Teoremi Limite

Esercizio 1

Sia $\{X_i\}_{i\geq 1}$ un successione di v.a. indipendenti e con la stessa densità

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{\theta} I_{[0,\theta]}(x), \quad \theta > 0.$$

Mostrare che

$$M_n = \max(X_1,\ldots,X_n) \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta.$$

Più in generale, se $X_1, X_2, \ldots$ è una successione di v.a. i.i.d. con supporto $[a,b]$, si verifichi che

$$M_n \xrightarrow{\mathrm{P}} b.$$

Soluzione:

Per ottenere la funzione di ripartizione di X_i occorre calcolare

$$\int_0^x \frac{1}{\theta} \mathrm{d}u = \frac{x}{\theta}.$$

La funzione di ripartizione è dunque

$$F_{X_i}(x) = \frac{x}{\theta} I_{(0,\theta)}(x) + I_{[\theta,\infty)}(x).$$

Per quanto riguarda M_n abbiamo

$$\begin{aligned}
F_{M_n}(x) &= \mathrm{P}(\max(X_1,\ldots,X_n) \leq x) \\
&= \mathrm{P}(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x) \\
&= \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x) = \left[F_{X_n}(x)\right]^n \\
&= \left(\frac{x}{\theta}\right)^n I_{(0,\theta)}(x) + I_{[\theta,\infty)}(x).
\end{aligned}$$

Per $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(|M_n - \theta| \geq \epsilon) &= 1 - \mathrm{P}(|M_n - \theta| \leq \epsilon) \\
= 1 - \mathrm{P}(\theta - \epsilon \leq M_n \leq \theta + \epsilon) &= 1 - \mathrm{P}(M_n \leq \theta + \epsilon) + \mathrm{P}(M_n \leq \theta - \epsilon).
\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{P}(M_n \leq \theta + \epsilon) = 1$ se $\epsilon > 0$, risulta

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(|M_n - \theta| \geq \epsilon) &= F_{M_n}(\theta - \epsilon) \\
&= \begin{cases} \left(\frac{\theta-\epsilon}{\theta}\right)^n & \text{se } 0 < \epsilon < \theta \\ 0 & \text{se } \epsilon \geq \theta \end{cases}.
\end{aligned}$$

In ogni caso, per $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|M_n - \theta| \geq \epsilon) = 0.$$

Nel caso più generale

$$F_{M_n}(x) = \left[F_{X_i}(x)\right]^n.$$

In maniera simile a prima, se $\epsilon > 0$

$$P(|M_n - b| \geq \epsilon) = F_{M_n}(b - \epsilon) = \left[F_{X_i}(b - \epsilon)\right]^n.$$

Poiché $F_{X_i}(b - \epsilon) < 1$ per $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} P(|M_n - b| \geq \epsilon) = 0.$$

Esercizio 2

Per $n = 1, 2, \ldots$, sia X_n una v.a. con la seguente funzione di probabilità

$$P(X_n = -1/n) = P(X_n = 1/n) = 1/2.$$

Mostrare che la successione di v.a.

$$X_n \xrightarrow{P} 0.$$

Soluzione:
Risulta

$$P(|X_n| \geq \epsilon) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < \epsilon \leq 1/n \\ 0 & \text{se } \epsilon > 1/n \end{cases}.$$

e dunque

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n| \geq \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

Esercizio 3

Per $n = 1, 2, \ldots$, sia X_n una v.a. normalmente distribuita con media μ e varianza σ^2/n. Mostrare che la successione $\{X_n\}_{n \geq 1}$ converge in probabilità a μ per $n \to \infty$.
Più in generale, si supponga che X_n è tale che $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2/n$. Si dimostri che

$$X_n \xrightarrow{P} \mu.$$

Soluzione:
Risulta

$$\begin{aligned} P(|X_n - \mu| \geq \epsilon) &= 1 - P(-\epsilon \leq X_n - \mu \leq \epsilon) \\ &= 1 - P\left(-\frac{\epsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{X_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\epsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) + \Phi\left(-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\ &= 2\Phi\left(-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

È evidente, quindi, che

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - \mu| \geq \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

Riguardo il secondo punto, ricordiamo che la disuguaglianza di Chebyshev implica per $\epsilon > 0$

$$P(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{\epsilon^2}.$$

Dunque

$$P(|X_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

Questo significa che

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - \mu| \geq \epsilon) \leq 0$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - \mu| \geq \epsilon) = 0.$$

Esercizio 4

Per $n = 1, 2, \ldots$, sia X_n una v.a. con la seguente funzione di probabilità

$$p_{X_n}(x) = \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n} I_{\{n,n+1,\ldots\}}(x).$$

