Vettori Aleatori Bidimensionali

Esercizio 1 (Weiss 6.1)
Si indichi con X e Y la durata aleatoria di due componenti elettrici identici, ottenuta controllandone il funzionamento a tempi discreti (per esempio ogni ora). La funzione di probabilità congiunta è

$$p_{X,Y}(x,y) = p^2(1-p)^{x+y-2} I_{\{1,2,\ldots\}}(x) I_{\{1,2,\ldots\}}(y).$$

Calcolare

(a) tutte le funzioni di probabilità marginali e condizionate;

(b) $\mathrm{P}(X = Y)$

(c) $\mathrm{P}(X > Y)$

(d) $\mathrm{P}(X - Y > 3)$.

Soluzione: (a)

$$p_X(x) = p(1-p)^{x-1} I_{\{1,2,\ldots\}}(x) \sum_{y=1}^{\infty} p(1-p)^{y-1} = p(1-p)^{x-1} I_{\{1,2,\ldots\}}(x).$$

Quindi $X \sim \mathrm{Geo}(p)$.

Per simmetria anche $Y \sim \mathrm{Geo}(p)$.

Inoltre, si vede subito che X e Y sono indipendenti, e quindi le funzioni di probabilità condizionate coincidono con le marginali.

(b)

$$\mathrm{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X = k, Y = k) = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2k-2}$$
$$= p^2 \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{2k} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p^2}{2p - p^2} = \frac{p}{2-p}.$$

(c) Possiamo procedere in due modi per il calcolo di $\mathrm{P}(X > Y)$.

Osserviamo che, per simmetria, $\mathrm{P}(X > Y) = \mathrm{P}(Y > X)$. Essendo poi

$$1 = \mathrm{P}(X > Y) + \mathrm{P}(Y > X) + \mathrm{P}(X = Y) = 2\mathrm{P}(X > Y) + \mathrm{P}(Y = X),$$

risulta

$$\mathrm{P}(X > Y) = \frac{1 - \mathrm{P}(Y = X)}{2} = \frac{1 - \frac{p}{2-p}}{2} = \frac{1-p}{2-p}.$$

In alternativa, possiamo osservare che

$$\mathrm{P}(X > Y) = \mathrm{P}(Y = 1)\mathrm{P}(X > 1 | Y = 1) + \mathrm{P}(Y = 2)\mathrm{P}(X > 2 | Y = 2) + \ldots$$
$$= \mathrm{P}(Y = 1)\mathrm{P}(X > 1) + \mathrm{P}(Y = 2)\mathrm{P}(X > 2) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(Y = k)\mathrm{P}(X > k),$$

essendo X e Y indipendenti.

Sappiamo che

$$P(Y = k) = p_Y(k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Si tratta ora di calcolare $P(X > k)$ per $k = 1, 2, \ldots$, cioè la funzione di sopravvivenza (uno meno la funzione di ripartizione) di X:

$$\begin{aligned} P(X > k) &= \sum_{j=k+1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} \\ &= p(1-p)^k \sum_{j=0}^{\infty} p(1-p)^j = \frac{p(1-p)^k}{1-(1-p)} = (1-p)^k. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}(1-p)^k = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{2k-1} \\ &= p(1-p)\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{2k} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)}{p(2-p)} = \frac{1-p}{2-p}. \end{aligned}$$

(d) Conviene calcolare la funzione di probabilità di $Z = X - Y$. Chiaramente Z è a valori nell'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Per $y \geq 0$

$$\begin{aligned} P(Z = z) &= \sum_{y=1}^{\infty} P(X = y + z)P(Y = y) \\ &= p^2 \sum_{y=1}^{\infty}(1-p)^{y+z-1}(1-p)^{y-1} = p^2 \sum_{y=1}^{\infty}(1-p)^{2y-2+z} \\ &= p^2(1-p)^z \sum_{y=0}^{\infty}(1-p)^{2y} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2}(1-p)^z = \frac{p}{2-p}(1-p)^z. \end{aligned}$$

