Test d’Ipotesi

Corso di **Teoria dell’Inferenza Statistica**

a.a. 2009/2010 Secondo Periodo

Prof. Filippo DOMMA

Corso di Laurea in MQEGA

(Metodi Quantitativi per l’Economia e la Gestione delle Aziende)

Facoltà di Economia – UniCal

Il test statistico è una decisione operativa presa sulla base di risultati sperimentali, tenendo conto di considerazioni probabilistiche.

La problematica del test può essere suddivisa in tre fasi:

a. formulare una ipotesi sulla v.c. X;
b. osservare il campione casuale;
c. in base ai risultati campionari
decidere se accettare o rifiutare l'ipotesi fatta.

Definizione. Un'ipotesi statistica è una affermazione sulla distribuzione di una o più variabili casuali.

Se l'ipotesi statistica specifica completamente la distribuzione della v.c. allora l'ipotesi è detta semplice; in caso contrario, viene chiamata ipotesi statistica composta.
Le ipotesi verranno indicate con la lettera H.

Esempi. Data una v.c. $X \sim N(\mu,9)$

a. l'ipotesi H: $\mu=15$ è semplice perché specifica completamente la distribuzione della v.c. X;
b. l'ipotesi H: $\mu>15$ è composta.

Prima Fase.

Dato un modello parametrico **M**={ **X** , **P** }, sia Θ_0 un sottoinsieme dello spazio parametrico Θ. Si vuole **verificare**

$H_0 : \theta \in \Theta_0$ Ipotesi NULLA

contro

$H_1 : \theta \in \Theta_1$ Ipotesi ALTERNATIVA

dove $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ e $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \phi$

L'ipotesi statistica riguardante la v.c. X e, quindi, il parametro θ, implica una bipartizione dello spazio parametrico Θ in due regioni, Θ_0 e Θ_1, di cui una rappresenta l'ipotesi nulla H_0 e la complementare rappresenta l'alternativa H_1.

Seconda Fase: consiste nell'estrazione dallo spazio campionario del campione $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$.

Terza Fase (prendere una decisione su H): viene condotta sullo spazio campionario.

Più precisamente, si suddivide lo spazio campionario in due regioni, C_0 e C_1 tali che

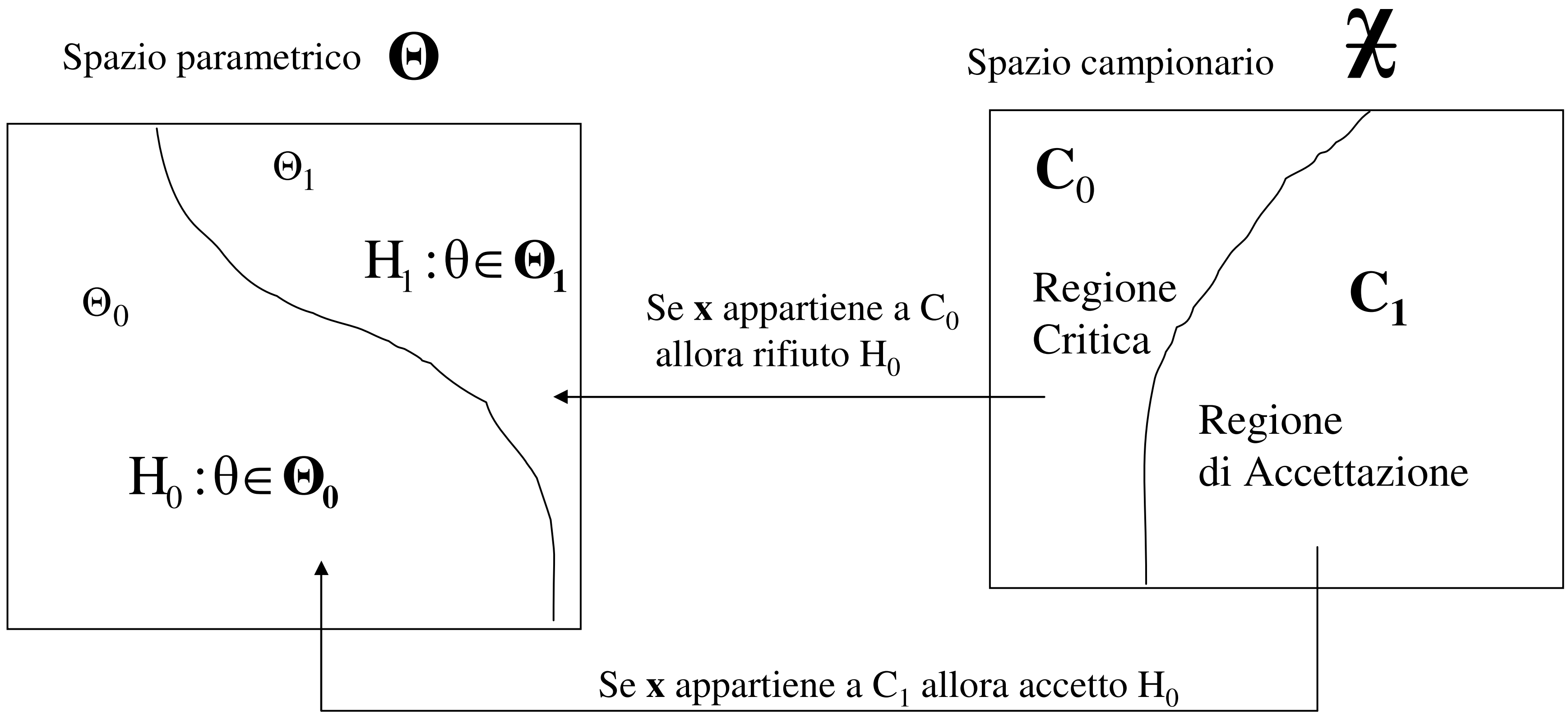
$$C_0 \cup C_1 = \chi \qquad \text{e} \qquad C_0 \cap C_1 = \phi$$

Se $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in C_1$ Allora si **accetta** H_0

Se $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in C_0$ Allora si **rifiuta** H_0

Definizione. Sia C_0 quel sottoinsieme dello spazio campionario che in accordo con un prefissato test, conduce al rifiuto dell'ipotesi H_0, se il campione osservato $\mathbf{x}$ appartiene a C_0. Allora C_0 è detta **regione critica** (o di rifiuto) del test.

