prova viene aumentato di una unità l'esponente di ξ o di 1-ξ , a seconda del risultato favorevole o sfavorevole. È naturale in questi casi far in modo che il valor medio e lo scarto quadratico medio vengano ad assumere i valori desiderati, cioè rispondenti all'opinione iniziale.

Come noto, il valore atteso di questa variabile è $M(x) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

e la varianza è $\sigma^2(x) = \frac{\alpha\,\beta}{(\alpha+\beta)^2\,(\alpha+\beta+1)}$

Ovviamente, le variabili aleatorie rappresentano i possibili valori che possono essere fissati per il premio prima dell'esperienza. Il valore atteso di questa variabile sarà pari al tasso di premio della precedente tariffa:

$$M(x) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = P_{j,0}$$

quindi la varianza si può scrivere:

$$\sigma^2(x) = \frac{P_{j,0}(1-P_{j,0})}{(\alpha+\beta+1)}. \qquad \textbf{[8]}$$

Per il nostro problema risulta necessario definire una nuova variabile aleatoria chiamata $\chi_{(r)}^{(n)}$ dalla quale otteniamo i possibili valori del nuovo tasso di premio, cioè il premio risultante dopo *n* prove, nelle quali abbiamo ottenuto l'evento considerato *r* volte.

Questa variabile sarà ancora una Beta con parametri $r+\alpha$ e $n-r+\beta$. Quindi il nuovo tasso di premio può essere espresso tramite il valore atteso della nuova variabile:

[3] "La distribuzione iniziale rappresenta l'opinione che avremmo riguardo al tasso che apparirà adottabile definitivamente, in una situazione nuova, dopo raccolta una documentazione sufficiente, al momento in cui non si dispone ancora di nessun dato relativo ad essa. È probabile che ci si attenderà un valore prossimo a $P_{j,0}$, comunque questo valore rappresenta il valore attorno a cui la distribuzione iniziale si addensa. La distribuzione preciserà comunque la probabilità che attribuiamo a priori a scostamenti in un senso o nell'altro del vero tasso quale sarà dato in seguito dall'esperienza nelle nuove condizioni." Bruno De Finetti

$$M\left(\chi_{(r)}^{(n)}\right)=\frac{r+\alpha}{n+\alpha+\beta}=P_j \qquad \textbf{[9]}$$

Dall'espressione [8] si ottengono:

$$\alpha+\beta+1=\frac{P_{j,0}\left(1-P_{j,0}\right)}{\sigma^2(x)}$$

$$\alpha+\beta=\frac{P_{j,0}\left(1-P_{j,0}\right)}{\sigma^2(x)}-1=N \qquad \textbf{[10].}$$

Inoltre è: $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}=P_{j,0}$ e $\beta=\dfrac{\alpha\left(1-P_{j,0}\right)}{P_{j,0}}$

sostituendo tali valori nella formula [10] si ha:

$$\alpha+\frac{\alpha\left(1-P_{j,0}\right)}{P_{j,0}}=\frac{P_{j,0}\left(1-P_{j,0}\right)}{\sigma^2}-1$$

$$\alpha=P_{j,0}\ \frac{P_{j,0}\left(1-P_{j,0}\right)-\sigma^2}{\sigma^2}=P_{j,0}\ N$$

Poi sostituendo nella [9] si ha:

$$P_j=\frac{r+\alpha}{n+\alpha+\beta}=\frac{r+P_jN}{n+N}$$

Se poniamo $P_{j,1}=\dfrac{r}{n}$ otteniamo la formula di credibilità iniziale [7]

$$P_j=ZP_{j,1}+(1-Z)P_{j,0}\,.$$

dove $Z=\dfrac{n}{n+N}$.

Il coefficiente Z è detto coefficiente di credibilità ed è maggiore tanto più pesa, quindi diventa credibile, il termine $\dfrac{r}{n}$.

