PARTE 14
“La Riassicurazione”

Prof. Cerchiara Rocco Roberto

email: rocco.cerchiara@unical.it

Materiale e Riferimenti

1. **Lucidi distribuiti in aula**

2. **Daboni, pagg. 113-122 (Leggere Riassicurazione di reciprocità-par. 4.4). Inoltre studiare:**

   a. **Par. 4.3 Politiche di ritenzione ottimali dei rischi secondo il criterio dell’utilità attesa (fino a pag. 133)**
   b. **Par. 4.4 Politiche di ritenzione ottimali. Ulteriori considerazioni**
   c. **Par. 4.6 Procedimenti in uso nella pratica per il calcolo del premio di riassicurazione. Il trattato Ecomor.**

d. Politiche gestionali ad orizzonte infinito (fino a pag. 169)

1 La riassicurazione

"La riassicurazione é un contratto in forza del quale un contraente, chiamato **riassicuratore**, si obbliga, verso il pagamento di un determinato compenso ed a condizioni prestabilite, ad indennizzare l'altro contraente, detto riassicurato o cedente, di una parte convenuta della somma che quest'ultimo dovesse pagare ad un avente diritto in esecuzione di un contratto di assicurazione." Tale definizione pone in rilievo la caratteristica fondamentale dell'istituto della riassicurazione, e cioè che esso non può configurarsi in modo autonomo, ma trova la sua ragion d'essere in un altro rapporto preesistente, quello tra l'assicuratore diretto e l'assicurato.

Il nostro codice civile non dà alcuna definizione del contratto di riassicurazione, a cui riserva soltanto quattro articoli, limitandonsi a stabilire che "*i contratti di riassicurazione relativi a una serie di rapporti assicurativi devono essere provati per iscritto*" (articolo 1928) e che "*il contratto di riassicurazione non crea rapporti tra l'assicurato ed il riassicuratore*" (articolo 1929).

2 Le motivazioni tecniche della riassicurazione

Allo scopo di ridurre le fluttuazioni, che riguardano l'andamento dei rischi assunti, a livelli accettabili, l'impresa di assicurazione ricorre al mercato della riassicurazione, "acquistando sicurezza", attraverso il trasferimento ad altri operatori di porzioni dei propri rischi.

Lo scopo basilare della riassicurazione é di offrire protezione contro (Cramer [1979]):

- il verificarsi di uno o più sinistri di entità molto rilevante, o accumulo di perdite derivanti da un singolo sinistro;
- le oscillazioni del danno aggregato annuale rispetto al valore atteso.

Al fine di garantire l'equilibrio economico della gestione, un elemento che deve contraddistinguere il portafoglio di una Compagnia di assicurazioni é una sufficiente omogeneità dei rischi, sia qualitativa (per età, sesso, stato di salute, professione, ecc.), sia quantitativa (somme assicurate non troppo difformi). Poiché risulta impossibile formare un portafoglio perfettamente omogeneo, non potendo imporre agli assicurandi di sottoscrivere delle polizze con lo stesso capitale assicurato, l'assicuratore si trova nella necessità di liberarsi dell'onere derivante dal capitale eccedente quello che viene chiamato il suo "pieno di conservazione". Nell'assicurazione vita quest'ultimo é riferito ad ogni singola testa assicurata e la sua entità, come vedremo in seguito, risulta variabile da una Compagnia all'altra, a seconda dell'anzianità di esercizio, dei mezzi finanziari disponibili, ecc.[1] .

Nella determinazione del pieno di conservazione, al di là di tutti gli elementi di carattere soggettivo, domina un criterio generale di prudenzialità nella prassi corrente, dato che rappresenta un fattore essenziale ai fini della corretta gestione di una Compagnia, oltreché fattore basilare del procedimento riassicurativo.

[1]Una compagnia dovrebbe adottare un pieno di conservazione definito, almeno, in funzione dei seguenti fattori (Carter [1979]):

1) il capitale e le riserve libere da impegni;
2) la dimensione del portafoglio;
3) il tipo ed il *mix* del tipo di affari trattati;
4) il margine di sicurezza caricato sul premio;
5) il prezzo che la compagnia é disposta a pagare per la riassicurazione;
6) la probabilità di rovina;
7) la politica di investimento della compagnia;
8) tipo di riassicurazione;
9) orizzonte temporale.

L’effetto stabilizzante della riassicurazione é stato sottolineato in modo molto efficace da F.L. Tuma[2] :

> Lo scopo della riassicurazione é puramente tecnico, nel senso che una Compagnia cerca di ridurre, dal punto di vista delle possibili perdite materiali, i pericoli che ha accettato. Quando una macchina, che dispone di un ammortizzatore, passa su un percorso accidentato, tale dispositivo addizionale non rende la strada liscia, ma sicuramente consente ai passeggeri di avvertire di meno le asperità della strada. Lo stesso accade con la riassicurazione; non annulla le perdite, ma rende più agevole alla Compagnia cedente di sopportare le conseguenze dei sinistri.

I benefici di un trattato di riassicurazione sono però anche altri :

1. una migliore distribuzione delle perdite. In alcuni Stati, inclusi quelli meno sviluppati, sono molto frequenti le possibilità di catastrofi naturali, come terremoti o uragani. Il ricorso alla riassicurazione consente agli assicuratori di quei paesi di distribuire le perdite a livello internazionale;
2. la possibilità di accettare rischi che, senza un trattato di riassicurazione, non potrebbe sottoscrivere e quindi di migliorare la flessibilità nella misura e nel tipo di rischi che un assicuratore diretto può assumere. Infatti la riassicurazione può avere la funzione di sostituzione del capitale, consentendo di ampliare il volume di affari di una Compagnia diretta, senza l’esigenza di dover incrementare il suo capitale di base[3].

2.1 Le forme di riassicurazione e le modalità di accordo tra cedente e cessionaria

In questo paragrafo distinguiamo le tipiche forme e l’articolazione della riassicurazione.

[2] ”The economics theory of reinsurance”, Journal of the Insurance Institute of London, 1933.
[3] Ricordiamo che in ambito CEE il margine di solvibilità dovuto per il ramo vita é in relazione diretta, in termini percentuali, con il volume di affari, al contrario di quanto accade per il ramo danni, in cui il margine minimo decresce, sempre in termini relativi, al crescere del volume di affari.

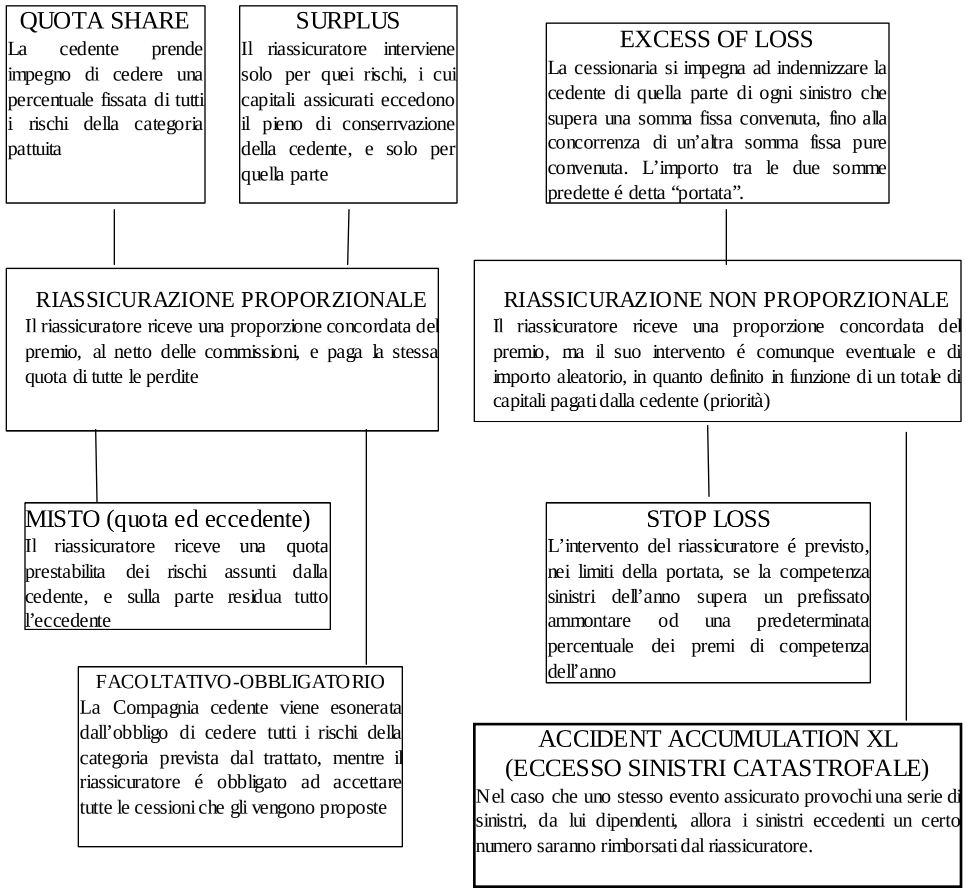
(a) Le forme. Esistono due tipi fondamentali di riassicurazione: ***proporzionale*** e ***non proporzionale***, la cui più importante differenza é che la prima si esplica in una ripartizione (**ex-ante**) dei rischi, mentre la seconda si risolve in una ripartizione (**ex-post**) del danno. Nella Figura 1 compare una semplice e chiara esposizione delle diverse forme e tipi di riassicurazione.