Si mostri che

$$X_n/n \xrightarrow{P} \frac{1}{p}.$$

Soluzione:
Riconosciamo che la funzione di probabilità è quella di una binomiale negativa,

$$X_n \sim \text{BinNeg}(n, p).$$

Ora, se X_i ha funzione di probabilità

$$p_{X_i}(x) = p(1-p)^{x-1} I_{\{1,2,\ldots\}}(x),$$

cioè distribuzione geometrica, allora la v.a. $\sum_{i=1}^n X_i$ ha la stessa distribuzione di X_n. Questo si dimostra facilmente col metodo della fgm. Essendo $\mathbb{E}(X_i) = 1/p$, per la legge debole dei grandi numeri

$$X_n/n \xrightarrow{P} \frac{1}{p}.$$

Esercizio 5

Si consideri una successione di v.a. indipendenti e identicamente distribuite con densità

$$f_{X_n}(x) = I_{(0,1)}(x).$$

Mostrare che $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ converge in media quadratica a 1 per $n \to \infty$.

Soluzione:
La funzione di ripartizione di X_i è

$$F_{X_i}(x) = xI_{(0,1)}(x) + I_{[1,\infty)}(x).$$

Per quanto riguarda M_n abbiamo

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= \mathrm{P}(\max(X_1,\ldots,X_n)\le x) \\ &= \mathrm{P}(X_1\le x,\ldots,X_n\le x) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x) = x^n I_{(0,1)}(x) + I_{[1,\infty)}(x). \end{aligned}$$

La funzione di densità del massimo è quindi

$$f_{M_n}(x) = n x^{n-1} I_{(0,1)}(x).$$

I primi due momenti sono dati da

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n) &= \int_0^1 n u^n \mathrm{d}u = \frac{n}{n+1} u^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{n}{n+1} \\ \mathbb{E}(M_n^2) &= \int_0^1 n u^{n+1} \mathrm{d}u = \frac{n}{n+2} u^{n+2}\Big|_0^1 = \frac{n}{n+2}. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(M_n-1)^2\right] &= \mathbb{E}(M_n^2) - 2\mathbb{E}(M_n) + 1 \\ &= \frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1 = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Dunque

$$M_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2} 1.$$

Esercizio 6

Per $n = 2, 3, \ldots$, sia X_n una v.a. con funzione di probabilità

$$\mathrm{P}(X_n = n) = 1/n^2 = 1 - \mathrm{P}(X_n = 1/n).$$

Mostrare che la successione di v.a. $\{X_n\}_{n\ge 1}$ converge in probabilità, ma non in media quadratica a zero per $n\to\infty$.

Soluzione:
Calcoliamo per $\epsilon > 0$

$$\mathrm{P}(|X_n|\ge\epsilon) = \mathrm{P}(X_n \le -\epsilon) + \mathrm{P}(X_n\ge\epsilon) = \mathrm{P}(X_n\ge\epsilon).$$

Se $0<\epsilon\le 1/n$

$$\mathrm{P}(|X_n|\ge\epsilon) = \mathrm{P}(X_n = n) + \mathrm{P}(X_n = 1/n) = 1.$$

Se invece $1/n < \epsilon \le n$

$$\mathrm{P}(|X_n|\ge\epsilon) = \mathrm{P}(X_n = n) = 1/n^2.$$

Per $\epsilon > n$ tale probabilità vale zero.
Dunque

$$\mathrm{P}(|X_n|\ge\epsilon) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0<\epsilon\le 1/n \\ 1/n^2 & \text{se } 1/n<\epsilon\le n \\ 0 & \text{se } \epsilon > n \end{cases}.$$

Al crescere di n, ϵ andrà a collocarsi sicuramente nell'intervallo centrale, che "tende" a coprire l'intero semiasse positivo al crescere di n.
Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n| \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

D'altra parte

$$\mathbb{E}(X_n^2) = n^2 \times \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n^2) = 1 \neq 0$$

e dunque X_n non converge in media quadratica.

Esercizio 7

Per $n = \xi+1, \xi+2, \ldots$ sia X_n una v.a. con distribuzione binomiale di parametri n e λ/n, con $\lambda \in \mathbb{R}^+$ e $\xi = \lfloor \lambda \rfloor$. Si mostri che la successione di v.a. $\{X_n\}_{n>\xi}$ converge in legge, per $n \to \infty$, ad una v.a. con distribuzione di Poisson con parametro λ.