Se invece $z < 0$

$$\begin{aligned} P(Z = z) &= \sum_{x=1}^{\infty} P(X = x)P(Y = x - z) \\ &= p^2 \sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1}(1-p)^{x-z-1} = p^2 \sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{2x-2-z} \\ &= p^2(1-p)^{-z} \sum_{x=0}^{\infty}(1-p)^{2x} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2}(1-p)^{-z} = \frac{p}{2-p}(1-p)^{-z}. \end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme

$$p_Z(z) = \frac{p}{2-p}(1-p)^{|z|}.$$

Di conseguenza, la probabilità richiesta è

$$P(X - Y > 3) = P(Z > 3) = \sum_{z=4}^{\infty} \frac{p}{2-p}(1-p)^{|z|} = \frac{p}{2-p}(1-p)^4 \sum_{z=0}^{\infty}(1-p)^z = \frac{(1-p)^4}{2-p}.$$

Esercizio 2
Una macchina produce un numero X di pezzi in un giorno, dove $X \sim \text{Bin}(n,p)$. Ogni pezzo è perfettamente funzionante con probabilità α, indipendentemente dagli altri pezzi. Sia Y il numero di pezzi funzionanti in un giorno. Calcolare

(a) la funzione di probabilità condizionata di Y dato $X = x$;

(b) la funzione di probabilità congiunta di X e Y;

(c) la funzione di probabilità marginale di Y;

(d) la funzione di probabilità condizionata di X dato $Y = y$.

Si identifichino inoltre le funzioni di probabilità ai punti (a) e (c).

Soluzione: (a)
$$Y|X = x \sim \text{Bin}(x,\alpha),$$
cioè
$$p_{Y|X}(y|x) = \binom{x}{y}\alpha^y(1-\alpha)^{x-y}I_{\{0,1,\dots,x\}}(y).$$

(b)
$$\begin{aligned}p_{X,Y}(x,y) = p_{Y|X}(y|x)p_X(x) &= \binom{x}{y}\alpha^y(1-\alpha)^{x-y}I_{\{0,1,\dots,x\}}(y)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}I_{\{0,1,\dots,n\}}(x)\\ &= \binom{x}{y}\alpha^y(1-\alpha)^{x-y}I_{\{y,y+1,\dots,n\}}(x)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}I_{\{0,1,\dots,n\}}(y).\end{aligned}$$

(Si veda Figura 1).

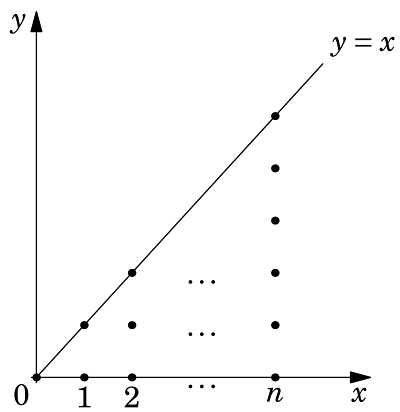

Figura 1: Supporto del vettore aleatorio (X,Y).

(c)

$$\begin{aligned}
p_Y(y) &= I_{\{0,1,\dots,n\}}(y) \sum_{x=y}^{n} \binom{x}{y} \alpha^y (1-\alpha)^{x-y} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= I_{\{0,1,\dots,n\}}(y) \alpha^y \frac{n!}{y!} \sum_{x=y}^{n} \frac{1}{(x-y)!(n-x)!} (1-\alpha)^{x-y} p^x (1-p)^{n-x}
\end{aligned}$$

Sia $k = x - y$. L'estremo inferiore della sommatoria in k è zero, quello superiore $n - y$:

$$\begin{aligned}
p_Y(y) &= I_{\{0,1,\dots,n\}}(y) \alpha^y \frac{n!}{y!} \sum_{k=0}^{n-y} \frac{1}{k!(n-y-k)!} (1-\alpha)^k p^{y+k} (1-p)^{n-y-k} \\
&= I_{\{0,1,\dots,n\}}(y) \alpha^y \frac{n!}{y!(n-y)!} p^y \sum_{k=0}^{n-y} \frac{(n-y)!}{k!(n-y-k)!} [p(1-\alpha)]^k (1-p)^{n-y-k} \\
&= I_{\{0,1,\dots,n\}}(y) \alpha^y \frac{n!}{y!(n-y)!} p^y [p(1-\alpha) + (1-p)]^{n-y} \\
&= \binom{n}{y} (p\alpha)^y [1 - p\alpha]^{n-y} I_{\{0,1,\dots,n\}}(y).
\end{aligned}$$

Quindi $Y \sim \mathrm{Bin}(n, p\alpha)$.