Nel caso della forma proporzionale in Quota[4] parte occorre osservare che cedente e cessionaria "subiscono la stessa sorte", cioè si suddividono sia i rischi migliori, che quelli più gravosi dal punto di vista dei capitali assicurati, mentre nel caso del trattato proporzionale per Eccedente la Compagnia riesce a realizzare l'obiettivo di una migliore omogeneità quantitativa del portafoglio in quanto le polizze, con capitali assicurati al di sotto o pari al pieno di conservazione (rischi ottimi), rimangono a carico della cedente[5]. Entrambi i trattati sono in genere di durata molto lunga, se non addirittura illimitate, con facoltà di recesso delle parti. Oggigiorno, nel ramo danni, stanno prendendo sempre più piede i trattati non proporzionali, in quanto consentono una migliore stabilità e la possibilità di trattare anche rischi catastrofali, ma al tempo stesso emergono difficoltà nella determinazione di un premio che sia accettabile per entrambi le parti e quindi implicando una durata di questi contratti molto inferiore (1-2 anni) a quella dei trattati proporzionali.

[4]Ricordiamo che la Quota Share é stata il fondamento dell'istituto della cessione legale all'INA che fino al 1994 vigeva per le imprese di assicurazione libere sulla vita.

[5]Ricordiamo che nel trattato per eccedente la cessionaria può fissare un limite superiore di accettazione. In tal caso il trattato é detto "di primo eccedente". La cedente può allora provvedere alla copertura della parte residuale di rischio attraverso un trattato "di secondo eccedente" ed eventualmente "di terzo eccedente", funzionanti quando la riassicurazione di primo o secondo eccedente viene saturata.

Figura 1 Forme e tipi di riassicurazione



(b) Una breve formulazione delle forme riassicurative. In questa sezione evidenziamo come la riassicurazione agisca sulla funzione di distribuzione del danno individuale e quindi sulla distribuzione del danno aggregato[6].

(b.1) Con la riassicurazione proporzionale in Quota la cedente trattiene una parte del singolo sinistro $\tilde{Z}_{tot}$ in tal modo:

$$\tilde{Z}_{ced} = r\ \tilde{Z}_{tot}, \tag{1}$$

dove r (compreso tra 0 e 1) é costante. La distribuzione del costo del singolo sinistro $\tilde{Z}_{ced}$ sarà:

$$S_r(z_{ced}) = S(z/r), \tag{2}$$

dove S é descrive la distribuzione di $\tilde{Z}_{tot}$.

---

[6]Per ulteriori considerazioni e sviluppi si veda Daykin et al.[1994], pag. 100 e seguenti.

(b.2) La riassicurazione proporzionale per eccedente (surplus) é una delle forme definite rischio per rischio. Tale caratteristica ne può rappresentare un difetto, dato che non sempre riesce a fronteggiare efficacemente l'impatto di valori eccezionali del danno aggregato $\tilde{X}_{tot}$, in particolare modo nel caso che tale eccezionalità non derivi da sinistri di entità enorme, ma piuttosto da un alto numero imprevisto di sinistri.

Tale forma trova maggiore applicazione nel caso di forme assicurative che prevedono per ciascun rischio un predefinito limite superiore Q. In questo caso se definiamo con M il limite di conservazione di un sinistro della cedente i rischi con $Q \leq M$, rimarranno a carico della cedente, mentre nel caso contrario i rischi possono essere condivisi in proporzione a $r_M(Q) = M/Q$, così che il riassicuratore sarà responsabile per un ammontare pari a $(1\text{-}r_M)\tilde{Z}_{tot}$. Quindi

$$r_M(Q) = min(1,M/Q). \qquad (3)$$

Emerge evidente rispetto al punto (b.1), dove il trattato agisce nello stesso modo per tutti i rischi, come r dipenda dall'unità di rischio attraverso Q[7].

(b.3) La riassicurazione non proporzionale eccesso sinistri per rischio singolo garantisce alla cedente per ogni sinistro riassicurato un impegno pari a

$$\tilde{Z}_M = min\ (M,\tilde{Z}_{tot}), \qquad (4)$$

mentre la distribuzione di $\tilde{Z}_M$ sarà pari a $S(z)$ se $\tilde{Z}_{tot} < M$, o a 1 nel caso contrario.

[7]Un altro interessante approccio alla riassicurazione per eccedente é l'utilizzo del "grado di perdita", in cui la funzione S é descritta da un integrale doppio (Beard et al [1984], pag. 91).

(b.4) La riassicurazione non proporzionale stop-loss mostra una stretta analogia con l'excess of loss, ma a differenza delle forme "rischio per rischio", tale trattato riesce a fornire protezione anche contro eventuali fluttuazioni del numero sinistri, oltre che nel caso di sinistri singoli o capitali assicurati di notevole entità.

In tale forma avremo il danno complessivo a carico della cedente sarà dato da

$$\tilde{X}_{ced} = min(M, \tilde{X}_{tot}). \tag{5}$$

In questo caso, come in (b.3), é da sottolineare come il premio di rischio della stop-loss sia fortemente influenzato da eventuali cambiamenti nella distribuzione $F(x)$ del danno aggregato $\tilde{X}_{tot}$, ad esempio dovuti all'inflazione. Se il livello di ritenzione rimane invariato e nell'ipotesi che $\tilde{X}_{tot}$ sia moltiplicato per un fattore $i > 1$, ad esempio a causa dell'inflazione, il premio P_{re} subisce un incremento ad un fattore $i(M)^* > i$. Fino a quando l'asimmetria della distribuzione del danno aggregato é molto più piccola di quella della distribuzione del singolo sinistro, allora é lecito attendersi che il rapporto i^*/ i sarà molto grande[8] e che, al momento della liquidazione, l'ammontare del singolo sinistro o l'eccesso globale di perdita possa superare la priorità fissata alla stipula del contratto.

Nella tabella 1 evidenziamo cosa accade per il premio riassicurativo P_{re}, nell'ipotesi che il valore atteso della v.a. danno aggregato, $\tilde{X}_{tot}$, sia pari a 100, s.q.m.($\tilde{X}_{tot}$)=10, M=115, i=1.1, tasso di crescita di P_{re} pari a i^*-1.

Tabella 1 *Tasso di crescita di P_{re} nel caso di inflazione al 10%*

Asimmetria	0	0,2	0,5	1,0
Crescita di P_{re}	700%	570%	440%	320%

Qualora la liquidazione é differita nel tempo, é chiamata in causa la c.d. *clausola di stabilità*, in forza della quale l'assicuratore é tenuto ad indicizzare il livello della sua ritenzione, adeguandolo nel tempo al potere d'acquisto della moneta.

(b.5) Oltre alle quattro forme fondamentali sopra descritte possono, come si é già detto, essere praticate forme di riassicurazione "miste". Una forma particolarmente usata é quella detta di *stop loss modificato* (Daboni [1989]):

$$\tilde{X}_{ced} = \begin{cases} \tilde{X} & se\tilde{X} \le M \\ M + r\left(\tilde{X} - M\right) & se\tilde{X} > M \end{cases} \qquad (6)$$

con r compreso tra 0 e 1. La forma é, dunque, una combinazione di quella stop loss (r=0, M≠0) e di quella di quota globale. Per il riassicuratore questa forma mista é preferita a quella stop loss perché coinvolge l'impegno dell'assicuratore anche quando é superata la soglia M ed é preferita altresì alla forma di quota globale, perché evita gli interventi sui singoli sinistri.

<u>Con analogo criterio può essere costruita una forma "XL modificato".</u>

(c) L'articolazione della riassicurazione. Nella Figura 2 compaiono le diverse modalità in cui si realizza la riassicurazione. La prima forma é stata quella facoltativa, la quale non é disciplinata da alcuna legge; essa é governata dalla sola consuetudine.

