PARTE 3

CENNI DI TEORIA DEL RISCHIO

Prof. Cerchiara Rocco Roberto

Materiale e Riferimenti

1. **Capitolo 2 del testo Tecnica attuariale delle assicurazioni contro i Danni (Daboni 1993)**

2. **Lucidi distribuiti in aula**

Panorama storico della Teoria del Rischio

La **Teoria del Rischio** può essere definita come la disciplina delle scienze attuariali che, superando le eccessive semplificazioni dei modelli matematici non probabilistici, studia gli scostamenti dei risultati di una compagnia rispetto ai valori attesi, esaminando e proponendo al decisore le strategie per la gestione del rischio più propriamente assicurativo.

La Teoria del rischio **classica**, che deve la sua prima formulazione (**I fase**) organica a Bohlmann [1909], consiste in una impostazione di tipo **individuale** dello studio delle variabili attuariali, senza però fornire adeguate risposte alle problematiche attuariali delle assicurazioni danni ed a quelle di carattere generale riguardanti una compagnia assicurativa nel suo complesso. L'approccio è di tipo deterministico (si pensi alle assicurazioni vita dove probabilità di morte e tasso di interesse sono deterministici).

A tal fine, alcuni autori scandinavi, tra cui meritano menzione Lundberg [1909], [1919], Cramer [1926] e Segerdahl svilupparono a loro volta una nuova impostazione, denominata **Teoria del rischio collettiva** (**II fase**) che si distingue per la particolare attenzione rivolta al processo assicurativo nel suo insieme.

Notevole contributo alla Teoria del Rischio è stato poi fornito dai continui progressi registrato nella teoria dei processi stocastici, mentre l'evoluzione informatica ha permesso la trattazione di problemi complessi, che in precedenza potevano essere esaminati solo parzialmente e per di più disgiuntamente tra loro, evidenziando solamente soluzioni sub ottimali.

Ciò ha permesso alla Tdr di costituire un valido contributo, insieme alle discipline finanziarie ed economiche, nella soluzione di problemi concreti di gestione assicurativa, quali ad es., la scelta della politica di riassicurazione e la determinazione dei caricamenti, nonché l'analisi del livello di solvibilità di una compagnia.

Nel corso degli anni '60 e '70 sono state definite compiutamente le basi della **moderna** Tdr, rivolgendo però preminente interesse alle assicurazioni danni. Al riguardo non si può fare a meno di menzionare i studi di Seal [1969], Beard-Pentikainen-Pesonen [1969, 1977, 1984], Buhlmann [1970] e Gerber [1979].

Questi lavori hanno permesso il raggiungimento di pregevoli risultati attuariali da parte di vari autori nonché la realizzazione, soprattutto negli anni '80 di interessanti ricerche promosse da istituzioni ed enti per la definizione di modelli matematici complessi, ai fini di una analisi delle problematiche inerenti la **solvibilità** di una compagnia assicurazioni danni (collegamento con la **Teoria della Rovina**).

Per quanto concerne lo studio della solvibilità di una compagnia vita solo a partire dalla metà degli anni ’80 sono state condotte ricerche analoghe, che ricomprendono nel proprio ambito temi classici come la politica tariffaria, la politica di riassicurazione, ma anche temi moderni come la scelta degli investimenti, utilizzando gli ultimi sviluppi della matematica finanziaria moderna (British LISG, British GISG, etc.).

In definitiva la Tdr si propone quale importante strumento di analisi per il management di una compagnia assicurativa (danni o vita) o di un fondo pensione per le società di revisione, per gli investitori, nonché per le autorità di vigilanza.

Due approcci diversi:

- **INDIVIDUALE**
- **COLLETTIVO**

Analizzeremo entrambi i due metodi, ma utilizzeremo poi solo quello collettivo.

L’APPROCCIO INDIVIDUALE della teoria del rischio

Il costo sinistri aggregato in una unità temporale (es. un anno) relativo a un portafoglio (o a un singolo ramo assicurativo) è dato dalla somma di altre variabili aleatorie:

$$\widetilde{X}_{IND} = \sum_{i=1}^{N} \widetilde{Y}_i$$

dove N è il numero dei rischi in portafoglio.

