PREMIO EQUO E PREMIO NETTO

Prof. Cerchiara Rocco Roberto

Materiale e Riferimenti

1. **Capitolo 2 del testo Tecnica attuariale delle assicurazioni contro i Danni (Daboni 1993) – pagg. 25-26 e 61-65**

2. **Lucidi distribuiti in aula**

La teoria dell'utilità considera il fatto che l'assicurato, soggetto economico anch'esso avverso al rischio, accetta l'iniquità del contratto ritenendolo vantaggioso nonostante il caricamento, $P - E(X)$, imposto dall'assicuratore e purché esso non sia troppo elevato.

Il caricamento che dal premio equo fa passare ad un premio netto P maggiore di $E(X)$ è giustificato anche dall'adozione del criterio della probabilità di rovina. Tale criterio con carattere di oggettività, almeno apparente, si propone come alternativo a quello dell'utilità attesa che ha carattere soggettivo. L'applicazione di questo criterio consiste nelle determinazione di s quando sia stato fissato un livello, p_0, per la probabilità di insolvenza. Il caricamento di sicurezza è dato da $s = P - E(X)$.

In una forma molto semplificata la teoria del rischio può porsi nei seguenti termini: sia X la variabile casuale che rappresenta il costo totale dei sinistri in un certo periodo.

La variabile X (con media m e scarto medio σ ha come funzione di distribuzione $F(X)$. Per un numero di rischi sufficientemente grande possiamo applicare il teorema del limite centrale e quindi approssimare con una variabile normale. Avremo cioè:

$$F(x) \approx \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

Denotando per ogni ε nell'intervallo 0 - 1 e con x_ε e y_ε la determinazione di X per la quale si ha $F(x_\varepsilon) = \Phi(x_\varepsilon) = 1 - \varepsilon$, si tratterà di ricercare una relazione del tipo $x_\varepsilon = f(y_\varepsilon)$

In prima approssimazione si ottiene: $x_\varepsilon = m + \sigma\, y_\varepsilon$

Il sovra-premio da applicare secondo la teoria del rischio (in questa forma semplificata) è quindi proporzionale allo scarto medio.

A prescindere dalle teorie applicate, bisogna tener presente che l'impresa deve garantirsi un profitto industriale che consentirà la formazione di riserve patrimoniali destinate a far fronte al rischio di insolvenza. In ogni caso il premio netto *P* può essere visto come un *equivalente certo dell'importo X*, risarcimento aleatorio dell'assicuratore. Se possiamo conoscere o ipotizzare la distribuzione di probabilità di *X*, l'equivalente certo *P* ne è un suo funzionale.

Il premio equo P_e è un particolare equivalente certo, il corrispondente funzionale è la speranza matematica di *X*, ovvero indicata con $F(x)$ la funzione di ripartizione della distribuzione di *X*, il premio equo è pari a

$$P_e = E(X) = \int_0^{+\infty} x \, d\, F(x)$$

Confronti fra vari criteri di calcolo del premio netto

Vediamo ora alcuni criteri di calcolo del premio netto di un contratto e le loro proprietà.

a) Criterio della varianza

$$P = E(X) + \alpha \, var(X) \qquad \alpha > 0 \quad \text{reciproco di un importo}$$

b) Criterio dello scarto quadratico medio

$$P = E(X) + \beta \, \sigma(X) \qquad \beta > 0 \quad \text{adimensionale}$$

c) Criterio del valore atteso o della speranza matematica

$$P = (1+\gamma) E(X) \qquad \gamma > 0 \quad \text{adimensionale}$$

d) Criterio dell'utilità attesa: $E\left[u\left(P - X \right) \right] = 0$

1. utilità quadratica: $P = E(X) + B - \sqrt{B^2 - var(X)}$

2. utilità esponenziale: $P = B \ln E\left[e^{\frac{X}{B}}\right]$

Possiamo fare le seguenti osservazioni:

- Per una funzione di utilità quadratica il criterio dell'utilità attesa si riconduce sostanzialmente a quello della varianza.

- Per tutti i criteri di calcolo esiste un caricamento di sicurezza tale che $P(X) > E(X)$.

- Per i criteri di utilità quadratica ed esponenziale, $X \le M$ implica che $P(X) \le M$, dove M rappresenta il massimale. Questo perché il premio calcolato secondo i due criteri è una media "interna" del risarcimento *X*: se dunque è $0 \le X \le M$, è anche $0 \le P(X) \le M$.
  Per la funzione di utilità esponenziale $P(X)$ è media esponenziale di *X* e come tale è media interna.
  Nel caso dell'utilità quadratica, se $X \le M$ per poter applicare tale criterio deve essere $B \ge M$, e quindi sarà anche $\mathrm{var}(X) \le E(X^2) \le M^2 \le B^2$. Inoltre dalla $P = E(X) + B - \sqrt{B^2 - \mathrm{var}(X)}$, si vede che il premio è funzione decrescente di *B*, quindi $P = E(X) + M - \sqrt{M^2 - var(X)}$ è il massimo degli equivalenti di X secondo il criterio dell'utilità attesa quando $u(x)$ è quadratica.
  Inoltre è $P(X) \le M$ perché se fosse il contrario si otterrebbe che $P = E(X) + M - \sqrt{M^2 - var(X)}$ che conduce all'assurdo: $[E(X)]^2 + var(X) = E(X^2) > M^2$. Questa proprietà non è verificata dagli altri criteri, perché l'entità del caricamento potrebbe essere tale da rendere $P(X) > M$.

- Per il criterio dello scarto quadratico medio e del valore atteso vale il principio dell'omogeneità (positiva), ossia $P(a\,X) = a\,P(X), \quad a > 0$.

- Per tutti i criteri, tranne quello del valore atteso, vale la proprietà traslativa: $P(X + C) = P(X) + C$, $C > 0$.

- Il criterio della varianza e del valore atteso godono della proprietà additiva se X e Y sono stocasticamente indipendenti: $P(X+Y)=P(X)+P(Y)$

- Per il criterio dello scarto quadratico medio e del valore atteso è possibile effettuare la decomposizione di X in due importi non negativi, X_1 e X_2, in modo tale che sia $P(X)=P(X_1+X_2)\leq P(X_1)+P(X_2)$. Questa proprietà richiede che non sia mai vantaggioso per l'assicurato stipulare, anziché un unico contratto relativo al rischio X, due o più contratti relativi a due o più rischi nei quali possa decomporsi in modo arbitrario X stesso.

  I due risarcimenti X_1 e X_2 in cui può decomporsi X sono correlati positivamente (stocasticamente dipendenti: un aggravamento del rischio X comporta aggravamenti per ogni sua componente).