Cenni di

TEORIA DELL'UTILITA'

Prof. Cerchiara Rocco Roberto

Materiale e Riferimenti

1. **Capitolo 2 del testo Tecnica attuariale delle assicurazioni contro i Danni (Daboni 1993) – pagg. 19-26**

2. **Lucidi distribuiti in classe**

3. **Lettura consigliata: Capitoli 9 – 10, pagg. 237-273 del testo Matematica Finanziaria – Autore: F. Moriconi. Ed. Il Mulino. 1994**

2. PROCEDIMENTI E PRINCIPI PER LA DETERMINAZIONE DEL PREMIO

2.1. Posizione del problema

In questa parte ci proponiamo d'esaminare i principi per la determinazione del premio di un contratto assicurativo. A tal fine supponiamo di poter disporre di un'adeguata informazione di natura statistica tratta dall'osservazione di rischi *analoghi* a quello per il quale occorre formulare la valutazione. Intendiamo per rischi analoghi quelli che hanno in comune tra di loro il maggior numero possibile di caratteristiche.

La possibilità di fare ricorso alle informazioni statistiche esiste nella maggior parte dei casi concreti. Tuttavia quando le informazioni non sono disponibili è possibile stabilire un prezzo per la copertura assicurativa: in determinati settori in cui non esiste una esperienza consolidata, a fronte di una domanda di copertura, gli assicuratori esprimono la valutazione di un prezzo della copertura. Si tratta di stime fondate sull'andamento di rischi similari o di “previsioni del risarcimento aleatorio” per quella copertura.

Nella terminologia propria della teoria della probabilità secondo la concezione soggettiva, la previsione o speranza matematica $E(X)$ di un importo aleatorio X è l'importo certo che il soggetto decisore giudica equo scambiare contro quello aleatorio X.

La “previsione” valutata dall'esperto costituisce solo una valutazione di partenza per la formazione del prezzo della copertura assicurativa, poiché la determinazione conclusiva del prezzo avviene poi, come per ogni altro bene, in presenza di leggi di mercato.

Trattando la determinazione del premio secondo l'impostazione “tecnico-attuariale”, consideriamo un contratto assicurativo che prevede la copertura del rischio per un periodo di esposizione pari ad un anno e supponiamo che si tratti di un premio annuo non rateizzato.

Per il momento consideriamo il premio al netto delle spese, cioè non comprendente l'importo che va addebitato all'assicurato a titolo di rimborso delle spese di acquisizione e di gestione che gravano sull'assicuratore. In tal senso parleremo di *premio netto*.

Il contratto assicurativo prospetta un'operazione finanziaria aleatoria: a fronte di una prestazione certa da parte dell'assicurato, consistente nel pagamento di un premio, l'assicuratore garantisce una prestazione subordinata al verificarsi di certi eventi, consistente nel pagamento di un importo di entità aleatoria, potendo il rischio essere colpito da sinistro anche più volte nell'anno di contratto.

Alla luce di quanto appena detto consideriamo quindi un *premio equo*, cioè un importo certo P_e che rende equo il contratto assicurativo e che dunque riesce pari alla previsione o speranza matematica della prestazione aleatoria (il risarcimento) X dell'assicuratore: $P_e = E(X)$.

È noto però che l'operazione finanziaria aleatoria del contratto assicurativo non può essere condotta in termini di equità. L'equità sostanziale dei contratti assicurativi determina una situazione economicamente non accettabile, in quanto implica assenza di margini di guadagno atteso. Inoltre l'equità comporta elevate probabilità di subire perdite dalla gestione di un portafoglio di contratti. È necessario pertanto applicare un *premio netto*, ottenuto sommando al primo un conveniente caricamento di sicurezza.

Esaminiamo quindi la base dei criteri decisionali sulla base della **teoria dell'utilità**.