Soluzione:
Conviene studiare la convergenza della funzione generatrice dei momenti. Questa è data da

$$\begin{aligned}
m_{X_n}(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX_n}) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{tk} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mathrm{e}^t \frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left(\mathrm{e}^t \frac{\lambda}{n} + 1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \\
&= \left(1 + \frac{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp[\lambda(\mathrm{e}^t - 1)].
\end{aligned}$$

Questa è la fgm di una v.a. con distribuzione di Poisson di parametro λ, essendo

$$\begin{aligned}
m_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{tk} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \mathrm{e}^t)^k}{k!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \exp[(\lambda \mathrm{e}^t)] = \exp[\lambda(\mathrm{e}^t - 1)].
\end{aligned}$$

Esercizio 8

Dimostrare, utilizzando il teorema del limite centrale, che

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Soluzione:
Sia $\{X_i\}_i$ una sequenza di v.a. indipendenti con distribuzione di Poisson di parametro 1. Si

verifica facilmente usando il metodo della fgm che $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Poisson}(n)$. Ovviamente le X_i hanno varianza finita e possiamo quindi applicare il teorema del limite centrale. Ricordando che S_n ha media e varianza pari a n,

$$Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{D}} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Questo significa in particolare che

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = \Phi(z) \qquad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Per $z = 0$, si ha poi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(0) &= \lim_{n\to\infty} F_{S_n}(n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \\
&= \Phi(0) = 1/2.
\end{aligned}$$

Esercizio 9

Sia $X_n \sim \mathscr{U}(-1/n, 1/n)$ per $n = 1, 2, \ldots$. Si dimostri che X_n converge in distribuzione ed in probabilità.

Soluzione:
Intuitivamente, si vede che la distribuzione limite è la v.a. degenere 0.
Dimostriamo la convergenza in distribuzione prima, usando la fgm. Ricordiamo che se $X \sim \mathscr{U}(a,b)$,

$$m_X(t) = \frac{\mathrm{e}^{bt} - \mathrm{e}^{at}}{t(b-a)}.$$

Nel caso specifico

$$m_{X_n}(t) = \frac{n(\mathrm{e}^{t/n} - \mathrm{e}^{-t/n})}{2t}.$$

Passando al limite

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} m_{X_n}(t) &= \lim_{m\to 0} \frac{\mathrm{e}^{tm} - \mathrm{e}^{-tm}}{2tm} \\
&\overset{H}{=} \lim_{m\to 0} \frac{t\mathrm{e}^{tm} + t\mathrm{e}^{-tm}}{2t} = 1.
\end{aligned}$$

Questa è, in effetti, la fgm della distribuzione limite. Quindi

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0.$$

Essendo la distribuzione limite degenere si ha anche

$$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

Esercizio 10

Siano $U_1, U_2, \ldots$ v.a. indipendenti ed uniformi in $[0,1]$. Determinare in maniera approssimata il più piccolo n intero per cui

$$\mathrm{P}(|\overline{U}_n - 1/2| < 0.02) \geq 0.95$$

dove $\overline{U}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_i$.
(Si ricordi che $0.95 = 1 - 2 \times \Phi(-1.96)$, dove Φ rappresenta la funzione di ripartizione di una normale standard.)

Soluzione:
Risulta

$$\mathbb{E}(\overline{U}_n) = 1/2 \qquad \mathrm{Var}(\overline{U}_n) = 1/(12 \times n).$$

Allora

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(|\overline{U}_n - 1/2| < 0.02) &= \mathrm{P}\left(\frac{|\overline{U}_n - 1/2|}{\sqrt{1/(12\times n)}} < \frac{0.02}{\sqrt{1/(12\times n)}}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(|Z_n| < 0.02\sqrt{12\times n}\right) \approx 1 - 2\times\Phi(-0.02\sqrt{12\times n}). \end{aligned}$$

Pertanto

$$0.02\sqrt{12\times n} > 1.96 \qquad \Longrightarrow \qquad n > \frac{1.96^2}{12\times(0.02)^2} = 800.33$$

e quindi $n = 801$.

Esercizio 11

Sia $Y \sim \Gamma(1, 25)$, cioè

$$f_Y(y) = \frac{1}{24!} y^{24} \mathrm{e}^{-y} I_{(0,\infty)}(y).$$

Calcolare in maniera approssimata $\mathrm{P}(Y \le 20)$.