Occorre porre in rilievo la condizione che sta alla base di tutta la riassicurazione, e che é andata acquistando crescente importanza man mano che la rapidità di stipulazione e l'aumento del volume dei fatti economici rende sempre più scarne e frammentarie le informazioni che la Compagnia cedente fornisce al riassicuratore: la massima buona fede fra le parti contraenti (nel linguaggio

---

[8] La spiegazione é dovuta al fatto che l'inflazione non incrementa solo la misura del danno, ma anche il numero dei sinistri per cui é previsto l'intervento del riassicuratore.

assicurativo *uberrima fides*). Essa va interpretata nel senso che la riassicurazione deve rispecchiare fedelmente l'assicurazione originale, che deve essere gestita rigorosamente alle condizioni convenute e che, entro le modalità pattuite, il riassicuratore deve condividere la sorte della Compagnia cedente.

L'introduzione dei trattati di riassicurazione si deve alla necessità di rendere, per quanto possibile, automatiche le operazioni di riassicurazione, in modo da consentire l'inizio simultaneo della copertura del rischio da parte dell'assicuratore e del riassicuratore; per raggiungere tale scopo il riassicuratore ha dovuto rinunciare alla facoltà di selezionare i rischi da accettare, ottenendo in cambio un alimento quantitativo del suo portafoglio più regolare ed in misura più elevata. Anche quando esiste un trattato, i rapporti tra i contraenti sono fondati sulla buona fede; tutti i trattati prevedono clausole che consentono al riassicuratore di esaminare le scritture e gli atti relativi agli affari riassicurati negli uffici della cedente.

Una importanza fondamentale assumono nei trattati di riassicurazione le clausole che regolano il trattamento concordato per la gestione delle riserve tecniche. Nel ramo vita, sulle riserve matematiche, che la cedente trattiene nelle sue mani a garanzia dell'adempimento degli obblighi sanciti dal trattato da parte del riassicuratore, vengono calcolati gli interessi in misura pari al tasso tecnico di tariffa.

Figura 2 Le modalità di accordo

Metodo	**Facoltativa**	**Facoltativa-Obbligatoria o Copertura Aperta**	**Trattati**	**Pool**
Descrizione	Ciascun rischio viene offerto individualmente al riassicuratore, il quale é libero di accettare la quota che desidera o di rifiutare.	Il riassicuratore accetta obbligatoriamente una quota di tutto il portafoglio secondo prefissate condizioni, relative a forme assicurative, tipi di rischio, stato, ecc., in base all'offerta della Compagnia cedente o di un broker. Non c'é obbligo di cessione per la cedente o per il broker	E' un contratto in base al quale sussiste l'obbligo per la cedente di cedere una proporzione convenuta di tutti i rischi della categoria o ramo indicati nel trattato e per il riassicuratore di accettarli tutti.	Assume varie forme, ma in genere si realizza in una riassicurazione quota share o surplus tra i membri partecipanti. Secondo le regole stabilite, i rischi accettati da tali membri sono ceduti al pool, che in cambio sistema le retrocessioni ai membri. Il pool può trattenere parte di ciascun rischio per proprio conto
Forme di riassicurazione per cui si ha l'applicazione	Principalmente forme proporzionali	In genere surplus	Tutte le forme proporzionali e non	Forme proporzionali. Il pool può garantirsi ricorrendo a trattati non proporzionali presso riassicuratori esterni.

3 Politiche di ritenzione ottimale dei rischi

Il problema essenziale, per una Compagnia di assicurazioni, é quello di raggiungere un soddisfacente equilibrio tecnico e finanziario del proprio portafoglio. Occorre al riguardo osservare che un portafoglio é soggetto a continue variazioni nel tempo, per effetto dell'immissione di nuovi contratti e della eliminazione di una parte di quelli esistenti per scadenza, sinistro o abbandono, e che pertanto il problema del suo equilibrio deve essere esaminato da un punto di vista dinamico. Tuttavia per motivi di semplicità di trattazione nel seguito di questo paragrafo faremo riferimento ad un portafoglio di assicurazioni di puro rischio a premio naturale, tutte con durata annuale coincidente con l'esercizio assicurativo di bilancio, senza ingressi né uscite nel corso dell'anno (se non per sinistro), e cioè ad un portafoglio chiuso[9].

Una impresa di assicurazione stipuli ad una certa epoca, fissata come iniziale, n contratti di assicurazione. Si indichi con X_i la variabile casuale che rappresenta il guadagno che l'impresa può realizzare sulla i-esima polizza (i=1,..,n), riferito all'epoca iniziale.

Denotiamo con U il valore iniziale del fondo che l'impresa ha a disposizione (riserva di rischio o fondo di garanzia). Indichiamo con σ_i^2 la varianza di $\tilde{X}_i$, con $\tilde{G}$ (somma delle $\tilde{X}_i$, per i=1,..,n) il guadagno aleatorio complessivo che l'impresa può realizzare sugli n contratti. La Compagnia potrà allora assumere come obiettivo il contenimento della probabilità che l'esborso aleatorio $\tilde{Y}$ superi il cumulo dei premi caricati incassati e del fondo di garanzia, cioè della cosiddetta probabilità di rovina nell'anno. Allora la probabilità (di rovina) dell'evento

$$\tilde{Y} > P + m + U \ ,$$

[9]Per una migliore esposizione delle ipotesi e delle formulazioni vedere E. Pitacco, "Lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni libere sulla vita", cap. V.

con m pari alla somma dei singoli caricamenti, cioè dell'evento

$$\tilde{Y} - P - m > U,$$

coincidente con $\tilde{G} < -U$ [10], sarà data dalla

$$p = \text{Prob}\ \{\tilde{G} \leq -U\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-U} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx, \tag{7}$$

da cui, con semplici passaggi, standardizzando, otteniamo

$$p = \Phi\left(-\frac{U+m}{\sigma}\right) = \Phi(-s), \tag{8}$$

dove $\Phi(x)$ è la funzione di ripartizione della normale standardizzata e il rapporto s è detto **indice di stabilità relativa** del portafoglio[11].

Una volta definita la probabilità di rovina, possiamo occuparci del problema della stabilità della gestione in un (o diversi) esercizio.

Per diminuire la probabilità di rovina, e quindi per aumentare tale indice, occorre operare sulle variabili decisionali, U, m, σ: aumentando le prime due (con l'ostacolo dall'effettiva situazione economico-finanziaria della Compagnia, per il fondo U o dalle condizioni di mercato, per il caricamento m) o riducendo lo scarto quadratico

---

[10] $\tilde{G} = P + m - \tilde{Y}$

[11] Come caso particolare possiamo ricordare che nel caso di un portafoglio poco numeroso, F.P. Cantelli, in base ad una generalizzazione del teorema di Bienaymè-Tchebycheff, estendeva le ricerche della teoria classica alla considerazione della probabilità che la perdita di una compagnia di assicurazioni, relativa ad un portafoglio chiuso, non superasse mai alla fine dei singoli anni, fino all'estinzione delle polizze, una determinata soglia.

$$P(U) \leq \frac{1}{1+\left(\frac{\tilde{G}+m}{\sigma}\right)^2}.$$

medio σ. Quest'ultimo viene ridotto ricorrendo al rapporto riassicurativo: la compagnia cede, per ogni polizza, alla cessionaria, una parte del premio in cambio della copertura di una parte del rischio, realizzando in tal modo, in media, sulle n polizze, un guadagno minore, cioè si riduce m (guadagno medio), ma determina una diminuzione della probabilità di fallimento e, così, una riduzione di tale rischio.

Il problema fondamentale nella **teoria del rischio classica** è, quindi, quello di determinare quali aliquote delle singole polizze debbano essere conservate per rendere minima la probabilità di rovina, e quindi per massimizzare la sicurezza dell'impresa, cioè il noto problema dei pieni di conservazione[12], in cui si definisce una politica ottimale di ritenzione secondo il criterio della probabilità di rovina.

3.1 Politiche di ritenzione ottimale dei rischi secondo il criterio dell'utilità attesa (paragrafo 4.3 fino a pag. 133 - Daboni)

L'ottimalità di una politica di ritenzione dei rischi é relativa al criterio impiegato per "ordinare" le possibili politiche in termini di preferibilità dei risultati da esse scaturenti.
Facendo riferimento, in questo paragrafo, allo schema utilizzato da Daboni [1993], soffermeremo la nostra attenzione sul criterio della massimizzazione dell'utilità attesa

[12]Sul tema del duplice effetto della riassicurazione sul guadagno aleatorio, ricordiamo B. de Finetti, "Il problema dei pieni", Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari (1940); sullo stesso giornale vedansi, per ulteriori sviluppi, G. Ottaviani, "Sul problema della riassicurazione" (1952), e R. Cacciafesta, "La probabilità di fallimento e il problema della riassicurazione nell'ambito della teoria asintotica del rischio" (1962).

del guadagno aleatorio del portafoglio riassicurato per un esercizio ed impiegheremo il modello di utilità esponenziale (normalizzata):

$$u(x) = B\left[1 - e^{-\frac{x}{B}}\right], \qquad -\infty < x < \infty. \quad (15)$$

Il parametro *B*, con le dimensioni di importo, è il reciproco della misura di avversione al rischio (qui costante).