OPERAZIONE FINANZIARIA ALEATORIA

DIFFERIMENTO **INCERTEZZA**

STABILIRE I CRITERI PER VALUTARE I GUADAGNI ALEATORI

CRITERIO DELLA SPERANZA MATEMATICA DI UN IMPORTO ALEATORIO X (guadagno aleatorio assicuratore)

X = Premio - Risarcimento

E' L'IMPORTO CERTO CHE SI E' DISPOSTI A CEDERE (RICEVERE) PER RICEVERE (CEDERE) IN CAMBIO L'IMPORTO ALATORIO MEDESIMO

E(X) = 0 Indifferenza
E(X) > 0 è preferibile assicurare
E(X) < 0 è preferibile non assicurare

Domanda: Se l'assicurazione non è offerta a Premio Equo è / non é accettabile secondo il criterio della speranza matematica?

NO

Allora perche' esiste il mercato assicurativo e si stipulano i contratti di assicurazione?

Perche' il criterio della speranza matematica e' carente in questo contesto.

Infatti fornisce solo un aspetto "posizionale", ma non l'aspetto "Dispersione".

A TAL FINE INTRODUCIAMO IL CRITERIO DELL'UTILITA' ATTESA
(lucidi tratti da Gismondi – Di Gregorio 1997)

EQUIVALENTE CERTO

1

***Dato un importo aleatorio X,
la speranza matematica è l'importo
certo (equivalente certo) che
il soggetto decisore giudica equo
scambiare contro quello aleatorio X.***

***Altro equivalente certo è quello
ottenibile come trasformata della
speranza matematica secondo una
funzione di valore degli importi.***

FUNZIONE DI VALORE DEGLI IMPORTI

$X \in \Re$	Importo aleatorio
$u: \Re \to \Re$	Funzione di valore
k	Equivalente certo

$$u(k) = E\left[u(X)\right]$$
$$k = u^{-1}\left\{E\left[u(X)\right]\right\}$$
$$u^{-1}: \Re \to \Re$$

In generale il premio netto $P*$ da richiedere all'assicurato per garantire la copertura della prestazione aleatoria X deve essere tale da soddisfare la

$$E\left[u\left(P* - X\right)\right] \geq u(0) = 0\,.$$

Quindi il minimo premio che rende il contratto non svantaggioso per l'assicuratore può essere rappresentato anche così:

$$E\left[u\left(P - X\right)\right] = 0\,. \qquad \textbf{[1]}$$

dove P è il premio secondo l'utilità attesa. Per effetto dell'avversione al rischio dell'impresa, la funzione di utilità è concava, il premio netto definito dalla [1] risulta maggiore della speranza matematica della prestazione aleatoria $E(X)$. La differenza $P - E(X)$ è detta <u>caricamento di sicurezza</u> dell'assicuratore e ne rappresenta il guadagno medio generato dall'adozione del criterio dell'utilità attesa.

2.2. Criteri decisionali fondati sulla teoria dell'utilità

Supponiamo di considerare delle operazioni aleatorie, che possono, cioè, procurare un guadagno aleatorio. A fronte di operazioni aleatorie, siamo portati a stabilire un ordinamento a seconda della preferibilità, associando ad ogni operazione una valutazione sintetica del corrispondente guadagno aleatorio e ordinando poi la preferibilità delle operazioni secondo l'ordine in cui si seguono le valutazioni sintetiche. Questa valutazione sintetica potrebbe essere una media, ma non sempre un importo aleatorio può essere valutato in termini della sua speranza matematica (come osservato da D. Bernoulli). In particolare può accadere che quest'ultima non sia finita, oppure che a parità di speranze matematiche gli importi aleatori considerati possono venire valutati come *diversi*, preferendo tra essi quelli meno *rischiosi*.