Y_i esprime il costo sinistri generato dalla polizza i-esima a seguito dell’accadimento nell’unità temporale di riferimento di nessuno, uno o più sinistri, nei casi ove sia possibile la ripetibilità del sinistro.

Studiamo allora questa variabile indicando la sua funzione di ripartizione con

$$F_{\widetilde{Y}_i}(y) = \Pr\{\widetilde{Y}_i \le y\}$$

Facciamo ora un altro passo avanti e ipotizziamo che tutti i N rischi in portafoglio sono reciprocamente indipendenti tra loro, cioè in alcun modo la sinistrosità di un contratto dipende da quella di un’altra polizza.

Questa è un'ipotesi che semplifica notevolmente i calcoli, ma bisogna stare attenti che effettivamente ciò accada nella realtà esaminata.
Bisogna sempre verificare le ipotesi che si fanno.

Possiamo riscrivere la funzione di ripartizione del costo sinistri come la convoluzione delle N funzioni di ripartizione del costo sinistri del rischio i-esimo:

$$F_{\tilde{X}_{IND}}(x) = \Pr\{\tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2 + \ldots + \tilde{Y}_N \leq x\} =$$
$$= \tilde{F}_{\tilde{Y}_1} * \tilde{F}_{\tilde{Y}_2} * \ldots * \tilde{F}_{\tilde{Y}_N}(x)$$

dove Y_1 è il costo sinistri della polizza 1,
Y_2 è il costo sinistri della polizza 2,
Y_N è il costo sinistri della polizza N.

Per esempio Y2 **NON** è il costo generato dal sinistro 2, ma dalla polizza 2, che potrà avere avuto 0, 1, 2,…sinistri.

Dove F_{Yn} è la funzione di ripartizione del costo sinistri della generica polizza n.

Questa ipotesi di indipendenza può semplificare molto i calcoli per cui nel caso questa ipotesi venisse meno nell'approccio individuale, avremmo seri problemi soprattutto nei calcoli.

L'APPROCCIO COLLETTIVO nella teoria del rischio

Secondo tale approccio non si presta attenzione ai singoli contratti, non è importante il fatto che un sinistro provenga da una polizza anziché da un'altra.
Questo perché invece di considerare la somma di tutti i costi sinistri delle singole polizze, va a studiare i costi prodotti dai singoli sinistri indipendentemente dalla loro provenienza.

Quindi il costo sinistri aggregato viene analizzato considerando il portafoglio nella sua globalità:

$$\tilde{X}_{COLL} = \sum_{j=1}^{\tilde{k}} \tilde{Z}_j$$

dove Z_j è il costo sinistri prodotto dal sinistro j-esimo.

Sappiamo che anche il numero dei sinistri è aleatorio per cui otteniamo una somma di variabile aleatoria estese per un numero aleatorio di addendi: è per questa ragione che indichiamo un “k” aleatorio sulla sommatoria, mentre nell’approccio individuale avevamo un valore “N” determinato e fisso.

Infatti noi non conosciamo quanti sinistri si verificheranno e ciò è un problema aggiuntivo, ma vedremo come renderlo più trattabile.

Affinché si possa procedere con questo approccio è, infatti, necessario che il portafoglio di rischi debba essere omogeneo in modo da identificare per tutte le polizze le medesime caratteristiche; questa omogeneità garantisce l’indifferenza delle polizze da cui deriva il sinistro.