In sintesi, le fasi di un test possono essere così rappresentate:



Da ciò deriva che la **regola di decisione** se accettare o rifiutare H_0 è una bipartizione dello spazio campionario.

Possiamo concludere affermando che:
il test è una corrispondenza tra lo spazio campionario e lo spazio parametrico, dove il primo è suddiviso in due regioni (C_0 e C_1) secondo la regola di decisione (è il fulcro del test), mentre lo spazio parametrico è diviso in due regioni (Θ_0 e Θ_1) a seconda delle ipotesi da verificare.

Naturalmente, la corrispondenza tra $\mathcal{X}$ e Θ ha senso solo se valutata in termini probabilistici. Quindi, dobbiamo chiederci qual è la probabilità che il campione appartenga, ad esempio, alla regione critica, cioè:

$$P\left\{\mathbf{X} \in C_0 / H_i\right\}$$

i=0,1, la quale può essere calcolata assumendo vera una delle ipotesi.

In tale contesto, si possono avere quattro situazioni possibili, ottenute dalla combinazione dei due "**stati di natura**" (H_0 vera, H_0 falsa) con le due "**azioni possibili**" (accetto H_0, rifiuto H_0), cioè

STATI di NATURA

		Vera H_0	Falsa H_0
AZIONI	Accetto H_0	G_1	E_2
POSSIBILI	Rifiuto H_0	E_1	G_2

Descrizione degli eventi:

- G_1: in base al campione decido di accettare H_0 e H_0 è vera;
- G_2: in base al campione decido di rifiutare H_0 e H_0 è falsa;
- E_1: in base al campione decido di rifiutare H_0 e H_0 è vera;
- E_2: in base al campione decido di accettare H_0 e H_0 è falsa;

Probabilità degli eventi:

$$P_r\{G_1\} = P_r\{\text{Accetto } H_0 / H_0 \text{ è vera}\} = P_r\{\mathbf{X} \notin C_0 / H_0\} = 1 - \alpha$$

$$P_r\{G_2\} = P_r\{\text{Rifiuto } H_0 / H_0 \text{ è falsa}\} = P_r\{\mathbf{X} \in C_0 / H_1\} = 1 - \beta$$

$$P_r\{E_1\} = P_r\{\text{Rifiuto } H_0 / H_0 \text{ è vera}\} = P_r\{\mathbf{X} \in C_0 / H_0\} = \alpha$$

$$P_r\{E_2\} = P_r\{\text{Accetto } H_0 / H_0 \text{ è falsa}\} = P_r\{\mathbf{X} \notin C_0 / H_1\} = \beta$$

Spesso E_1 viene definito come errore di primo tipo ed E_2 errore di secondo tipo.

Concludendo si ha:

STATI di NATURA

AZIONI POSSIBILI		Vera H_0	Falsa H_0
	$\mathbf{x} \notin C_0$	$1-\alpha$	β
	$\mathbf{x} \in C_0$	α	$1-\beta$

Definizione. Funzione di Potenza.

La funzione di potenza di un test di un'ipotesi statistica H_0 contro un'ipotesi alternativa H_1, è quella funzione, definita per tutte le distribuzioni sotto considerazione (le ipotesi), che fornisce la probabilità che il campione cada nella regione critica C_0 del test, cioè una funzione che fornisce la probabilità di rifiutare l'ipotesi sotto considerazione.

Il valore della funzione di potenza in corrispondenza di un punto dello spazio parametrico è detta potenza del test.

Formalizzando abbiamo:

$$K(\theta) = P\left\{\mathbf{X} \in C_0 / H_i\right\}$$

Definizione. Livello di significatività.

Il livello di significatività del test (o ampiezza della regione critica C_0) è il valore massimo della funzione di potenza del test quando H_0 è vera. Cioè:

$$K(\theta_0) = P\{\mathbf{X} \in C_0 / H_0\} = \alpha$$

Se H_0 è definita come : H_0: $\theta = \theta_0$

$$K(\theta) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P\{\mathbf{X} \in C_0 / H_0\}$$

Se H_0 è definita come : H_0: $\theta \in \Theta_0$

Si può osservare che l'ipotesi H_0 riflette, in generale, la situazione precedente all'esperimento campionario, nel senso che accettando H_0 la situazione non cambia.
E' dal rifiuto di H_0 che bisogna cautelarsi in quanto tale rifiuto implica una modifica delle condizioni e delle acquisizioni ritenute valide in precedenza, il che implica per lo più costi, rischi, modifiche tecniche, nuove procedure operative, …ecc..
In tal modo si ritiene **preferibile** commettere un errore non modificando la realtà (errore di secondo tipo) piuttosto che correre il rischio di errare modificando la realtà (errore di primo tipo).

Esempio. In un giudizio penale, l'imputato è innocente fino a prova contraria.
E' fondamentale che per il giudice sia H_0 l'ipotesi che egli sia innocente.
Secondo questa logica si ritiene ben più grave condannare un innocente (errore di I tipo) che assolvere un colpevole (errore di II tipo).

Nel tentativo di definire un “buon” test, la ricerca va orientata verso il contenimento probabilistico degli errori, dando maggiore rilevanza all’errore di I tipo, senza ovviamente trascurare quello di II tipo.

Un metodo per definire un test ottimale consiste nel fissare l’ampiezza d’errore di I tipo e minimizzare l’ampiezza d’errore di II tipo.

Regione critica migliore di ampiezza α

Definizione. Sia C_0 un sottoinsieme dello spazio campionario $\mathcal{X}$. Allora C_0 è detta regione critica migliore di ampiezza α, per verificare l'ipotesi <u>semplice</u> $H_0{:}\theta = \theta_0$ contro l'ipotesi <u>semplice</u> $H_1{:}\theta = \theta_1$

se, per ogni sottoinsieme A dello spazio campionario per il quale

$$P\{\mathbf{X} \in A / H_0\} = \alpha$$

Si ha:

$$\text{i) } P\{\mathbf{X} \in C_0 / H_0\} = \alpha$$

$$\text{ii) } P\{\mathbf{X} \in C_0 / H_1\} \geq P\{\mathbf{X} \in A / H_1\}$$

In altri termini C_0 è la regione critica migliore di ampiezza α se tra tutte le altre regioni critiche della stessa ampiezza , possiede potenza maggiore o uguale rispetto a tutte le altre regioni critiche.