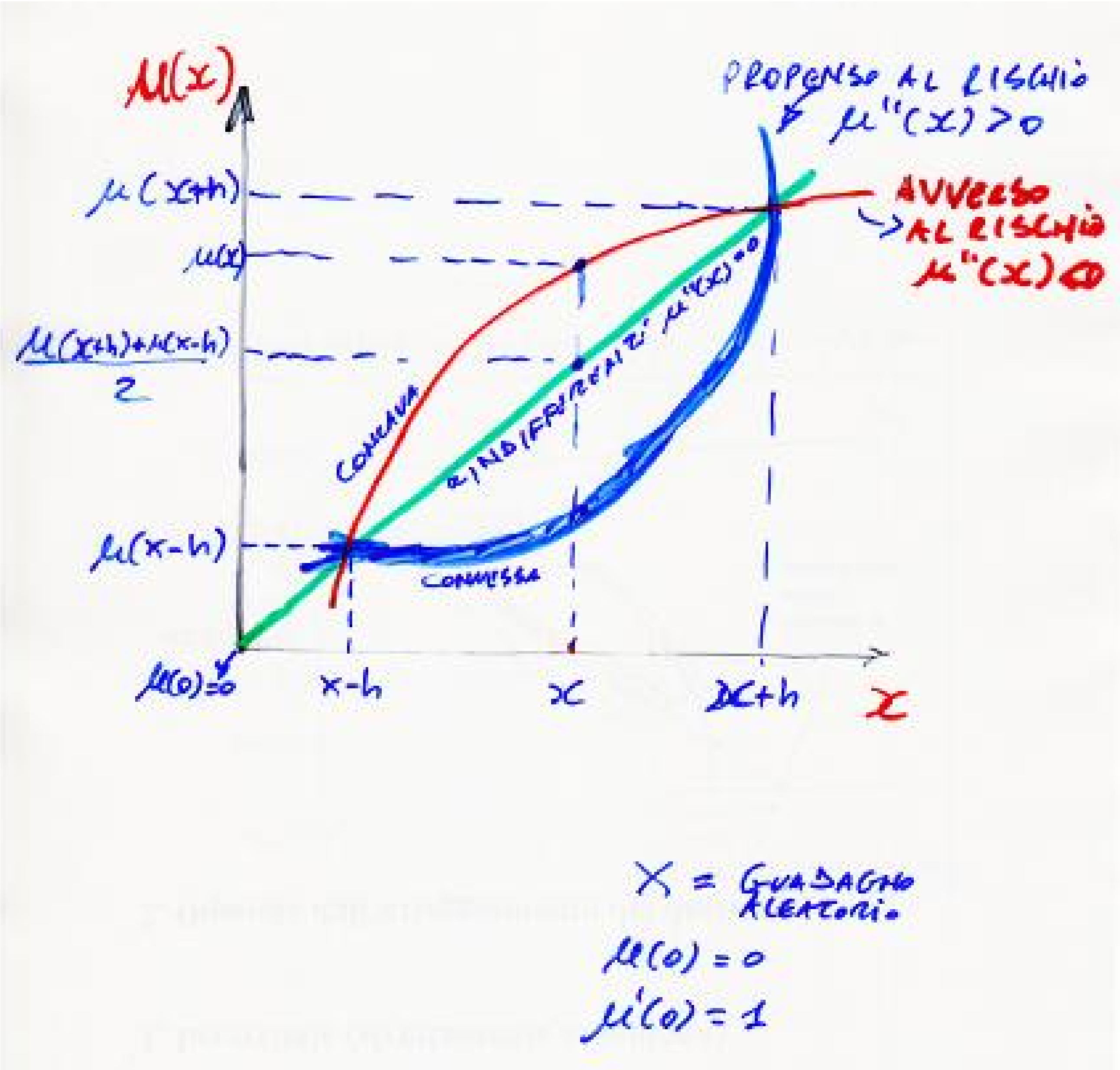
Scelto in qualche modo coerente un indice v di preferibilità, tra le situazioni economiche certe, potremmo selezionare una funzione monotona crescente di v e rimarrebbe inalterato l'ordinamento di preferibilità stabilito in termini dell'indice v. Ciò permette di intendere che invece di mediare i valori monetari di un guadagno aleatorio potremmo mediare i loro trasformati secondo una funzione monotona crescente che chiameremo utilità.