Se indichiamo con $\tilde{G}^{(r)}$ il guadagno aleatorio a seguito della riassicurazione (e al netto delle spese) sussisterà, con riferimento al singolo rischio nel caso delle riassicurazioni individuali o all'intero portafoglio la seguente relazione:

$$\tilde{G}^{(r)} = P + C - P_{re} - \tilde{M} \quad (16)$$

dove P é il premio netto all'assicuratore, C é la provvigione riconosciutagli dal riassicuratore che chiede un premio P_{re} e $\tilde{M}$ é la ritenzione della cedente.

Quindi si tratterà di determinare il massimo di

$$E\left[u\left(\tilde{G}^{(r)}\right)\right] = B\left[1 - E\left(e^{-\frac{\tilde{G}^{(r)}}{B}}\right)\right] \quad (17)$$

ovvero il minimo di $E\left(e^{-\frac{\tilde{G}(r)}{B}}\right)$, sotto i vincoli riguardanti le quote α o le priorità $\tilde{M}$ o le coppie $(\alpha, \tilde{M})$ a seconda della forma riassicurativa adottata. Indicando con $\varphi_{\tilde{G}^{(r)}}\left(-\frac{1}{B}\right)$ la speranza matematica $E\left(e^{-\frac{\tilde{G}(r)}{B}}\right)$, che, come é noto, é la funzione generatrice dei momenti del guadagno aleatorio dopo la riassicurazione calcolata in *-1/B*[15] , il problema sarà ricondotto alla ricerca del minimo di $ln\varphi_{\tilde{G}^{(r)}}\left(-\frac{1}{B}\right)$. Ricordiamo in proposito che sussiste lo sviluppo di Taylor

$$\ln \varphi_{\tilde{G}^{(r)}}(\lambda) = k_1\lambda + \frac{1}{2}k_2\lambda^2 + \frac{1}{3!}k_3\lambda^3 + \ldots + \frac{1}{n!}k_n\lambda^n + o\left(\lambda^n\right) \qquad (18)$$

dove il coefficiente k_n é detto *cumulante o seminvariante di ordine n* ed é $k_1=E(\tilde{G}^{(r)})$, $k_2=var(\tilde{G}^{(r)})$, $k_3=\mu_3(\tilde{G}^{(r)})$. In tale ottica possiamo definire il nostro problema come quello di ricercare il valore che renda minimo il seguente funzionale del guadagno aleatorio

$$\psi(\tilde{G}^{(r)}) = \ln\varphi_{\tilde{G}^{(r)}}\left(-\frac{1}{B}\right) = -E\left(\tilde{G}^{(r)}\right)\frac{1}{B} + \frac{1}{2}\operatorname{var}\left(\tilde{G}^{(r)}\right)\frac{1}{B^2} - \frac{1}{3!}\mu_3\left(\tilde{G}^{(r)}\right)\frac{1}{B^3} \qquad (19)$$

ovvero massimo il funzionale

$$\psi(\tilde{G}^{(r)}) = 6B^2E\left(\tilde{G}^{(r)}\right) - 3B\operatorname{var}\left(\tilde{G}^{(r)}\right) + \mu_3\left(\tilde{G}^{(r)}\right). \qquad (20)$$

Se assumiamo l'ipotesi semplificatrice

$$P_{re} - C = E(\tilde{X} - \tilde{M}) + m_r, \qquad (21)$$

[15] L'esistenza di tale funzione é assicurata se il rango di $G^{(r)}$ é limitato, cioé se le ritenzioni *M* sono a loro volta limitate superiormente.

dove m_r é un importo (guadagno medio del riassicuratore al netto della provvigione) inferiore al caricamento di sicurezza che l'assicuratore adotterebbe per garantire lui stesso il risarcimento $\tilde{X} - \tilde{M}$, allora l'effetto della provvigione é assorbito nella differenza di caricamento dei medesimi premi equi delle due parti contraenti.

Nel caso della riassicurazione proporzionale in quota globale, ad esempio, con $\tilde{M} = \alpha$ $\tilde{X}$, con α compreso tra 0 e 1, possiamo determinare la quota ottimale, cioè l'estremante massimo:

$$\alpha^* = \begin{cases} \alpha = B\dfrac{m_r}{\sigma^2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{m_r}{\sigma}\gamma\right) & se\alpha \langle 1 \\ 1 & se\alpha \geq 1 \end{cases} \tag{22}$$

con γ che indica l'indice di asimmetria.

Conta dunque essenzialmente (ed esclusivamente se γ é nullo) il confronto tra il rapporto $\frac{m_r}{\sigma^2}$, tra il guadagno medio del riassicuratore e la varianza del risarcimento (riferiti entrambi al risarcimento totale) e la misura dell'avversione a rischio. Fissato B, la quota ottimale di ritenzione é tanto più elevata, quanto é maggiore il rapporto $\frac{m_r}{\sigma^2}$ (e quindi tra guadagno medio e varianza senza riassicurazione). Fissato quel rapporto, la quota ottimale é tanto più elevata, quanto minore é l'avversione a rischio, 1/B.

Dobbiamo però osservare che per un concreto utilizzo di tali formule si richiederebbe la conoscenza del parametro B della funzione di utilità dell'assicuratore e dovrebbe essere affrontata la valutazione numerica di altre grandezze (coefficienti di caricamento del riassicuratore, varianze dei risarcimenti, coefficienti di asimmetria) basandosi, allo scopo, di una ricca documentazione statistica. Oltretutto non é agevole pervenire ad una formulazione operativa delle formule stabilite.

4 Procedimenti in uso nella pratica per il calcolo dei premi del riassicuratore. Il trattato E.CO.MO.R (paragrafo 4.6 - Daboni)

La questione é semplice nel caso della riassicurazione proporzionale. Non considerando spese e provvigioni e con riferimento all'i-esimo contratto, al riassicuratore spetterebbe il premio $P_i^{re} = (1-\alpha)P_i^{ced}$, nel caso della forma in quota, o $P_i^{re} = (1-\alpha_i)P_i^{ced}$, nel caso di eccedente di somma.

Meno semplice é il caso delle riassicurazioni non proporzionali ed in particolare nel caso del trattato stop loss. Il riassicuratore, nel caso di una stop loss, incontra principalmente due difficoltà quando:

a) la cedente, all'insaputa della cessionaria, dà luogo all'emissione di nuove polizze;

b) la definizione di un premio basandosi su statistiche precedenti, anche per il ramo vita, nonostante sia contraddistinto da flussi finanziari molto più prevedibili rispetto al ramo danni.

Nella pratica del mercato riassicurativo il calcolo del premio del riassicuratore di eccesso sinistro é frequentemente ricondotto alla valutazione del cosiddetto *burning cost*. Con tale nome viene indicato il rapporto tra l'importo rimasto a carico del riassicuratore per la copertura dei sinistri relativa ad un anno di trattato e il monte premi della cedente in quell'anno. Se indichiamo con C_1, C_2, ..., C_k gli esborsi del riassicuratore nei k anni precedenti l'esercizio attuale e P_1, P_2, ..., P_k i premi incassati dalla cedente in quegli anni. Nell'ipotesi che non sia cambiato il tipo di rischi (e di copertura del trattato in essere), il burning cost del riassicuratore per il prossimo anno é valutato dalla media

$$\tau = \frac{\sum_{1}^{k} C_i}{\sum_{1}^{k} P_i} \qquad (23)$$

o, in alternativa, dalla

$$\tau^* = \frac{1}{k} \sum_{1}^{k} \frac{C_i}{P_i} \qquad (24)$$

con k in genere pari a 3 o 5. Il tasso τ così calcolato, che stima un tasso di premio, viene poi gravato da un caricamento (per spese e di sicurezza) fornendo un tasso $\bar{\tau} = \tau(1+\eta)$ che, applicato al monte premi dell'esercizio attuale fornisce il premio del riassicuratore per la copertura dichiarata in trattato. L'ordine di grandezza del coefficiente η é usualmente pari al 45%.

Un'interessante forma riassicurativa non proporzionale che cerca di ovviare, in una certa misura, agli inconvenienti derivanti dagli effetti inflativi é stata proposta dall'attuario francese Thépaut ed é nota col nome E.CO.MO.R. (excedent du cout moyen relatif).