APPENDICE

Determinazione dei momenti. Impostazione teorica del calcolo del premio

[i] **Momento primo** :

$$E\left(X \middle| N\right)= \int_0^{\infty} x\, d\, F_X\left(x\right)= \int_0^{\infty} x \sum_{n=0}^{N} p_n dF_Y^{*(N)}\left(x\right)=$$

$$= \sum_{n=0}^{N} p_n \int_0^{\infty} x dF_Y^{*(N)}\left(x\right)= \sum_{n=0}^{N} p_n\; E\left[Y_1+Y_2+\ldots+Y_N\right]=$$

$$= N\; E[Y]\sum_{n=0}^{N} p_n = N\; E[Y]$$

[ii] **Momento secondo**:

$$E\left(X^2 \middle| N\right)= E\;\left\lfloor\left(Y_1+Y_2+\ldots+Y_N\right)^2\right\rfloor=$$

$$= N \cdot E\left(Y^2\right)+N(N-1)\left[E\left(Y\right)\right]^2$$

Data la funzione di ripartizione di X e ricordando che gli $Y_i,\ i \geq 1$, sono importi aleatori stocasticamente indipendenti ugualmente distribuiti, la relazione è vera banalmente per N=1, e si verifica per N=2 e N=3:

per N=2:

$$E\left(X^2 \middle| N\right) \;=\; E\;\left\lfloor\left(Y_1+Y_2\right)^2\right\rfloor \;=\; E\left[Y_1^2+Y_2^2+2\,Y_1\;Y_2\right]=$$

$$= E\left[Y_1^2\right]+E\left[Y_2^2\right]+2E\left[\;Y_1\;Y_2\right]=2E\left[Y^2\right]+2\cdot 1\left[E\left(Y\right)\right]^2$$

per N=3:

$$E\left(X^2 \middle| N\right) \;=\; E\left\lfloor\left(Y_1+Y_2+Y_3\right)^2\right\rfloor=$$

$$= E\left[Y_1^2+Y_2^2+Y_2^2+2\,Y_1\;Y_2+2\,Y_2\;Y_3+2\,Y_1\;Y_3\right]=$$

$$=3\,E\left[Y^2\right]+3\cdot 2\left[E\left(Y\right)\right]^2$$

In conclusione per N generico si ha:

$$E\left(X^2 \middle| N\right) \;=\; E\;\left\lfloor\left(Y_1+Y_2+\ldots+Y_N\right)^2\right\rfloor=$$

$$= E\left[\,Y_1^2+Y_2^2+\ldots+Y_N^2+2\,Y_1\;Y_2+2\,Y_1\;Y_3+\ldots+2Y_1\;Y_N+2Y_2\;Y_3+\ldots+2Y_2\;Y_N+\ldots+2Y_{N-1}\;Y_N\right]=$$

Quanti sono il numero di 2 elementi che posso formare dalle N variabili Y? Questo valore è dato dalla combinazione degli N oggetti di classe 2: $\binom{N}{2}$. Quindi avremo:

$$= N\ E\left[Y^2\right] + 2\binom{N}{2}\left[E(Y)\right]^2 = N\ E\left[Y^2\right] + 2\ \frac{N!}{2!\,(N-2)!}\left[E(Y)\right]^2 =$$

$$= N\ E\left[Y^2\right] + N\,(N-1)\left[E(Y)\right]^2$$

iii **Determinazione della funzione** $E(Y, M)$

Si ricorda, come visto nel corso di statistica assicurativa, che:

$$E(Y, M) = \int_0^M x\,d\,F(z) + M\int_M^\infty d\,F(z) = \int_x^M H(z)\,d\,z$$

Integrando per parti, il primo integrale del secondo membro è:

$$\int_0^M x\,d\,F(z) = \int_0^M x\,d\left[1 - H(z)\right] = -\int_x^M x\,d\,H(z) =$$

$$= -\left[x \cdot H(z)\right]_0^M + \int_0^M H(z)\,d\,z = \int_0^M H(z)\,d\,z - M\ H(M)$$

Per il secondo integrale si ha:

$$M\int_M^\infty dF(z) = M\int_M^\infty d\left[1 - H(z)\right] = -M\int_M^\infty dH(z) = MH(M)$$

in definitiva avremo:

$$E(Y, M) = \int_x^M H(z)\,d\,z - M\ H(M) + M\ H(M)$$

$$= \int_x^M H(z)\,dz$$