Per realizzare un ordinamento di preferibilità è il caso di affidarsi ad un indice di preferibilità diverso dal valore monetario. Quando avremo mediato su questo nuovo indice, cioè su una funzione di utilità, potremmo effettuare dei confronti che tengono conto anche del rischio delle operazioni aleatorie. E ciò proprio perché la stessa scelta della funzione di utilità, cioè della trasformata crescente dei valori monetari, sarà stata fatta traducendo il nostro personale atteggiamento nei riguardi della rischiosità delle operazioni aleatorie. È chiaro quindi che l'adozione della funzione di utilità è un fatto soggettivo.

Proprietà della funzione di utilità

1. Invertibile (strettamente monotona)

2. Dipende dall'atteggiamento del decisore



La funzione $r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$ è detta funzione d'avversione al rischio e misura la concavità relativa della funzione . Si osservi che nel caso particolare della funzione di utilità lineare $u(x) = x$, $r(x) = 0$. Per un soggetto avverso al rischio $r(x)$ è invece positiva.

Per le funzioni d'utilità almeno due volte derivabili possiamo dare un'espressione formale della $u(x)$ in termini di $r(x)$. Infatti si ha

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{d}{d(x)} \ln u'(x)$$, cioè

$$\ln u'(x) = -\int_0^x r(y)\, dy$$

e tenendo conto della condizione $u'(0) = 1$ si ha

$$u'(x) = \exp\left[-\int_0^x r(y)\, dy\right]$$

quindi

$$u(x) = \int_0^x \exp\left[-\int_0^z r(y)\, dy\right] dz + c\,.$$

In particolare assumendo costante l'avversione al rischio e quindi $r(x) = \lambda$.

$$u(x) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \exp(-\lambda x)\right).$$

Ipotizzando un'ipotesi di avversione al rischio decrescente $r(x) = \frac{1}{a + x}$ si ottiene

$$u(x) = a \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

2.3. Esempi di funzioni di utilità

Consideriamo il caso particolare di una funzione di utilità quadratica:

$$u(x) = x - \frac{1}{2B}x^2\,,\ x \le B$$

Dalla condizione $E\left[u\left(P - X\right)\right] = 0$, l'equivalente certo P è dato dalla

$$P \cong E(X) + \frac{1}{2B}var(X).$$

In termini approssimati, quindi, il caricamento di sicurezza appare come un importo di entità proporzionale alla varianza di X.

Supponiamo ora una funzione di utilità di tipo esponenziale: vogliamo valutare il premio $P(X)$, equivalente certo del risarcimento aleatorio X secondo il criterio dell'utilità attesa, cioè il premio definito dalla relazione

$$E\left[u\left(P - X\right)\right] = 0$$

nel caso la funzione $u(x)$ sia la funzione di utilità esponenziale normalizzata.

$$u(x) = B\left[1 - e^{-\frac{x}{B}}\right], \qquad -\infty < x < +\infty$$

il significato dell'importo B appare dalla $-\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{1}{B}$, in base alla quale l'avversione al rischio è, in questo modello, costante e pari al reciproco di B. La [1] quindi diventa:

$E\left[e^{-\frac{P-X}{B}}\right]=0$. Quindi si ottiene

$$P = B\, ln E\left[e^{\frac{X}{B}}\right].$$

La relazione precedente fornisce l'espressione esplicita del premio *P* come media esponenziale del risarcimento *X*.