Alla chiusura del periodo contrattuale i sinistri (di maggiore entità) registrati dall'assicuratore sono classificati in ordine decrescente dell'ammontare di risarcimento. Il riassicuratore copre l'eccesso di ciascuno dei primi n rispetto all'n-esimo. Il numero n é fissato all'inizio del periodo (ad esempio n=20), mentre il premio da corrispondere al riassicuratore viene fatto dipendere dall'ammontare del risarcimento dello n-esimo sinistro della detta graduatoria. Seguendo il Thépaut, l'entità del premio di riassicurazione rimane infatti determinata, nota l'entità del

risarcimento dello n-esimo sinistro, se si assume che la distribuzione del singolo sinistro sia (almeno in corrispondenza della "coda") una distribuzione di Pareto.
Posto cioè

$$H_Y(x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} \qquad per x_0 \leq x \langle +\infty \qquad (\alpha \langle 1), \tag{25}$$

e indicando con x_n il valore che sarà osservato come realizzazione del Y_n (n-esimo sinistro della graduatoria), allora l'eccesso medio di un sinistro di entità superiore a x_n risulta uguale a

$$e_n = \frac{\int_{x_n}^{+\infty} H_Y(x)dx}{H_Y(x_n)} = \frac{x_n}{\alpha - 1}. \tag{26}$$

Pertanto il premio da corrispondere al riassicuratore per la copertura degli eccessi dei primi n-1 sinistri sopra la priorità x_n risulta uguale a *(n-1)* e_n.

Si noti che tale premio è funzione del parametro α e si ricordi cosa accade se $\alpha < 2$.

5 La riassicurazione vita

Nei paragrafi precedenti abbiamo evidenziato le caratteristiche della riassicurazione, in particolare in relazione all'assicurazione "non-vita". In tale sezione evidenzieremo i caratteri peculiari delle strategie riassicurative vita, seguendo le stesse linee di esposizione tenute nel paragrafo precedente, cercando così di evidenziare le differenze tra i due approcci.

Infatti la riassicurazione vita differisce in modo significativo dalle altri classi di riassicurazione, in quanto la natura dei rischi di questo ramo necessita l'utilizzo di forme e strategie di accordo specializzate. Sinteticamente possiamo riassumere tali divergenze in :

- l'assicurazione vita é contraddistinta dall'essere un "long term business";
- la funzione di risparmio e di previdenza assolta dalle polizze vita.

La necessità primaria che spinge la domanda di riassicurazione vita é il rischio di mortalità. Il costo di una Compagnia vita derivante dalla morte di una testa assicurata é definito dalla differenza tra la somma assicurata (comprese eventuali rendimenti o somme aggiuntive) e la riserva matematica relativa a tale polizza. Quindi l'impatto del rischio di mortalità sull'attività assicurativa ed i suoi risultati in un determinato periodo non dipende solo dall'eventuale divergenza tra probabilità poste alla base delle tariffe e frequenze effettivamente realizzate (di cui possiamo tenere conto nel calcolo del premio), ma anche dalla misura del capitale sotto rischio.

Tale divergenza può essere attribuita a tre fattori:

1. cambiamento dell'andamento generale della mortalità;
2. epidemie, guerre, disastri naturali, ecc., che producono dei significativi aumenti, anche se temporanei, dei tassi di mortalità;
3. un portafoglio non molto numeroso e poco omogeneo.

É proprio il terzo fattore che incentiva la domanda di riassicurazione vita, sia per nuove o piccole compagnie, che per quelle di maggiori dimensioni in relazione a particolari forme assicurative.

A causa della crescente competizione all'interno del mercato assicurativo, l'usuale orizzonte temporale di riferimento dal punto di vista del management ai fini delle decisioni strategiche (come, ad esempio, la distribuzione di bonus agli assicurati) é stato ridotto significativamente, così che ha assunto sempre più importanza la stabilità dell'ammontare a rischio rispetto agli anni precedenti e quindi vi é stato un'ulteriore incentivazione alla domanda di riassicurazione.
Infine occorre tenere ben presente che sussiste un *trade-off* tra stabilità raggiunta attraverso la riassicurazione e reddito d'impresa.

5.1 Premio di rischio e premio commerciale

Dal punto di vista storico la riassicurazione a premio commerciale é stata la prima forma di riassicurazione ad essere applicata. In tale forma la cessione degli affari da parte della cedente viene eseguita alle condizioni generali di premio ai quali gli affari stessi sono stati assunti e con applicazione di opportune provvigioni di acquisto e di incasso che compensino, con adeguati margini di profitto, le spese effettivamente sostenute. Tale metodo resiste ancora in diversi paesi perché una Compagnia di assicurazione all'inizio della propria attività, con disponibilità finanziarie libere scarse, deve ricorrere ad una riassicurazione che le consenta non solo di scaricarla del rischio di morte sulle polizze di capitale più elevato, ma anche ad aiutarla a fare fronte alle spese di acquisizione e ad anticipare parte dei fondi necessari alla costituzione delle riserve matematiche. Normalmente i trattati su basi originali sono per eccedente.

Va assumendo crescente diffusione nel ramo vita il trattato di riassicurazione a premio di rischio[18], al quale la riserva matematica resta estranea, presentando, quindi, maggiore analogia con i trattati riguardanti i rami danni. In questo approccio l'ammontare riassicurato in ciascun anno é uguale al capitale sotto rischio ridotto della parte trattenuta dalla cedente. La somma riassicurata con questo metodo per ogni singola polizza decresce di anno in anno, in corrispondenza dell'aumentare progressivo della riserva matematica, mentre si incrementa il tasso di premio per effetto dell'aumento dell'età dell'assicurato. Dal punto strettamente attuariale é il metodo di riassicurazione più semplice e logico che una Compagnia vita può applicare per equilibrare il proprio portafoglio e garantirsi contro il pericolo di sinistri che colpiscano le polizze di capitale più elevato, ma d'altra parte esso richiede che la cedente possa basarsi su disponibilità finanziarie molto elevate per far fronte alle ingenti spese di acquisizione degli affari ed alla costituzione delle riserve matematiche.

[18] Ricordiamo che il premio di rischio é quella parte di premio puro, relativo al capitale sotto rischio, nel caso di una polizza temporanea caso morte:

$$P^{r}_{t+1} = (C_{t+1} - V_{t+1}) v q_{x+t} .$$

Sulla base del premio di rischio possiamo menzionare tre forme di riassicurazione (Carter [1979]):

1. Riassicurazione in quota. La Compagnia cedente può trattenere una certa quota del rischio di mortalità per tutta la durata della polizza originale, così che l'ammontare riassicurato decresce annualmente grazie all'incremento della riserva.
2. Riassicurazione per eccedente. La Compagnia cedente trattiene un ammontare a rischio costante, in modo che il suo capitale sotto rischio sia sempre pari alla sua ritenzione; anche in questo caso la somma riassicurata decresce annualmente.
3. La Compagnia cedente si può accordare affinché la somma da riassicurare decresca attraverso un ammontare arbitrario relativo ad un concordato periodo di anni.

Ad esempio nel caso di un trattato in quota a premio di rischio, per tutte le forme assicurative che prevedono un tasso lordo di capitale sotto rischio ρ^* positivo (vita intera, TCM, miste) avremo che l'impegno del riassicuratore sarà definito da:

$$\tilde{Z}^{RE} = (1-r)\tilde{R} = (1-r)\rho^*\tilde{Z}, \qquad (27)$$

dove $\tilde{R}$ e $\tilde{Z}$ segnati sono rispettivamente, la v.a. dei capitali sotto rischio e la v.a. dei capitali assicurati colpiti da decesso.

In genere la riassicurazione a premio di rischio é contraddistinta dall'essere un contratto permanente, cioè che continua per tutta la durata della polizza originale, ma a volte é possibile un accordo tra le due parti per una durata minore. In ogni caso una volta che il contratto ha effetto né l'assicuratore, né il riassicuratore ha il diritto di recessione.

In caso di abbandono la cessionaria non ha alcun obbligo a contribuire al valore di riscatto o ad una somma ridotta, mentre la cedente mantiene le riserve e ha diritto a qualsiasi profitto (o perdita) derivante da una politica di investimento, dei capitali a copertura, fruttuosa (o meno).

Un ulteriore vantaggio deriva dalla minore consistenza dei premi ceduti, in confronto a quelli della riassicurazione a premio commerciale, consentendo quindi alla Compagnia cedente di far crescere più rapidamente i fondi di sicurezza.

D'altra parte, per le assicurazioni di rendita, in cui la causa potenziale di perdita deriva da un prolungamento di vita oltre l'età attesa della testa assicurata, la riassicurazione é prevista solo nel caso di rendite molto onerose e raramente é realizzata sulla base del premio di rischio.

Infine un altro svantaggio di tale approccio é rappresentato dal fatto che il premio di riassicurazione deve essere ricalcolato anno per anno, a causa della riduzione del capitale sotto rischio, e quindi della somma riassicurata.