Soluzione:
È noto che se $X_1, X_2, \ldots \sim \mathrm{Esp}(1)$ con le X_i indipendenti, allora

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(1, n).$$

Usando il teorema del limite centrale

$$\mathrm{P}(S_n \le s) = \mathrm{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \le \frac{s - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{s - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}\right) = \Phi\left(\frac{s-n}{\sqrt{n}}\right).$$

Dunque

$$\mathrm{P}(Y \le 20) \approx \Phi\left(\frac{20-25}{\sqrt{25}}\right) = \Phi(-1) = 0.1587.$$

Esercizio 12 (Weiss 11.62)

Si supponga che una compagnia di assicurazione ha emesso 100 polizze identiche (ed indipendenti), per ognuna delle quali l'ammontare della richiesta di rimborso segue una distribuzione con densità

$$f_{X_i}(x) = (1/1000)\mathrm{e}^{-x/1000} I_{(0,\infty)}(x) \qquad i = 1, \ldots, 100.$$

Il premio pagato è pari al valore atteso del rimborso più un caricamento pari a 100.

Determinare, in maniera approssimata, la probabilità che il rimborso complessivo sia maggiore della somma dei premi incassati.

Soluzione:
Ogni ampiezza di richiesta di rimborso ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1/1000$, cioè $X_i \sim \text{Esp}(\lambda)$ per $i = 1,\ldots,n = 100$. Dunque $\mathbb{E}(X_i) = 1/\lambda$, e $\text{Var}(X_i) = 1/\lambda^2$.
Sia $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ il rimborso complessivo. Risulta

$$\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X_i) = n/\lambda \qquad \text{Var}(S_n) = n\text{Var}(X_i) = n/\lambda^2.$$

Il premio totale incassato è

$$R = n \times (\mathbb{E}(X_i) + 100) = n/\lambda + n \times 100.$$

La probabilità che interessa è

$$\text{P}(S_n > R) = \text{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} > \frac{R - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}\right) = \text{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} > \frac{n \times 100}{\sqrt{n}/\lambda}\right).$$

Usando il teorema del limite centrale

$$\text{P}(S_n > R) \approx 1 - \Phi\left(\frac{n \times 100}{\sqrt{n}/\lambda}\right) = 1 - \Phi\left(100 \times \sqrt{n} \times \lambda\right) = 1 - \Phi(1) = 0.1586$$

Esercizio 13 (Weiss 11.69)
Giorgia e Giulia lavorano presso Starbucks, che, da buona multinazionale, potrebbe licenziare una delle due. Ad ognuna delle due viene chiesto di preparare 40 cappuccini. Se le medie campionarie dei tempi di preparazione differiscono di più di 3 secondi, quella col tempo medio più elevato viene licenziata. Calcolare la probabilità che Giorgia venga licenziata, sapendo che, in media, il tempo di preparazione è lo stesso per entrambe e che la deviazione standard del tempo impiegato da ognuna delle due a preparare un cappuccino è pari a $\sigma = 4$ secondi.

Soluzione:
Siano X_i e Y_i i tempi di preparazione del i-esimo cappuccino per Giulia e Giorgia, con $i = 1,\ldots,n = 40$. Siano, inoltre $\overline{X}_n = 1/n\sum_{i=1}^n X_i$ e $\overline{Y}_n = 1/n\sum_{i=1}^n Y_i$ le medie campionarie.
Sia $\overline{Z}_n = \overline{Y}_n - \overline{X}_n$. Dunque ci interessa calcolare

$$\text{P}(\overline{Z}_n > 3).$$

Poiché $\overline{Z}_n$ è media campionaria di v.a. i.id., la sua versione standardizzata soddisfa il teorema del limite centrale. Media e varianza di $\overline{Z}_n$ sono

$$\mathbb{E}(\overline{Z}_n) = \mathbb{E}(\overline{Y}_n) - \mathbb{E}(\overline{X}_n) = 1/n\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i - X_i) = 0$$
$$\text{Var}(\overline{Z}_n) = \text{Var}(\overline{Y}_n) + \text{Var}(\overline{X}_n) = 2\sigma^2/n.$$

Dunque

$$P(\overline{Z}_n > 3) = P\left(\frac{\overline{Z}_n - \mathbb{E}(\overline{Z}_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\overline{Z}_n)}} > \frac{3 - \mathbb{E}(\overline{Z}_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\overline{Z}_n)}}\right)$$
$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{\overline{Z}_n - \mathbb{E}(\overline{Z}_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\overline{Z}_n)}}\right) = 1 - \Phi(3\sqrt{20}/4) = 0.000398$$

Esercizio 14

Si consideri per $n \leq 2$ la seguente distribuzione congiunta

$$p_{X_n,X}(1/n, 0) = p_{X_n,X}((n-1)/n, 1) = (n-2)/(2n)$$
$$p_{X_n,X}(1/n, 1) = p_{X_n,X}((n-1)/n, 0) = 1/n.$$

Mostrare che

$$X_n \xrightarrow{P} X.$$

Mostrare anche che X_n converge in media a X.