Il test basato su una regione critica migliore è chiamato test più potente.

Teorema. (di Neyman e Pearson).

Sia $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$ un c.c. iid estratto da $f(x;\theta)$. Sia $L(\theta;\mathbf{x})$ la funzione di verosimiglianza di $\mathbf{x}$. Siano θ_1 e θ_2 due valori fissati e distinti di θ tali che $\Theta=\{\theta\text{: } \theta= \theta_1 \text{ oppure } \theta= \theta_2\}$; sia, infine, k un numero positivo.

Se C_0 è un sottoinsieme dello spazio campionario tale che:

$$\text{i)}\ \frac{L(\theta_1;\mathbf{x})}{L(\theta_2;\mathbf{x})} \le k \qquad \forall\, \mathbf{x} \in C_0$$

$$\text{ii)}\ \frac{L(\theta_1;\mathbf{x})}{L(\theta_2;\mathbf{x})} \ge k \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \overline{C}_0$$

$$\text{iii)}\ P\{\mathbf{X} \in C_0 / H_0\} = \alpha$$

Allora C_0 è una regione critica migliore di ampiezza α per verificare l'ipotesi H_0:$\theta= \theta_1$ contro l'ipotesi H_1: $\theta= \theta_2$.

Dimostrazione.

Non sempre bisogna individuare C_0 e k che soddisfano le condizioni poste dal teorema. Spesso si riesce a trasformare la disuguaglianza (i) in una disuguaglianza che riguarda una particolare statistica.

Esempio.

Test del Rapporto di Verosimiglianza Generalizzato

Sia $(X_1,\ldots,X_n)$ un c.c. iid estratto da $f(x;\theta)$.
Supponiamo di voler effettuare il seguente test:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{contro} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

dove $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ e $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \phi$

Definizione. Rapporto di verosimiglianza Generalizzato.

Sia $L(\theta; \mathbf{x})$ la funzione di verosimiglianza di un campione $\mathbf{x}$. Si definisce rapporto di verosimiglianza generalizzato la quantità:

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \mathbf{x})}{\sup\limits_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x})}$$

Osservazioni:

1. $\Lambda(\mathbf{x})$ è una funzione del campione osservato $\mathbf{x}$.
   Sostituendo a $\mathbf{x}$ il c.c. $\mathbf{X}$ otteniamo $\Lambda(\mathbf{X})$ che è una statistica in quanto non dipende dai valori del parametro θ.
2. I valori di $\Lambda(\mathbf{x})$ appartengono all'intervallo [0,1].
3. I valori della statistica $\Lambda(\mathbf{X})$ sono usati per il seguente test:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \qquad \text{contro} \qquad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Tramite il rapporto di verosimiglianza si stabilisce che:

$$\text{si rifiuta } H_0 \iff \Lambda(\mathbf{x}) \le \lambda_0$$

dove λ_0 è una costante determinata dal livello di significatività α del test.

Il test del rapporto di verosimiglianza generalizzato ha senso anche intuitivamente in quanto $\Lambda(\mathbf{x})$ tende ad essere piccolo quando H_0 non è vera, dato che il denominatore tende ad essere maggiore del numeratore.

Per un livello di significatività α fissato il corrispondente valore di λ_0 tale che

$$P_r\left\{\Lambda(\mathbf{X}) \leq \lambda_0 / H_0\right\} = \alpha$$

può essere determinato in modo esatto solo se è nota la distribuzione campionaria della statistica $\Lambda(\mathbf{X})$, in altri casi è necessario far riferimento ad approssimazioni per grandi campioni.

Esempio.

Teorema. Sia X_1, X_2,… una successione di v.c. iid estratta da $f(x;\theta)$.

Consideriamo il test

$H_0: \theta = \theta_0$ contro $H_1: \theta \neq \theta_0$

Assumiamo che la sequenza delle radici dell'equazione di verosimiglianza siano consistenti e che siano vere le condizioni di regolarità per la normalità asintotica degli stimatori di massima verosimiglianza.

Allora, sotto H_0

$$-2\ln\{\Lambda_n(\mathbf{X})\} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \chi^2(1)$$

E' evidente che si rifiuta H_0 se $-2\ln\{\Lambda(\mathbf{x})\}$ è elevato. In particolare, fissato α, se

$$-2\ln\{\Lambda(\mathbf{x})\} \geq \chi^2_\alpha(1) \Rightarrow \text{rifiuto } H_0$$

Teorema. Sia X_1, X_2,… una successione di v.c. iid estratta da $f(x;\boldsymbol{\theta})$ e sia $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_k)\in\boldsymbol{\Theta}\subseteq\Re^k$

Consideriamo il test

$$H_0: \theta_1 = \theta_1^0, \theta_2 = \theta_2^0, \ldots, \theta_r = \theta_r^0, \theta_{r+1}, \ldots, \theta_k$$
$$H_1: \theta_1 \neq \theta_1^0, \theta_2 \neq \theta_2^0, \ldots, \theta_r \neq \theta_r^0$$

dove $\theta_1^0, \theta_2^0, \ldots, \theta_r^0$ sono valori noti

$\theta_{r+1}, \ldots, \theta_k$ non sono specificati

Se sono soddisfatte alcune condizioni di regolarità, allora, sotto H_0

$$-2\ln\{\Lambda_n(\mathbf{X})\} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \chi^2(r)$$

Test di Significatività

a) Individuare una statistica (test) che si comporta in modo diverso sotto le due ipotesi H_0 e H_1;

b) utilizzare il diverso comportamento della statistica per definire il test.