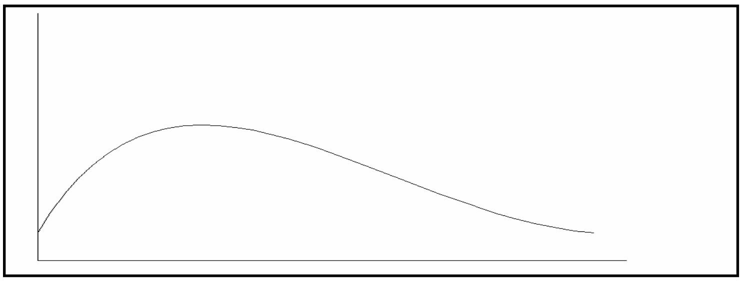
Inoltre si devono formulare due importanti ipotesi di fondo:

1. Reciproca <u>indipendenza</u> di tutti i sinistri;

2. Il costo sinistri Z_i di ogni singolo sinistro (non importa a quale dei N rischi in portafoglio sia riferito) <u>identicamente distribuito</u> secondo la funzione di ripartizione

$$S(x) = \Pr\left\{\tilde{Z}_j \le x\right\} = \Pr\left\{\tilde{Z}_{j+1} \le x\right\} = \Pr\left\{\tilde{Z}_{j+2} \le x\right\} = \ldots$$

che avrà un andamento grafico come il seguente(con $\gamma>0$):



Per le ipotesi predette di indipendenza e somiglianza unite all’ulteriore ipotesi di indipendenza di Z_j e K (= questa indipendenza implica che l’ammontare di ogni singolo sinistro sia indipendente dal numero di sinistri che si provocano all’interno del gruppo cioè in altre parole che il fatto di fare o pochi o tanti sinistri come gruppo, non incide sull’importo dei sinistri che il gruppo provoca),la funzione di ripartizione del costo aggregato X_{COLL} sarà:

$$F_{\tilde{X}_{COLL}}(x) = \Pr\left\{\tilde{X}_{COLL} \le x\right\} = \Pr\left\{\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 + \ldots + \tilde{Z}_{\tilde{k}} \le x\right\} =$$

Ricordiamo che la somma delle z è una somma di v.a., dove il numero delle componenti è anch'esso aleatorio.

Quanto scritto sopra ora possiamo riscriverlo scindendo la probabilità di ottenere un determinato numero di k sinistri e la probabilità della somma di tutti i k sinistri sia minore o uguale a un determinato x; come possiamo notare avendo introdotto la probabilità che k assuma un determinato valore, ci dà la possibilità di studiare la somma, ma con un numero di addendi conosciuto e non più aleatorio:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr\left\{\tilde{K} = k\right\} \cdot \Pr\left\{\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 + \ldots + \tilde{Z}_k \leq x\right\} =$$

Quindi è come se noi supponessimo di conoscere k e moltiplicassimo per la probabilità che effettivamente il k da noi ipotizzato sia effettivamente pari al k effettivo.

A questo punto ora che la variabile k non è più aleatoria e avendo ipotizzato l'indipendenza delle k, possiamo riscrivere tutto come la convoluzione k-esima della distribuzione S(x) relativa al costo del singolo sinistro.

Avendo visto prima che S(x) è uguale per tutte le k, la indicheremo con l'asterisco, anziché trascrivere la convoluzione per ogni singolo valore k-esimo, come avevamo fatto per l'approccio individuale perché mancava l'uguaglianza di tutte le funzioni:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr\left\{\tilde{K} = k\right\} \cdot S^{*k}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot S^{*k}(x)$$

Convoluzione di due v. a. indipendenti X_1 e X_2.

Chiamiamo $\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$ la v. a. somma di due variabili aleatorie tra loro indipendenti. Per definizione, la funzione di ripartizione della v. a. somma $\tilde{x}$ sarà:

$$F(X) = F_1 * F_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(X - X_2) \cdot f_2(X_2)\ dX_2$$

Dove il simbolo "*" indica che si tratta di una **convoluzione**.

In pratica la funzione di ripartizione della v. a. $\tilde{x}$ è data dall'integrale della funzione di ripartizione di $\tilde{x}_1$ calcolata in $(X - X_2)$ moltiplicata per la funzione di densità di $\tilde{x}_2$, calcolata in X_2.

ORA VEDREMO IL CASO DEL TEOREMA DELLA ROVINA DEL GIOCATORE