Esempi numerici applicati alle funzioni di utilità

Supponiamo una funzione di utilità di tipo quadratico:

$$u\left(x\right)=x-0.01x^2, \quad x<50$$

Il soggetto economico considerato conserverà il suo patrimonio *x* con probabilità *p* e subirà una perdita finanziaria di ammontare *c* con probabilità *1-p*. Vediamo quale sarà il premio massimo che il soggetto è disposto a pagare per avere una assicurazione completa. Avremo pertanto:

$$u\left(\ x-P\ \right)=p\ u\left(x\right)+\left(1-p\right)u\left(x-c\right)$$

$$\left(x-P\right)-0.01\left(x-P\right)^2=p\left[x-0.01x^2\right]+\left(1-p\right)\left[\left(x-c\right)-0.01\left(x-c\right)^2\right].$$

Per i seguenti valori di x, p e c mostriamo i risultati:

Patrimonio x	Perdita c	Probabilità P	Premio assicurativo P
10	10	0.5	5.28
20	10	0.5	5.37

Come si può notare il premio assicurativo per la stessa funzione di utilità cresce all'aumentare del patrimonio del soggetto. Questo risultato non è conforme alla realtà: infatti ci si può aspettare che l'ammontare che il soggetto è disposto a pagare diminuisca al crescere del patrimonio, poiché un patrimonio maggiore permetterebbe al soggetto di sopportare meglio una perdita aleatoria. Tuttavia, si tratta di una proprietà tipica della funzione di utilità quadratica. Di conseguenza, le funzioni di utilità quadratica non dovrebbero essere selezionate dal soggetto che si rende conto che la sua capacità di sopportare una perdita aleatoria aumenta al crescere del suo patrimonio.

Nel caso di una funzione di utilità di tipo esponenziale, applicata agli stessi dati dell'esempio precedente, otteniamo:

$$u\left(x\right)=-e^{-0.01x}$$

Il premio è, in questo caso, eguale a 5.12 per entrambi i valori del patrimonio: $x=10,\ x=20$. Nel caso di una funzione esponenziale il premio quindi non dipende dall'ammontare del patrimonio del soggetto.

Vediamo un altro caso di utilità esponenziale. Questa volta supponiamo che la probabilità che un immobile non sia danneggiato nel periodo futuro è 0.75. La funzione di densità di una perdita positiva è data da:

$$f\left(z\right)=0.25\left[0.01e^{-0.01z}\right],\qquad z>0$$

Se il proprietario dell'immobile ha come funzione di utilità:

$$u\left(x\right)=-e^{-0.005\,x}.$$

Calcoliamo innanzitutto il premio in base al valore atteso:

$$E\left[X\right]=0.75\left(0\right)+0.25\int_0^\infty x\left(0.01\,e^{-0.01x}\right)dx=25$$

Determiniamo ora il massimo valore del premio che il soggetto sarà disposto a pagare. Il premio è modellato in base alle preferenze del proprietario dell'immobile e riassunte nella seguente funzione di utilità:

$$u\left(x-P\right)=0.75\ u\left(x\right)+\int_0^\infty u\left(x-z\right)\ f\left(z\right)dz\,.$$

Si ottiene allora:

$$-e^{-0.005\,(x-P)}=-0.75\ e^{-0.005x}-0.25\int_0^\infty e^{-0.005\,(x-z)}\left(0.01\,e^{-0.01x}\right)d\,x$$

$$e^{0.005P}=0.75+\left(0.25\right)\left(2\right)=1.25$$

$$P=200\ln 1.25=44.63$$

Sotto queste ipotesi l'operatore è disposto quindi a pagare un sovra-prezzo eguale a 44.63 - 25 = 19.63.

Quindi è importante notare che le diversità di atteggiamento nei riguardi del rischio corrispondono a curvature diverse della funzione di utilità. Quanto maggiore, in una situazione economica di valore x, è l'avversione al rischio, tanto maggiore è la curvatura della $u(x)$. L'avversione al rischio dipende oltre che da fattori psicologici anche dal patrimonio dell'individuo essendo in genere minore quanto maggiore è il patrimonio. Il modello ora descritto è applicabile a soggetti economici che ragionano in termini di prudenza. Evidentemente se il soggetto ragiona come un giocatore d'azzardo occorrerebbe delineare un modello opposto a quello descritto.