Nella tabella 2 possiamo vedere come viene costruito il premio di riassicurazione sulla base del premio di rischio[19].

Anno di polizza	*Età*	*Riserva matematica*	*Capitale sotto rischio*	*Tasso di premio di rischio (x1000)*	*Premio riassicurativo*
1	45	-	1000	3.58	3.58
2	46	41	959	3.98	3.82
3	47	82	918	4.43	4.07
4	48	125	875	4.93	4.31
5	49	168	832	5.49	4.57
6	50	213	787	6.11	4.81
7	51	259	741	6.80	5.04
8	52	305	695	7.57	5.26
9	53	353	647	8.42	5.45
10	54	403	597	9.36	5.59
11	55	453	547	10.40	5.69
12	56	505	495	11.60	5.74
13	57	559	441	12.80	5.64
14	58	615	385	14.20	5.47
15	59	672	328	15.70	5.15
16	60	732	268	17.40	4.66
17	61	794	206	19.10	3.93
18	62	860	140	21.00	2.94
19	63	928	72	23.00	1.66
20	64	1000	-	25.20	-

[19] Ricordiamo che la riassicurazione può essere articolata anche sul premio "modificato". La cedente paga la differenza tra premio originale e incremento con interessi delle riserve matematiche. Il riassicuratore paga provvigioni sopportabili dai premi originali, i capitali rischio sinistrati e l'eccedenza dei riscatti sulle relative riserve.

Tabella 2 Premio di riassicurazione a premio di rischio per una mista di durata ventennale, con età all'ingresso 45 anni

5.2 Le forme non proporzionali per il ramo vita

Le forme non proporzionali, tipiche dei rami danni, hanno modesta diffusione nel ramo vita. La riassicurazione per eccesso sinistri (Accumulation XL) é utilizzata per coprire il rischio che un unico evento produca più sinistri. Per esempio, nel caso di un'assicurazione collettiva di puro rischio, riguardante il personale di un'impresa, un evento che colpisca l'impresa stessa (incendio, esplosione, ecc.), potrebbe causare la morte di più dipendenti assicurati. La compagnia può allora limitare il rischio fissando un "pieno di ritenzione per catastrofe"; al verificarsi dell'evento, il riassicuratore rimborserà l'eccedenza.

La riassicurazione per eccesso globale di perdita si propone la copertura di una mortalità generale: il riassicuratore, contro il pagamento di un premio annuo, assume a suo carico l'eccedenza dell'esborso globale per decessi rispetto ad un ammontare prefissato (talvolta in funzione dei premi incassati dalla cedente). Anche in questo caso trova applicazione per le collettive o nel caso di ampi portafogli di polizze temporanee caso morte.

Una compagnia di assicurazioni vita si orienta verso una forma "stop-loss" per due motivi fondamentali[20] :

a) ragioni di ordine economico-amministrativo, in quanto occorre definire solo il rapporto sinistri a premi, evitando di contabilizzare premi e commissioni per ogni polizza, e di garanzia contro eventi eccezionalmente sfavorevoli;

b) ragioni di ordine speculativo; una compagnia "giovane" o comunque di limitate disponibilità finanziarie, con un portafoglio abbastanza ampio, sproporzionato in

[20] E. Pizzetti, "La riassicurazione non proporzionale applicata al ramo vita", Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, 1964, Vol. 1.

confronto alle sue possibilità patrimoniali e finanziarie, può andare in crisi anche se la mortalità in un determinato esercizio sia leggermente peggiore di quella normale.

Nonostante quanto premesso, nella pratica queste forme non proporzionali sono abbastanza limitate a causa di diverse problematiche. La prassi evidenzia come il trattato excess of loss ratio sia soggetto ad una revisione annuale, raramente triennale. La durata del trattato é condizionata a delle clausole di cancellazione del contratto. Chiaramente questo é in netto contrasto con le caratteristiche tecniche dell'operazione assicurativa vita (di lungo periodo).

5.3 Il problema dei pieni

B. De Finetti [1940] esamina nei suoi diversi aspetti il problema del rischio derivante dalla copertura di un insieme di assicurazioni e, conseguentemente il *problema dei pieni*, ossia del metodo più opportuno di cedere in riassicurazione una parte di tali assicurazioni per ridurre il rischio entro limiti voluti con la minima perdita di guadagno.

In particolare l'obiettivo è formulare, e risolvere, un problema che ha i seguenti obiettivi:

a. Effetti di una cessione di quote di capitali assicurati sull'indice di stabilità **s**;

b. Problema di ottimo con riguardo alla gestione di un portafoglio

c. Definire la politica riassicurativa ottimale.

Per quanto concerne il punto a. occorre evidenziare quanto segue:

a.1) Effetto su s.q.m. del guadagno aleatorio

Poniamo che l'assicuratore stipuli un trattato proporzionale in quota a premio di rischio, a fronte di un portafoglio di Temporanee Caso Morte, dove

- Assicuratore paga il capitale sottorischio $a \cdot C_h$
- Riassicuratore paga il cap. sottorischio $(1-a) \cdot C_h$

e *h* indica il generico rischio.

Ipotizziamo che tutti i rischi in portafoglio siano omogenei qualitativamente, cioè con probabilità di morte uguali.

Allora l'esborso aleatorio (tralasciando la tilde) per il generico rischio in presenza di riassicurazione sarà

$$Y_h^* = a \cdot Y_h = \begin{cases} a \cdot C_h & \textit{decesso} & q \\ 0 & \textit{altrimenti} & 1-q \end{cases}$$

mentre (si ricordi come è stato rappresentato il guadagno aleatorio G nel paragrafo 3):

$$P = E[Y] = \sum_h q \cdot C_h = q \sum_h C_h$$

$$\sigma = \sqrt{VAR(Y)} = \sqrt{\sum_h \left[C_h^2 q_h - C_h^2 q_h^2\right]} = \sqrt{\sum_h C_h^2 \cdot q_h \left(1 - q_h\right)} = \sqrt{q(1-q)\sum_h C_h^2}$$

e quindi

$$a^2 VAR(Y_h) = (aC_h)^2 \cdot q_h(1-q_h)$$

e quindi

$$VAR(G_h^*) = VAR(Y_h^*) = a^2 VAR(Y_h) = a^2 \cdot VAR(G_h) \leq VAR(G_h)$$

Tale relazione vale anche sull'intero portafoglio

a.2) Effetto sul guadagno atteso

Ovviamente cedendo parte del premio, viene ceduto anche parte del caricamento.

Per i punti **b** e **c** si procede come segue.

Con riferimento all'h-esimo rischio di un assegnato portafoglio, h=1,2, ...,n, nel caso di un trattato proporzionale, indichiamo con a_h, compreso tra zero e uno, il pieno di conservazione, ovvero la quota trattenuta dalla cedente. Evidentemente una n-upla di pieni $\underline{a} = (a_1, ..., a_n)$ é una "politica ammissibile". A questo punto dobbiamo formulare convenientemente un problema di ottimo la cui risoluzione consenta di trovare la politica migliore.

Nell'impostazione che qui accoglieremo[13] , dovuta a B. De Finetti, il problema di ottimo ha come obiettivo la minimizzazione della probabilità di rovina sotto un opportuno vincolo, facente riferimento alla perdita di guadagno medio (si ricordi il duplice effetto della riassicurazione sul guadagno aleatorio di un portafoglio). La risoluzione ha luogo in due fasi.

[13] Si veda Pitacco [1992].

Nella prima si determinano i cosiddetti **pieni relativi**: le a_h vengono espresse in maniera parametrica, precisamente a meno di un fattore di proporzionalità. La risposta fornita é pertanto, ad esempio, del tipo seguente: il rischio 1 va trattenuto in una certa quota a_1, il rischio 2 va ritenuto in quota del primo, il rischio 3 in quota pari alla metà del primo, ...

Nella seconda fase si determinano i **pieni assoluti**, ovvero i valori numerici delle quote a_h. Il passaggio dalla prima alla seconda fase avviene particolarizzando il vincolo che, nella prima, é presente in forma parametrica.

In riferimento ad una determinata politica riassicurativa, indicando per l'h-esimo contratto con $(1-a_h)\ k_h$ la parte di caricamento di sicurezza ceduta alla cessionaria (riassicuratore), dove il guadagno medio é

$$m^* = E[\tilde{G}^*] = \sum E\left[\tilde{G}_h^*\right] = \sum\left(m_h - (1-a_h)k_h\right)$$

e lo s.q.m. del guadagno aleatorio globale é $\sigma^* = \sqrt{\sum a_h^2 \cdot \sigma_h^2}$, osserviamo che a riassicurazione effettuata, la rovina ha luogo se

$$\frac{\tilde{G}^* - m^*}{\sigma^*} < -\frac{U + m^*}{\sigma^*} = -s^* \tag{9}$$

dove s^* é l'indice di stabilità relativa in presenza della succitata politica riassicurativa. Quindi la probabilità di rovina é:

$$p\left(s^*\right) = \Pr ob\left\{\frac{\tilde{G}^* - m^*}{\sigma^*} \le -s^*\right\} \tag{10}$$

Qualunque sia la distribuzione del guadagno aleatorio globale, essendo la probabilità di rovina decrescente al crescere di s^*, sicché la minimizzazione della probabilità di rovina comporterà la massimizzazione di s^*.