Esempio. Dato un c.c. di dimensione 20 estratto da un v.c. $N(\mu,1)$, si vuole verificare se

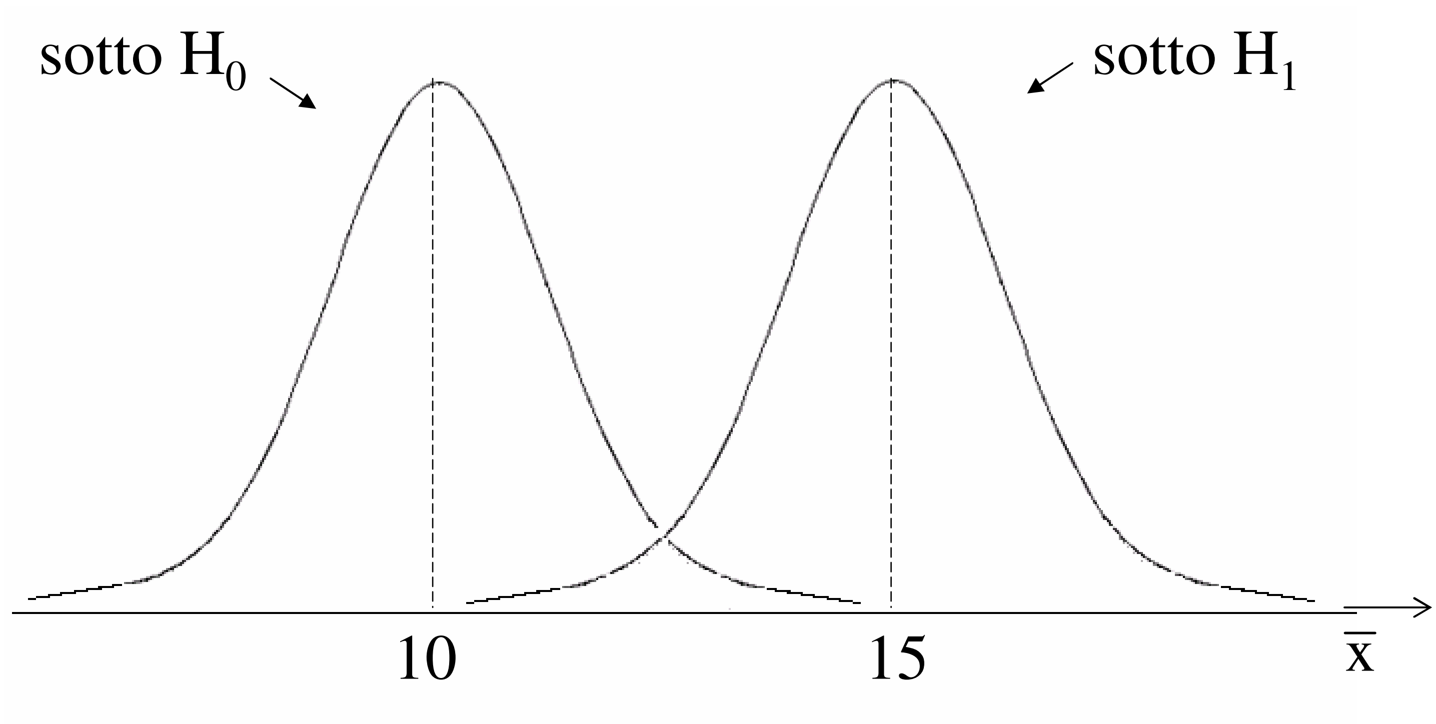
H_0: $\mu=10$ contro H_1: $\mu=15$

Consideriamo la STATISTICA TEST media campionaria; sappiamo che:

$$\text{sotto} \quad H_0 \quad \overline{X} \sim N\left(10, \tfrac{1}{20}\right)$$

$$\text{sotto} \quad H_1 \quad \overline{X} \sim N\left(15, \tfrac{1}{20}\right)$$

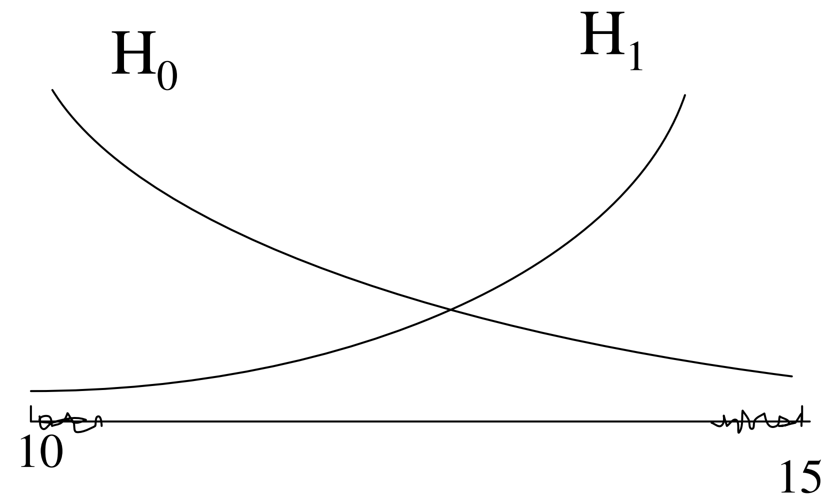
Graficamente si ha:



1. Osservato il valore della media campionaria

$$\text{se } \bar{x} \text{ è "vicino" a } 15 \Rightarrow \text{rif. } H_0$$

$$\text{se } \bar{x} \text{ è "vicino" a } 10 \Rightarrow \text{acc. } H_0$$



2. Possibili eventi tra 10 e 15 sono:

G_1: accetto H_0 e H_0 è vera;
G_2: rifiuto H_0 e H_0 è falsa;
E_1: rifiuto H_0 e H_0 è vera;
E_2: accetto H_0 e H_0 è falsa.