Per quanto riguarda un contratto assicurativo, esso è vantaggioso per entrambi i contraenti: *grazie* al caricamento del premio puro per la compagnia, *nonostante* il caricamento per il contraente. Ci sarà tuttavia una soglia di vantaggiosità per il contraente, che accetterà il caricamento se contenuto entro certi limiti, basterà che esso sia minore della diminuzione di rischio conseguente all'acquisizione della copertura assicurativa. D'altra parte anche per la compagnia ci sarà una soglia di vantaggiosità, fissato il caricamento, essa accetterà di assicurare rischi di importo non eccedente un certo livello.

Si veda anche quanto riportato sul testo di Moriconi Capitolo 9-10 e di Daboni (pag. 24-26).

APPLICAZIONE DEL CRITERIO DELL'UTILITA' ATTESA

Modello decisionale: convenienza reciproca assicurato (A)/ impresa (B) nel contratto di assicurazione

GUADAGNO

A →	-P	se si assicura
	-X → perdita aleatoria	se non si assicura
B →	P-X	se accetta il rischio
	0	se non accetta il rischio

APPLICAZIONE DEL CRITERIO DELL'UTILITA' ATTESA

Secondo il criterio dell'utilità attesa, il contratto è non svantaggioso per entrambi se risulta:

utilità derivante dall'assicurazione → certo; utilità attesa avverso è aleatorio

la sp. M. dell'utilità dell'G.A. deve essere ≥ positiva

$$\begin{cases} u_A(-P) \geq E\left[u_A(-X)\right] & \text{A} \\ E\left[u_B(P-X)\right] \geq u_B(0) = 0 & \text{B} \end{cases}$$

che non assumere il rischio

Vedi Cinquilli

→

APPLICAZIONE DEL CRITERIO DELL'UTILITA' ATTESA

$\lambda_A = \frac{1}{A}$

$\lambda_B = \frac{1}{B}$

$$\begin{cases} P_A \leq E(X) + \dfrac{1}{2A} Var(X) \\ P_B \geq E(X) + \dfrac{1}{2B} Var(X) \end{cases}$$

APPLICAZIONE DEL CRITERIO DELL'UTILITA' ATTESA

Il premio massimo che l'assicurato può pagare mantenendo la vantaggiosità dell'operazione è:

$P_A = E(X) + \dfrac{1}{2A} Var(X) >$ **premio equo**

VAR(X)

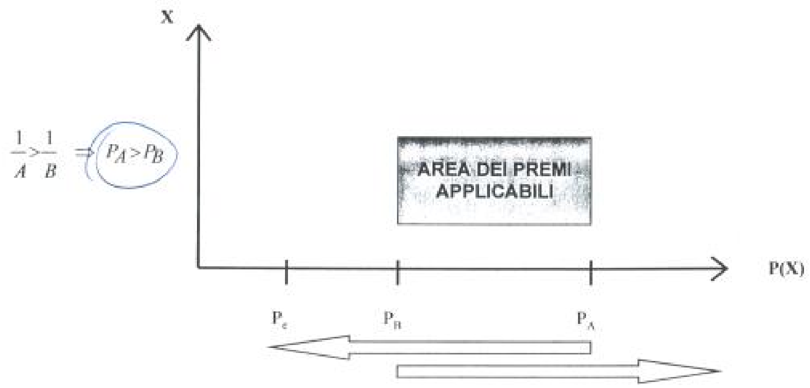
La maggiorazione, proporzionale alla variazione del rischio, è tanto più sopportabile quanto più l'assicurato è avverso al rischio. (+ è grande λ è + è grande

APPLICAZIONE DEL CRITERIO DELL'UTILITA' ATTESA

Il premio minimo che l'assicuratore può accettare mantenendo la vantaggiosità dell'operazione è:

$$P_B = E(X) + \frac{1}{2B} Var(X) > \textbf{premio equo}$$

APPLICAZIONE DEL CRITERIO DELL'UTILITA' ATTESA



Nei prossimi lucidi richiameremo altri criteri decisionali, con particolare riferimento alla Teoria del Rischio e il Teorema della Rovina del giocatore