Nell'ipotesi di $U+m^*$ costante, allora occorrerà minimizzare lo s.q.m. del guadagno aleatorio $\tilde{G}^*$, pervenendo alla formulazione della seguente classe di problemi di minimo condizionato:

$$\begin{cases} \min\limits_{\{(a_1,\dots,a_n)\}} \sum_{h=1}^{n} a_h^2 \sigma_h^2 \\ \sum_{h=1}^{n} (1-a_h) k_h = K \\ 0 \le a_h \le 1; \qquad\qquad h = 1,\dots,n \end{cases} \tag{11}$$

Un particolare problema della classe é definito da un particolare valore di *K*, evidentemente compreso tra 0 e la somma dei k_h. Dato che rappresenta la perdita globale di guadagno medio sopportata in seguito alla cessione in riassicurazione, pertanto il problema consiste nel determinare la n-upla $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ che, comportando una perdita *K* di guadagno medio, minimizzi la varianza del guadagno e quindi la probabilità di rovina.

Ora, trascurando i vincoli $0 \le a_h \le 1$ si perviene, attraverso il metodo di Lagrange, alla soluzione $a_h = A\,(k_h / \sigma^2_h)$ dove $2A$ (la cui dimensione é monetaria) é il moltiplicatore di Lagrange, mentre

$$A = \frac{\sum_{h=1}^{n} k_h - K}{\sum_{h=1}^{n} \frac{k_h^2}{\sigma_h^2}} \tag{12}$$

Quindi le quote ottimali a_h, cioè i pieni relativi, sono direttamente proporzionali alla perdita di guadagno medio k_h (relativa alla ritenzione nulla) e inversamente proporzionali alla varianza del guadagno.

In base alla (12) tali quote sono crescenti al decrescere di *K*: tanto é minore il sacrificio di guadagno medio, tanto più alte sono le quote di conservazione.
Non considerando i succitati vincoli implicherebbe scarsa rispondenza ad una ragionevole pratica riassicurativa: si avrebbe la riassicurazione di tutti i rischi sulla base di quello (o di quelli) di massimo rapporto k_h / σ^2_h (quindi con un A elevato). Si noti che l'obiettivo è ricavare delle aliquote ottimali (e quindi per alcuni rischi si cerca di ottenere delle aliquote di conservazione pari a 1).

Per questo motivo occorre considerare i vincoli $0 \le a_h \le 1$ nel problema di minimo condizionato. In Pitacco [1992] tale problema di programmazione dinamica[14] , viene risolto giungendo alla soluzione:

$$a_h = \begin{cases} B\dfrac{k_h}{\sigma_h^2} & se \quad B\dfrac{k_h}{\sigma_h^2} \le 1 \\ 1 & se \quad B\dfrac{k_h}{\sigma_h^2} > 1 \end{cases} \tag{13}$$

dove la costante *B* é un fattore di proporzionalità legato al valore *K* (come accadeva per *A*).

Rimane così risolto il problema dei pieni relativi.
Si osservi però che tali valori relativi sono "neutri", dipendendo solo dalle perdite di guadagno medio e dalle varianze dei singoli rischi e non anche da fattori legati alla potenzialità della compagnia, della sua capacità di sopportare perdite.

[14] Si veda l'algoritmo di programmazione dinamica proposto da F. Giannessi in "Alcune considerazioni sulla risoluzione di classici problemi di riassicurazione", pubblicato in: M.Volpato, "Studi e modelli di ricerca operativa", UTET, 1971.

Tali fattori vengono introdotti nel calcolo dei pieni assoluti (**FASE 2**).

Tali valori numerici vengono determinati fissando B e quindi K. Qualunque sia il valore della costante B applicato ai pieni relativi ottimali, dati dalla (13), i conseguenti pieni assoluti costituiscono un punto di ottimo, cioè di minima probabilità di rovina. Il problema é come scegliere B. Una soluzione é fissare un livello di probabilità di rovina "accettabile", ε, con ipotesi di **normalità** tale che $p(s^*) = \Phi(s^*) = \varepsilon$, allora si tratta di calcolare il valore B legato a s^*, dalla:

$$s^* = \frac{U + m - \sum_{h=1}^{h_B} k_h + B \sum_{h=1}^{h_B} \frac{k_h}{\sigma_h^2}}{\sqrt{B^2 \sum_{h=1}^{h_B} \frac{k_h}{\sigma_h^2} + \sum_{h=h_B+1}^{n} \sigma_h^2}} \qquad (14)$$

dove h_B é l'indice massimo tra gli h, tale che $B\,(k_h / \sigma^2_h) \leq 1$.

Si noti che nelle assicurazioni vita si hanno contratti pluriennali. Sappiamo che nel tempo il capitale sottorischio varia => quindi potrà variare la quota di capitale sottorischio ceduta => varia quindi il pieno di conservazione anno per anno.

Purtroppo in questo ambito non è possibile ricavare una quota ottima valida per tutta la durata contrattuale.

Quindi ci si avvicina "in media" all'ottimo, scegliendo in maniera adeguata il valore di capitale sotto rischio a cui riferire la quota attraverso una riassicurazione a premio di rischio e non a premio commerciale (che ha effetto anche sul valore delle riserve matematiche).

Pitacco [2002], a fronte di una riassicurazione proporzionale per eccedente, ipotizzando:

1. $k_h = \alpha\, C_h$ (proporzionalità)
2. $q_h = q$ per ogni h
3. Fisso B

allora il pieno di conservazione è pari a:

$$a_h = \min\left\{ B \frac{\alpha}{q(1-q)C_h}, 1 \right\} \qquad (15)$$

Se però l'ipotesi 2 non è più valida, allora si può suddividere il portafoglio in sottoclassi tali che siano omogenee in termini qualitativi e si può applicare la formula precedente (15) all'interno di tali raggruppamenti.

6 Cenni alla riassicurazione finanziaria

La riassicurazione sta ormai diventando sempre più complessa, cosicché, oltre alle tradizionali strutture proporzionali/non proporzionali, sono ora presenti sui mercati internazionali nuove forme per il trasferimento del rischio, ad integrazione della cosiddetta *Riassicurazione Finanziaria*.

Con il termine "riassicurazione non tradizionale" generalmente si intende:

a) protezione di rischi attraverso nuovi meccanismi;

b) collocamento di rischi in mercati diversi da quelli (ri)assicurativi tradizionali;
c) inclusione di rischi, precedentemente considerati non assicurabili, in coperture (ri)assicurative.

Nei punti a) e b) rientra la *Securitization*[17] , il cui anno di sviluppo può essere individuato nel 1997, originata in seguito all'Hurricane Andrew (1989). Con queste nuove coperture sono stati riassicurati rischi su mercati diversi da quelli tradizionali, interessando operatori, generalmente presenti nei mercati finanziari, che al giusto prezzo sono disponibili a porre a rischio il loro capitale e/o i relativi interessi maturabili. É da evidenziare che tutto questo é avvenuto in un momento in cui i mercati riassicurativi tradizionali si assiste ad un eccesso di capacità disponibile e, di conseguenza, ad una riduzione dei costi, il che ha parzialmente limitato lo sviluppo di questi nuovi prodotti.

Gli eventi protetti con queste forme di securitization sono essenzialmente collegati ad esposizioni catastrofali nel settore "property" (terremoto in Usa e nel Giappone, Hurricane, danni derivanti da grandine ...), ossia eventi con bassa frequenza ed elevata esposizione, in contrasto con quanto avviene nei mercati finanziari dove la securitization é caratterizzata da elevata frequenza ed esposizione limitata. In realtà, per essere collocabili presso gli investitori, questi nuovi prodotti devono avere una bassa probabilità di escussione, ottenibile soltanto in presenza di una esigua probabilità di avvenimento dell'evento assicurato.

L'innovazione finanziaria che negli ultimi due decenni ha offerto ad intermediari finanziari e non (e quindi anche agli assicuratori) una straordinaria ricchezza di strumenti di copertura dai rischi finanziari é ora in grado di offrire anche al settore assicurativo strumenti di copertura dai rischi ... assicurativi.