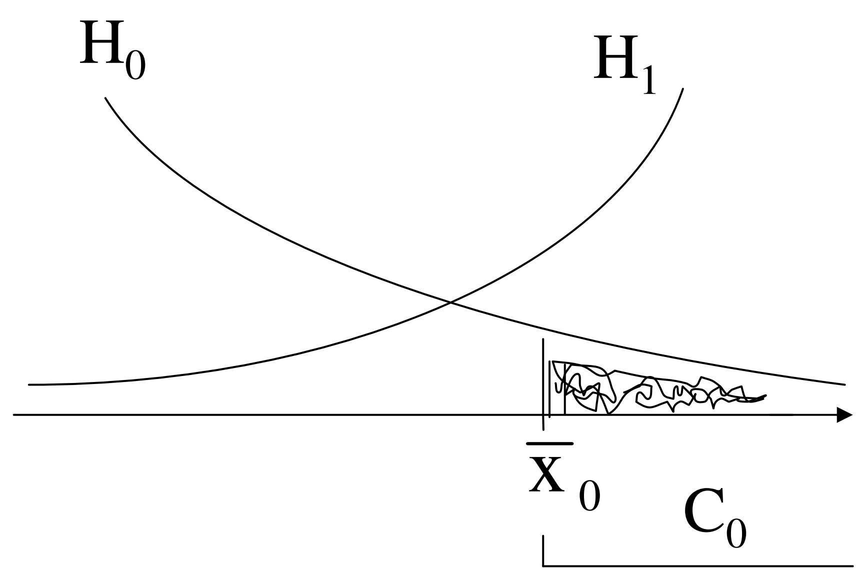
3. Problema: costruire una regione (critica) C_0 tale che:

$$\text{se } \bar{x} \in C_0 \Rightarrow \text{rifiuto } H_0$$

significa individuare, con qualche criterio, un punto (detto punto critico) tra 10 e 15 in modo tale che:

$$\text{se } \bar{x} \geq \bar{x}_0 \Rightarrow \bar{x} \in C_0$$

$$\text{se } \bar{x} < \bar{x}_0 \Rightarrow \bar{x} \notin C_0$$



Fissato α, sappiamo che $\alpha = P_r\{\mathbf{X} \in C_0 / H_0\}$

Nel caso dell'esempio, fissato α, si ha:

$$\alpha = P_r\{\overline{X} \geq \overline{x}_0 / H_0\} = 1 - P_r\{\overline{X} < \overline{x}_0 / H_0\} =$$

$$= 1 - P_r\left\{\frac{\overline{X} - 10}{1/\sqrt{20}} < \frac{\overline{x}_0 - 10}{1/\sqrt{20}}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{\overline{x}_0 - 10}{1/\sqrt{20}}\right) = 1 - \Phi(z_0)$$

dove

$$z_0 = \frac{\overline{x}_0 - 10}{1/\sqrt{20}}$$

Si individua dalle tavole della N(0,1)

Il punto critico è dato da:

$$\overline{x}_0 = 10 + \frac{z_0}{\sqrt{20}}$$

E' il confine tra la Regione Critica e la Regione di Accettazione.

Fasi per la costruzione di un Test di Significatività:

1. Si formulano le ipotesi;
2. Si individua la statistica test;
3. Si fissa il livello di significatività;
4. Si determinano i punti critici;
5. Si costruisce la regione critica;
6. Si estrae il campione e si verifica se il valore della statistica test appartiene oppure non appartiene alla regione critica;
7. Si decide se accettare o rifiutare l'ipotesi nulla.

TEST sui parametri di una v.c. NORMALE

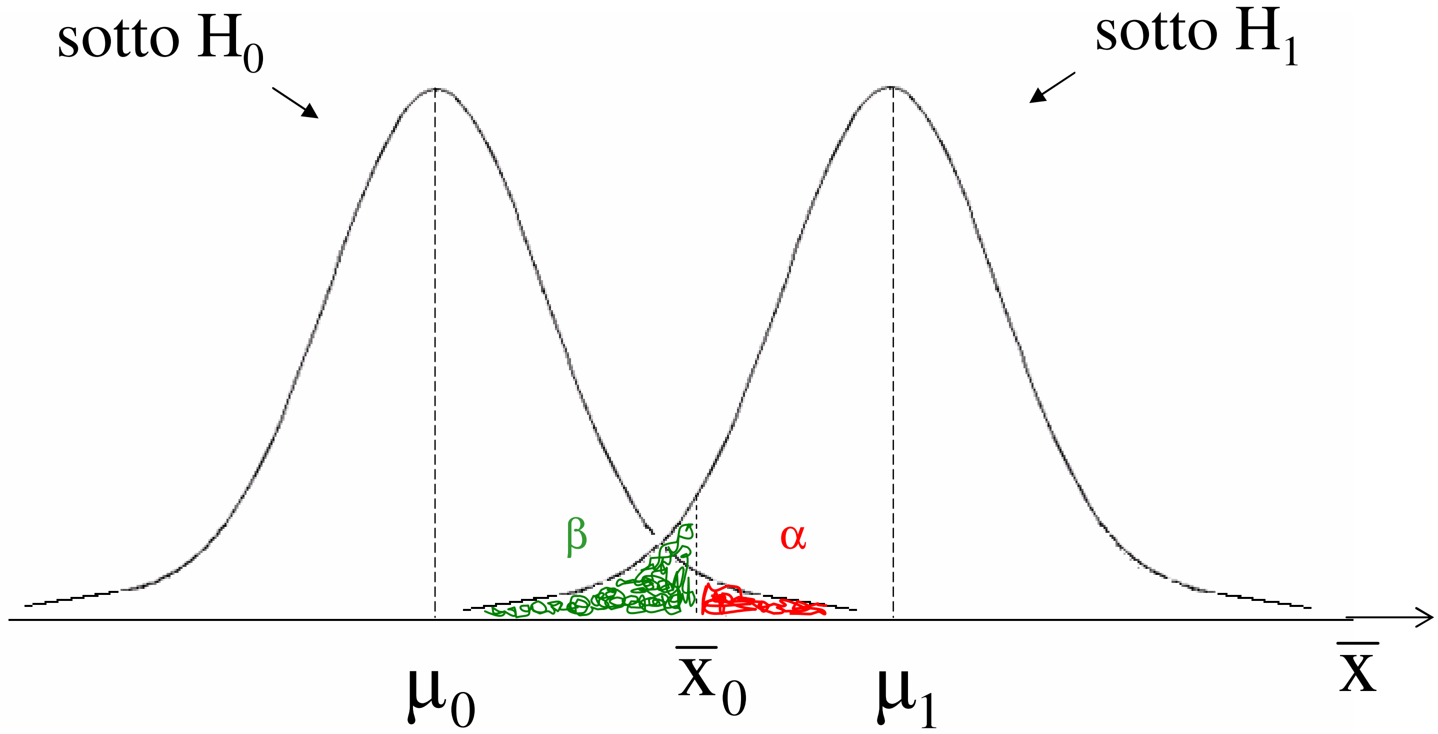
Dato un c.c. iid di dimensione n, estratto da un v.c. $N(\mu,\sigma^2_0)$,
si vuole verificare se