Soluzione:
Calcoliamo la distribuzione di $|X_n - X|$. Conviene però partire dal calcolo della distribuzione di $X_n - X$. Questa v.a. assume 4 valori:

$$1/n; \qquad (n-1)/n - 1 = -1/n; \qquad 1/n - 1 = (1-n)/n; \qquad (n-1)/n.$$

Le rispettive probabilità sono

$$(n-2)/(2n); \qquad (n-2)/(2n); \qquad 1/n; \qquad 1/n.$$

La v.a. $|X_n - X|$ assume solo due valori, invece. In particolare

$$P(|X_n - X| = 1/n) = P(X_n - X = 1/n) + P(X_n - X = -1/n) = (n-2)/n$$
$$P(|X_n - X| = (n-1)/n) = P(X_n - X = (1-n)/n) + P(X_n - X = (n-1)/n) = 2/n.$$

Si osservi che per $n > 2$ abbiamo $1/n < (n-1)/n$.
Sia $\epsilon > 0$. Se $0 < \epsilon \leq 1/n$

$$P(|X_n - X| \geq \epsilon) = P(|X_n - X| = 1/n) + P(|X_n - X| = (n-1)/n) = 1.$$

Se invece $1/n < \epsilon \leq (n-1)/n$

$$P(|X_n - X| \geq \epsilon) = P(|X_n - X| = (n-1)/n) = 2/n.$$

Infine per $\epsilon > (n-1)/n$

$$P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

Quando $n \to \infty$, l'ampiezza del primo intervallo tende a zero. Il secondo intervallo tende invece a $(0,1]$, ma la probabilità tende a zero, $\lim_{n\to\infty} 2/n = 0$. Infine il terzo intervallo, su cui la probabilità vale zero, tende a $(1,\infty)$.

Riassumendo, per ogni $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

e quindi

$$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X.$$

Risulta poi

$$\mathbb{E}(|X_n - X|) = \frac{n-2}{n^2} + 2\frac{n-1}{n^2}.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0.$$

Esercizio 15

Sia per $n \geq 2$ X_n una v.a. con la seguente funzione di probabilità:

$$p_{X_n}(x) = \frac{n-1}{4n} I_{\{0,2\}}(x) + \frac{n+1}{2n} I_{\{1\}}(x).$$

Utilizzare il metodo della funzione generatrice dei momenti per dimostrare che X_n converge in distribuzione.

Soluzione:

$$m_{X_n}(t) = \frac{n-1}{4n}(1+\mathrm{e}^{2t}) + \frac{n+1}{2n}\mathrm{e}^{t}.$$

Passando al limite

$$\lim_{n\to\infty} m_{X_n}(t) = \frac{1}{4}(1+\mathrm{e}^{2t}) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}.$$

Evidentemente la distribuzione limite è

$$p_X(x) = \frac{1}{4} I_{\{0,2\}}(x) + \frac{1}{2} I_{\{1\}}(x).$$

Esercizio 16

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_{240}$ v.a. indipendenti tutte con densità

$$f_X(x) = 3x^2 I_{[0,1]}(x).$$

Determinare un valore approssimato c tale che

$$\mathrm{P}(\sum_{i=1}^{240} X_i \leq c) = 0.99.$$

Soluzione:

Risulta

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 3x^3 \mathrm{d}x = \frac{3}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 3x^4 \mathrm{d}x = \frac{3}{5}x^5\Big|_0^1 = \frac{3}{5}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}.$$

Sia, per $n = 240$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Allora

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n) &= n\mathbb{E}(X) = \frac{3n}{4}\\ \mathrm{Var}(S_n) &= n\mathrm{Var}(X) = \frac{3n}{80}.\end{aligned}$$

Poiché n è ragionevolmente grande

$$\mathrm{P}(S_n \le c) = \mathrm{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \le \frac{c - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{c - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}\right).$$

Sia z_α l'α-esimo percentile della normale standard, cioè $\Phi(z_\alpha) = \alpha$. Allora

$$\frac{c - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} = z_\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad c = \mathbb{E}(S_n) + z_\alpha \sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}.$$

Essendo $z_{0.99} = 2.3263$

$$c = \frac{3}{4} \times 240 + \sqrt{\frac{3}{80} \times 240} \times 2.3263 = 180 + 3 \times 2.3263 = 186.9790$$