(d)

$$\begin{aligned}
p_{X|Y}(x|y) &= \frac{\binom{x}{y} \alpha^y (1-\alpha)^{x-y} I_{\{y,y+1,\dots,n\}}(x) \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} I_{\{0,1,\dots,n\}}(y)}{\binom{n}{y} (p\alpha)^y [1-p\alpha]^{n-y} I_{\{0,1,\dots,n\}}(y)} \\
&= \frac{(n-y)!}{(x-y)!(n-x)!} (1-p)^{n-x} [p(1-\alpha)]^{x-y} (1-p\alpha)^{y-n} I_{\{y,y+1,\dots,n\}}(x) \\
&= \binom{n-y}{n-x} (1-p)^{n-x} [p(1-\alpha)]^{x-y} (1-p\alpha)^{y-n} I_{\{y,y+1,\dots,n\}}(x).
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Si consideri la seguente funzione di densità

$$f_{X,Y}(x,y) = 6(y-x) I_{(0,1)}(x) I_{(x,1)}(y).$$

Determinare le densità marginali e

$$\mathrm{P}(1/2 < Y < 3/4 | X = 1/2).$$

Soluzione:
Il supporto del vettore aleatorio è dato da (vedere Figura 2)

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, x < y < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y, 0 < y < 1\}$$

Allora

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= I_{(0,1)}(x) \int_x^1 6(y-x) \mathrm{d}y = I_{(0,1)}(x) \left(6\frac{y^2}{2} - 6xy \right) \Bigg|_{y=x}^{y=1} \\
&= I_{(0,1)}(x)(3 - 6x + 3x^2) = 3(1-x)^2 I_{(0,1)}(x).
\end{aligned}$$

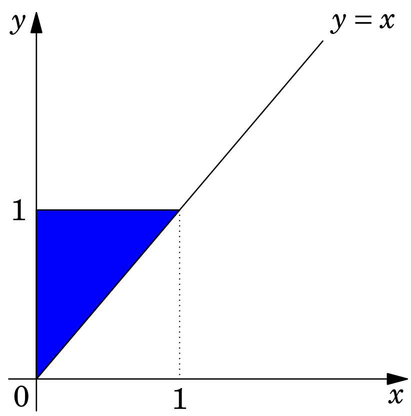

Figura 2: Supporto del vettore aleatorio (X,Y).

Inoltre

$$f_Y(y) = I_{(0,1)}(y)\int_0^y 6(y-x)\mathrm{d}x = I_{(0,1)}(y)\left(6xy - 6\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x=y}^{x=0}$$
$$= 3y^2 I_{(0,1)}(y).$$

Per il calcolo della probabilità richieta occorre la densità condizionata di Y dato $X = x$:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2(y-x)}{(1-x)^2} I_{(x,1)}(y).$$

In particolare la densità condizionata di Y dato $X = 1/2$ è

$$f_{Y|X}(y|1/2) = \frac{2(y-1/2)}{(1/2)^2} I_{(1/2,1)}(y) = (8y-4)I_{(1/2,1)}(y).$$

La probabilità richiesta è data da

$$\int_{1/2}^{3/4} f_{Y|X}(y|1/2)\,\mathrm{d}y = \int_{1/2}^{3/4}(8y-4)\mathrm{d}y = 4y^2 - 4y\Big|_{1/2}^{3/4} = 1/4.$$