H_0: $\mu = \mu_0$ contro H_1: $\mu = \mu_1$ con $\mu_0 < \mu_1$

La STATISTICA TEST media campionaria è tale che

$$\text{sotto} \quad H_0 \quad \overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$$

$$\text{sotto} \quad H_1 \quad \overline{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$$


sotto H_0
sotto H_1
β
α
μ_0
$\bar{x}_0$
μ_1
$\bar{x}$

Fissato α, determiniamo il punto critico

$$\alpha = P_r\left\{\overline{X} \geq \overline{x}_0 / H_0\right\} = 1 - P_r\left\{\overline{X} < \overline{x}_0 / H_0\right\} =$$

$$= 1 - P_r\left\{\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \frac{\overline{x}_0 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{\overline{x}_0 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi(z_\alpha)$$

dove

$$z_\alpha = \frac{\overline{x}_0 - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$$

si individua dalle tavole della N(0,1)

Da quest'ultima il punto critico risulta essere:

$$\bar{x}_0 = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

E, quindi, la regione critica è:

$$C_0 = \{\bar{x} : \bar{x} > \bar{x}_0\} = \left\{\bar{x} : \bar{x} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right\}$$

Osservato il campione, si calcola la media campionaria

$$\text{se}\ \bar{x} > \bar{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \text{rifiuto}\ H_0$$

$$\text{se}\ \bar{x} \le \bar{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \text{accetto}\ H_0$$

Calcolo della probabilità d'errore di II tipo:

$$\beta = P_r\left\{\overline{X} \notin C_0/H_1\right\} = P_r\left\{\overline{X} < \overline{x}_0/H_1\right\} =$$

$$= P_r\left\{\frac{\overline{X} - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \frac{\overline{x}_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right\} = P_r\left\{Z < z_\beta\right\} = \Phi\left(z_\beta\right)$$

Dato che μ_1 e σ_0 sono per ipotesi noti

$\overline{x}_0$ è stato calcolato in precedenza

allora z_β è noto, quindi, dalle tavole possiamo calcolare β.

Calcolo della potenza del test:

$$K = 1 - \beta = P_r\left\{\text{rifiutare} \;\; H_0 / H_0 \;\; \text{è falsa}\right\} =$$

$$= P_r\left\{\overline{X} > \overline{x}_0 / H_1\right\} = P_r\left\{\frac{\overline{X} - \mu_1}{\sigma_0 / \sqrt{n}} > \frac{\overline{x}_0 - \mu_1}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right\} =$$

$$= P_r\left\{Z > z_\beta\right\} = 1 - \Phi\left(z_\beta\right)$$

dove

$$z_\beta = \frac{\overline{x}_0 - \mu_1}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$$

Si evidenzia che i due errore, α e β, sono legati da una relazione inversa:
- al diminuire di α, il punto critico si sposta a destra
  e, quindi, β aumenta;
- al diminuire di β, il punto critico si sposta a sinistra
  e, quindi, α aumenta

Per diminuire contemporaneamente i due errori, bisogna aumentare la dimensione campionaria; infatti abbiamo:

$$\alpha = P_r\left\{\overline{X} \geq \overline{x}_0 / H_0\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{\overline{x}_0 - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi(z_\alpha)$$

dove $\quad z_\alpha = \dfrac{\overline{x}_0 - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$

Dato che il punto critico è maggiore di μ_0,
all'aumentare di n, z_α aumenta e, quindi, $\Phi(z_\alpha)$ aumenta.
Di conseguenza, α diminuisce.

Al contrario, per l'errore di secondo tipo, si ha:

$$\beta = P_r\{\overline{X} < \overline{x}_0 / H_1\} = P_r\left\{\frac{\overline{X} - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \frac{\overline{x}_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right\} = \Phi(z_\beta)$$

dove

$$z_\beta = \frac{\overline{x}_0 - \mu_1}{\sigma_0}\sqrt{n}$$

Dato che il punto critico è minore di μ_1,
all'aumentare di n, z_β diminuisce e, quindi, $\Phi(z_\beta)=\beta$ diminuisce.

TEST sulla media di una v.c. NORMALE

Dato un c.c. iid di dimensione n, estratto da un v.c. $N(\mu,\sigma^2_0)$, si vuole verificare se

$H_0: \mu = \mu_0$ contro $H_1: \mu \neq \mu_0$ Alternativa **BILATERALE**

La STATISTICA TEST media campionaria è tale che

$$\text{sotto} \quad H_0 \quad \overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$$

Intuitivamente rifiutiamo H_0 per valori della media campionaria molto più grandi di μ_0 oppure molto più piccoli di μ_0.

In questo caso si individuano due punti critici $\bar{x}_s$ e $\bar{x}_d$

tali che **rifiutiamo** H_0

$$\text{se } \bar{x} \leq \bar{x}_s \quad \text{oppure} \quad \text{se } \bar{x} \geq \bar{x}_d$$

Determinazione dei punti critici.
Fissato l'errore di I tipo, ripartiamo α sulle code in modo tale che:

$$\frac{\alpha}{2} = P_r\left\{\overline{X} \le \overline{x}_s / H_0\right\} = P_r\left\{\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \le \frac{\overline{x}_s - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right\} = \Phi\left(z^s_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = P_r\left\{\overline{X} \ge \overline{x}_d / H_0\right\} = P_r\left\{\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \ge \frac{\overline{x}_d - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right\} = 1 - \Phi\left(z^d_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Dalle tavole della N(0,1), calcoliamo $z^s_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{\alpha}{2}}$ e $z^d_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\overline{x}_s = \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \qquad \overline{x}_d = \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

Regione di rifiuto è data da

$$C_0(\alpha)=\{\bar{x}:\ \bar{x}\le \bar{x}_s\ ,\bar{x}\ge \bar{x}_d\}=$$

$$=\left\{\bar{x}:\ \bar{x}\le \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}\ge \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right\}$$