Possiamo individuare tre derivati assicurativi molto importanti:

a) i *futures assicurativi*: essi consentono la copertura di sinistri catastrofali. Il primo tentativo é stato fatto dal Chicago Board of Trade alla fine del 1992. L'ISO (Insurance Service Office) riceve dalle 100 maggiori Compagnie i dati trimestrali su premi e sinistri, che concorrono a definire il prezzo del future. L'ISO calcolerà il *loss-ratio* effettivo ed i prezzi e cambiamenti saranno funzione solo delle aspettative di sinistrosità e dalle possibili sue variazioni, in una determinata zona e in un determinato periodo di tempo. Di conseguenza, ove un operatore abbia comprato un future sulla base di una aspettativa di sinistrosità più bassa di quella poi realmente registrata, potrà conseguire un profitto grazie al maggiore valore del future risultante dalle nuove superiori aspettative di sinistrosità. L'acquisto di un future assicurativo produce gli effetti di una copertura riassicurativa con trattato proporzionale in quota parte senza massimale. Infatti acquistando un future catastrofale, si ha la cessione a carico del venditore (in genere investitori speculativi o istituzionali, al fine di diversificare il portafoglio di investimenti) di una quota parte dei sinistri effettivi con una copertura proporzionale al numero dei contratti acquistati (ovviamente in contropartita del costo di acquisto);
b) l'*option assicurativa catastrofale*. Chi paga il premio, come nella option finanziaria, vuole garantirsi contro l'oscillazione del prezzo di un future catastrofale legato ad una data aspettativa di sinistrosità (il compratore esercita il diritto se il loss ratio aumenterà). La *call option catastrofale* ha analogie con il trattato riassicurativo stop loss. In tale forma non proporzionale la cedente si premunisce se il loss ratio supera una certa soglia, così nella call option la call sarà esercitata se il prezzo del future supererà un dato livello di sinistrosità, al di là del quale é conveniente l'esercizio. Inoltre così come il riassicuratore (venditore) può circoscrivere il suo rischio fissando una portata, anche il venditore della call option

[17] Si veda G. Gionta [1998].

può cautelarsi, acquistando contemporaneamente un'altra call option ad un prezzo d'esercizio differente.

c) *Call option spreads (CATS)*. Il CBOT ha immesso sul mercato anche un titolo che unisce nello stesso strumento sia un'operazione d'acquisto di una call option, sia un'operazione di vendita di una call option a prezzi di esercizio differenti. In tal modo é possibile comprare degli *spreads* su una call option relativa ad eventi catastrofali. La CATS consente di delimitare una protezione assicurativa comprata (o venduta) entro una fascia compresa tra due punti di riferimento, un minimo ed un massimo.

Posti a confronto la riassicurazione "tradizionale" mantiene indubbi vantaggi, con particolare riguardo all'erogazione di servizi e l'adattamento dell'accordo a specifiche ed uniche esigenze di copertura della cedente, che non potranno mai essere soddisfatte da un mercato standardizzato. Altre differenze, però, avvantaggiano l'utilizzo dei prodotti derivati: un mercato ampio che consente, grazie alla standardizzazione, prezzi, costi, rischi molto contenuti assieme ad una liquidità maggiore.

Tale confronto ci porta a considerare che i due strumenti non devono essere posti in competizione, bensì possano essere utilizzati a complemento e supporto delle numerosissime e diversissime strategie di copertura presenti nella realtà operativa. Occorre aggiungere, inoltre che i nuovi titoli assicurativi sono stati attivati esclusivamente con riferimento ai rischi catastrofali nel mercato americano.

Infine la futura riforma del margine di solvibilità potrà contribuire a definire la validità delle forme "non tradizionali", permettendo alle Compagnie di Riassicurazione di predisporre prodotti caratterizzati anche dal trasferimento del rischio finanziario, così da poter offrire ai clienti un insieme di coperture sempre più completo e funzionale alla garanzia dei risultati delle Compagnie dirette.

7 La gestione tecnica: Politiche gestionali ad orizzonte infinito. Il modello della teoria collettiva del rischio (paragrafo 4.8 fino a pag. 169 - Daboni)

Con questo argomento cominciamo ad introdurre un primo concetto di solvibilità.

Poniamoci su un orizzonte temporale infinito. In questo caso è necessario confrontare possibili politiche di costituzione di un fondo o riserva libera di sicurezza iniziale, R, di caricamento di sicurezza dei premi equi e di riduzione della varianza dei rischi, scegliendo quella particolare politica o una di quelle per le quali riesce non superiore ad un prefissato livello la probabilità che R = 0 (rovina della Compagnia).

Tale approccio è stato utilizzato nella TdR collettiva, rappresentando la riserva di sicurezza $\{R_t; t \geq 0\}$ ove R_0 = R è la riserva iniziale ed ipotizzando che la Compagnia incassi sempre lo stesso ammontare di premio equo, pari a 1 e quindi lo stesso ammontare di premio netto pari a c * 1.

Quindi dopo t anni la Compagnia avrà incassato una somma di Premi pari

$$c * t = (1+\gamma)\, t,$$

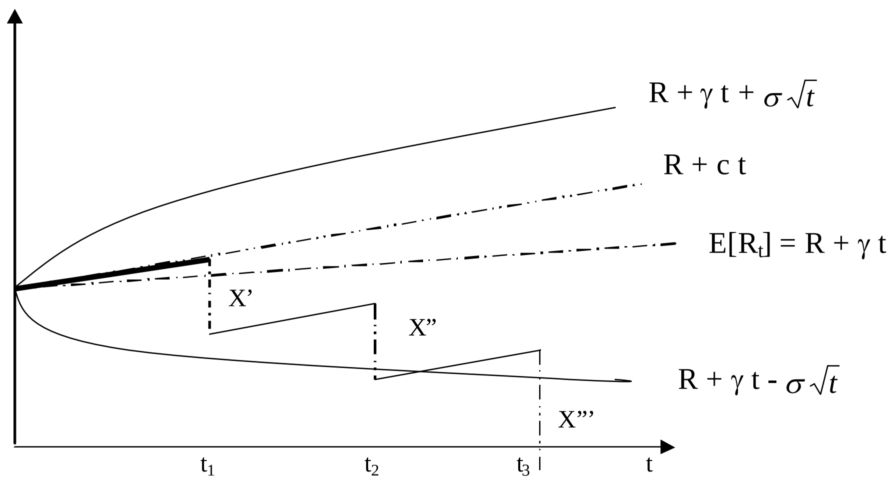
dove γ è il coefficiente di caricamento di sicurezza.

Indichiamo con X_t il danno aggregato (cumulato) nell'intervallo [0, t], allora deve essere $E[X_t]=t$.

In t=0 la riserva di rischio sarà:

$$R_t = R + ct - X_t$$

Nella figura seguente viene fornita una possibile traettoria del processo R_t.



In t_1 e t_2 sono stati pagati i risarcimenti X' e X''.

In t_2 i premi incassati ammontavano a $c\ t_2$, da cui si evince che $R + c\ t_2 > X'+X''$.

In $c\ t_3$, per effetto di X''', il fondo è andata al di sotto del livello zero (rovina).

Ovviamente interessa valutare la probabilità che $R_t < 0$ (per la prima volta). Tale probabilità dipenderà da:

1. R iniziale
2. dal coefficiente di caricamento di sicurezza γ

3. dal processo stocastico del danno aggregato X_t.

Nel modello collettivo della TdR si assume che:

$$X_t = \sum_{h=1}^{k_t} z_h$$

(si ricordi quanto visto nel modulo I), cioè X_t descrive un processo ad incrementi indipendenti.

Il processo poissoniano k_t ha parametro, per ipotesi, λ t, mentre $E[z_h] = \mu$ e $VAR[z_h] = \nu^2$.

In base a tali ipotesi avremo:

$$E[X_t] = E[k_t]E[z_h] = \lambda t\mu$$
$$Var[X_t] = E[k_t]E[z_h^2] = \lambda t(\mu^2 + \nu^2)$$

Dato che $E[X_1] = \lambda\ \mu = 1$ per ipotesi, allora

$$E[X_t] = t$$
$$Var[X_t] = \lambda t(\mu^2 + \nu^2) = t\sigma^2$$

da cui ricaviamo le relazioni esposte nel grafico:

$$E[R_t] = R + ct - E[X_t] = R + (c-1)t = R + \gamma t$$
$$Var[R_t] = Var[X_t] = t\sigma^2$$

Per quanto riguarda la probabilità **asintotica** di rovina p(R), funzione di R iniziale, si dimostra che è pari

$$p(R) = e^{-2\frac{m}{\sigma^2}R}$$

$$m = \gamma E[X_1] = \gamma$$

dove m indica quindi il guadagno medio per caricamento (nell'unità di tempo).

SI RIFLETTA SU QUANTO OTTENUTO NEL TEOREMA DELLA ROVINA DEL GIOCATORE