La regione critica può essere espressa anche nel seguente modo:

$$C_0(\alpha)=\{z_c:\ z_c\le -z_{\frac{\alpha}{2}}\ ,\ z_c\ge z_{\frac{\alpha}{2}}\}$$

dove

$$z_c=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$$

La funzione di potenza del test dipende da μ

$$k(\mu) = P_r\left\{\overline{X} \in C_0(\alpha)/H_i\right\} = P_r\left[\left\{\overline{X} < \overline{x}_s\right\} \cup \left\{\overline{X} > \overline{x}_d\right\}/H_i\right] =$$

$$= P_r\left\{\overline{X} < \overline{x}_s/H_i\right\} + P_r\left\{\overline{X} > \overline{x}_d/H_i\right\} =$$

$$= P_r\left\{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \frac{\overline{x}_s - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right\} + P_r\left\{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} > \frac{\overline{x}_d - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right\} =$$

$$= P_r\left\{Z < \frac{\overline{x}_s - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right\} + P_r\left\{Z > \frac{\overline{x}_d - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right\} =$$

$$= \Phi\left\{\frac{\overline{x}_s - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right\} + 1 - \Phi\left\{\frac{\overline{x}_d - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right\}$$

Esempio

La degenza ospedaliera per il trattamento di una certa malattia per i pazienti della classe di età 20-40 si distribuisce normalmente con media incognita e deviazione standard pari a 2.1.

Posto α=0.01 e n=30, determinare:

a. la zona di rifiuto del test H_0:μ=7 contro H_1:μ>7

b. la potenza del test di cui al punto precedente per μ=7.6; 8.5; 9.

TEST sulla media di una v.c. NORMALE

Dato un c.c. iid di dimensione n, estratto da un v.c. $N(\mu,\sigma^2)$, con varianza sconosciuta, si vuole verificare se

H_0: $\mu = \mu_0$ contro H_1: $\mu \neq \mu_0$ Alternativa **BILATERALE**

La STATISTICA TEST media campionaria è tale che

$$\text{sotto} \quad H_0 \quad \overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Dato che la varianza è sconosciuta, la media campionaria non può essere utilizzata come statistica-test.

Sotto H_0

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

Fissato α, ripartendo l'errore di primo tipo sulle code, si ha:

$$\frac{\alpha}{2} = P_r\left\{\overline{X} \leq \overline{x}_s / H_0\right\} = P_r\left\{\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq \frac{\overline{x}_s - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right\} = P_r\left\{T \leq t^{(s)}_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

$$\frac{\alpha}{2} = P_r\left\{\overline{X} \geq \overline{x}_d / H_0\right\} = P_r\left\{\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq \frac{\overline{x}_d - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right\} = P_r\left\{T \geq t^{(d)}_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

dove

$$t_{\frac{\alpha}{2}}^{(s)} = \frac{\overline{x}_s - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \qquad t_{\frac{\alpha}{2}}^{(d)} = \frac{\overline{x}_d - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Dalle tavole della t-Student si evince che

$$t_{\frac{\alpha}{2}}^{(s)} = -t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \qquad t_{\frac{\alpha}{2}}^{(d)} = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

I punti critici risultano:

$$\overline{x}_s = \mu_0 - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \overline{x}_d = \mu_0 + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

In definitiva la regione critica risulta essere:

$$C_0(\alpha) = \{\bar{x} :\ \bar{x} \le \bar{x}_s\ ,\ \bar{x} \ge \bar{x}_d\} =$$

$$= \left\{\bar{x} :\ \bar{x} \le \mu_0 - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} \ge \mu_0 + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right\}$$

La regione critica può essere espressa anche nel seguente modo:

$$C_0(\alpha) = \left\{t_c :\ t_c \le -t_{\frac{\alpha}{2}}(n\text{-}1),\ t_c \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n\text{-}1)\right\}$$

dove

$$t_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Estratto il campione **x**=($x_1,\ldots,x_n$), si calcola la media campionaria e la varianza campionaria e si verifica se :

$$t_c \in C_0(\alpha) \Rightarrow \text{si rifiuta } H_0$$

Esempio.
Una grande catena nazionale di punti vendita di articoli per la casa effettua una svendita di fine stagione di tosaerba. Il numero di tosaerba vendute durante questa liquidazione, in un campione di dieci negozi, è il seguente:
8, 11, 0, 4, 7, 8, 10, 5, 8, 3.
Vi sono elementi per sostenere, ad un livello di significatività di 0.05, che durante questa svendita in media siano state svendute più di 5 tosaerba per negozio ?   Assumete che il numero di tosaerba sia normalmente distribuito.

Dualità tra Intervalli di Confidenza al 100(1-α)%
e Test di Significatività al livello α.

Dato un c.c. iid di dimensione n, estratto da un v.c. $N(\mu,\sigma^2_0)$, con varianza nota, si vuole verificare se

H_0: $\mu = \mu_0$ contro H_1: $\mu \neq \mu_0$ Alternativa **BILATERALE**

Regione critica

$$C_0(\alpha) = \left\{ \bar{x} : \bar{x} \leq \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \ , \ \bar{x} \geq \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right\}$$

Regione di Accettazione

$$A = \left\{ \bar{x} : \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right\}$$

L'Intervallo di confidenza per μ è:

$$I.C.=\left\{\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad , \quad \bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right\}$$

Se H_0:$\mu=\mu_0$ e μ_0 appartiene all'I.C. allora accettiamo H_0; infatti, si ha:

$$\mu_0 \in I.C. \Rightarrow \left\{\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right\} =$$

$$= \left\{ \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} \notin C_0(\alpha) \Rightarrow \text{accetto } H_0$$

Vale il viceversa.

TEST sulla varianza di una v.c. NORMALE

Dato un c.c. iid di dimensione n, estratto da un v.c. $N(\mu,\sigma^2)$, con media e varianza sconosciute, si vuole verificare se

H_0: $\sigma = \sigma_0$ contro H_1: $\sigma > \sigma_0$ Alternativa **UNILATERALE**

In tale contesto, sotto H_0 sappiamo che

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Fissato α, la regione critica è:

$$C_0(\alpha) = \left\{V_c : V_c > \chi^2_\alpha(n-1)\right\}$$

dove

$$V_c = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

e

$$\alpha = P_r\left\{V > \chi^2_\alpha(n-1)\right\}$$

Esempio.
Si consideri una popolazione statistica adattata da una v.v. Normale con media e varianza incognite. Si estrae un c.c. di numerosità n=16
E si determina il valore della varianza campionaria, $s^2=25$.
Si sottoponga a test unilaterale l'ipotesi nulla che la varianza della popolazione sia pari a 23 ad un livello di significatività dell'1%.

TEST sulla differenza tra le medie di due v.c. NORMALI

Siano X ed Y due v.c. indipendenti e normalmente distribuite, cioè

$$X \sim N\left(\mu_x, \sigma_x^2\right) \qquad \perp \qquad Y \sim N\left(\mu_y, \sigma_y^2\right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\mathbf{X}_{(m\times 1)} \qquad \perp \qquad \mathbf{Y}_{(n\times 1)}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x^2}{m}\right) \qquad \perp \qquad \overline{Y} \sim N\left(\mu_y, \frac{\sigma_y^2}{n}\right)$$

Posto $\delta=\mu_x-\mu_y$ si vuole costruire il seguente test

$$H_0: \delta = 0 \qquad \text{contro} \qquad H_0: \delta \neq 0$$

Primo caso: σ_x^2 e σ_y^2 note

Stimatore naturale della differenza tra le medie $D = \bar{X} - \bar{Y}$

Abbiamo visto che: $E(D) = \mu_x - \mu_y$

$$V(D) = \frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}$$

Sotto H_0

$$D \sim N\left(0\ ,\ \frac{\sigma_x^2}{m}+\frac{\sigma_y^2}{n}\right)$$

Rifiutiamo H_0 se i valori di D sono molto diversi dallo zero.

Fissato α, calcoliamo i punti critici:

$$\frac{\alpha}{2} = P_r\{D \leq d_s / H_0\} = P_r\left\{\frac{D}{\sqrt{V(D)}} \leq \frac{d_s}{\sqrt{V(D)}}\right\} = P_r\{Z \leq z^{(s)}\}$$

$$\frac{\alpha}{2} = P_r\{D \geq d_d / H_0\} = P_r\left\{\frac{D}{\sqrt{V(D)}} \geq \frac{d_d}{\sqrt{V(D)}}\right\} = P_r\{Z \geq z^{(d)}\}$$

dove

$$z^{(s)} = \frac{d_s}{\sqrt{V(D)}} = \frac{d_s}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}}} \qquad z^{(d)} = \frac{d_d}{\sqrt{V(D)}} = \frac{d_d}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}}}$$

Dalle tavole della N(0,1), si ha:

$$z^{(s)} = -z_{\frac{\alpha}{2}} \qquad\qquad z^{(d)} = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

Sostituendo otteniamo i punti critici:

$$d_s = -z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}} \qquad\qquad d_d = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}}$$

La regione critica è data da:

$$C_0(\alpha) = \{d :\ d \le d_s \ ,\ d \ge d_d \ \}$$

con $\quad d = \bar{x} - \bar{y}$

Secondo caso: varianze sconosciute ma uguali $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$

Stimatore naturale della differenza tra le medie $D = \overline{X} - \overline{Y}$

Si ha, inoltre, che

$$E(D) = \mu_x - \mu_y \qquad V(D) = \frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n} = \sigma^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$$

Sotto H_0 la quantità

$$Z = \frac{D}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{m} + \dfrac{\sigma_y^2}{n}}} = \frac{D}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}} \sim N(0,1)$$

non è una statistica – test perché σ è un parametro sconosciuto.

Per quanto detto nelle lezioni sugli Intervalli di confidenza, la quantità

$$T = \frac{D - \left(\mu_x - \mu_y\right)}{S_p \times \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$$

dove

$$S_p^2 = \frac{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}{(m+n-2)}$$

Sotto H_0 la quantità

$$T = \frac{D}{S_p \times \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$$

è una statistica –test per verificare le ipotesi

$$H_0 : \delta = 0 \qquad \text{contro} \qquad H_0 : \delta \neq 0$$

con $\delta=\mu_x-\mu_y$.

Fissato α, calcoliamo i punti critici:

$$\frac{\alpha}{2} = P_r\{D \le d_s / H_0\} = P_r\left\{\frac{D}{S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \le \frac{d_s}{s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\right\} = P_r\{T \le t^{(s)}\}$$

$$\frac{\alpha}{2} = P_r\{D \ge d_d / H_0\} = P_r\left\{\frac{D}{S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \ge \frac{d_d}{s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\right\} = P_r\{T \ge t^{(d)}\}$$

dove

$$t^{(s)} = \frac{d_s}{s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \qquad t^{(d)} = \frac{d_d}{s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$$

Dalle tavole della t-Student, si ha:

$$t^{(s)} = -t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2) \qquad\qquad t^{(d)} = t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$$

Sostituendo otteniamo i punti critici:

$$d_s = -t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2) \times s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$$

$$d_d = t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2) \times s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$$

La regione critica è data da:

$$C_0(\alpha) = \{d : d \le d_s \ , \ d \ge d_d \}$$

con $d = \overline{x} - \overline{y}$

Esempio.
Per provare l'utilità terapeutica di due nuovi farmaci, A e B, un gruppo di ricercatori sperimenta entrambi su un gruppo casuale di 10 soggetti. I risultati sperimentali, misurati utilizzando un determinato indice, sono I seguenti:

farmaco A: 25, 46, 39, 60, 24, 23, 38, 42, 50, 46

farmaco B: 43, 29, 38, 51, 44, 28, 23, 20, 56, 55

Supponendo che l'utilità terapeutica possa essere adattata statisticamente da distribuzioni normali e che le varianze delle due popolazioni siano uguali, determinare un intervallo di confidenza per la differenza delle utilità terapeutiche medie dei due farmaci al livello di confidenza del 99%. Inoltre, stabilire se la differenza tra le utilità medie è significativamente diversa da zero.