Esercizio 4 (Weiss 9.73)
Successivamente ad un incendio, una compagnia di assicurazione fornisce una stima iniziale X dell'ammontare del risarcimento. Effettuata la richiesta, la compagnia paga al richiedente l'ammontare Y. Supponendo che la stima iniziale sia 2, determinare la probabilità che l'esborso finale sia compreso tra 1 e 3, nell'ipotesi che la densità congiunta di X e Y è

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{2}{x^2(x-1)} y^{-(2x-1)/(x-1)} I_{(1,\infty)}(x) I_{(1,\infty)}(y).$$

Soluzione:
Determiniamo prima di tutto la marginale di X:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= I_{(1,\infty)}(x)\int_1^\infty \frac{2}{x^2(x-1)} y^{-(2x-1)/(x-1)}\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{x^2(x-1)} I_{(1,\infty)}(x)\int_1^\infty \left[\frac{1}{1-\frac{2x-1}{x-1}} y^{1-\frac{2x-1}{x-1}}\right]_{y=1}^{y\to\infty} \\
&= \frac{2}{x^2(x-1)} I_{(1,\infty)}(x)\int_1^\infty \left[-\frac{x-1}{x} y^{-\frac{x}{x-1}}\right]_{y=1}^{y\to\infty} \\
&= \frac{2}{x^2(x-1)} I_{(1,\infty)}(x)\frac{x-1}{x} = \frac{2}{x^3} I_{(1,\infty)}(x).
\end{aligned}
$$

La densità condizionata di Y dato $X = x$ è quindi

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{2}{x^2(x-1)} y^{-(2x-1)/(x-1)}}{\frac{2}{x^3}} I_{(1,\infty)}(y) = \frac{x}{x-1} y^{-(2x-1)/(x-1)} I_{(1,\infty)}(y)$$

e per $x = 2$

$$f_{Y|X}(y|2) = 2y^{-3} I_{(1,\infty)}(y).$$

la probabilità richiesta è

$$\mathrm{P}(1 < Y < 3|X = 2) = \int_1^3 2y^{-3}\mathrm{d}y = -y^{-2}\big|_1^3 = 1-(1/3)^2 = 8/9.$$

Esercizio 5 (Weiss 9.65)

Siano X e Y le coordinate di un punto scelto a caso nella metà superiore del cerchio di raggio 1. Determinare densità congiunta, marginali e condizionate.

Soluzione:
Il supporto del vettore aleatorio è dato da (vedere Figura 3)

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, 0 < y < \sqrt{1-x^2}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{1-y^2} < x < \sqrt{1-y^2}, 0 < y < 1\}$$

La densità congiunta è

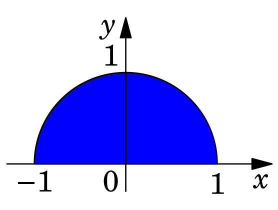

Figura 3: Supporto del vettore aleatorio (X,Y).

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\text{Area Semicerchio}} I_{(-1,1)}(x) I_{(0,\sqrt{1-x^2})}(y) = \frac{2}{\pi} I_{(-1,1)}(x) I_{(0,\sqrt{1-x^2})}(y).$$

Le due marginali sono

$$f_X(x) = I_{(-1,1)}(x)\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi}\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}I_{(-1,1)}(x)$$

e

$$f_X(x) = I_{(0,1)}(y)\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{\pi}\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}I_{(0,1)}(y).$$

La densità condizionata di Y dato $X = x$ è

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}I_{(0,\sqrt{1-x^2})}(y).$$

La densità condizionata di X dato $Y = y$ è

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}I_{(-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2})}(x).$$

Quindi

$$Y|X = x \sim \mathscr{U}(0,\sqrt{1-x^2}) \qquad X|Y = y \sim \mathscr{U}(-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2}).$$

Esercizio 6 (Weiss 9.69)
Siano X e Y le coordinate di un punto scelto a caso nel triangolo di vertici $(0,1)$, $(1,0)$ e $(1,1)$. Determinare densità congiunta, marginali e condizionate. Fare lo stesso nel caso si scelga X uniformemente in $(0,1)$ e successivamente Y in $(0,X)$.

Soluzione:
In entrambi i casi il supporto del vettore (X,Y) è (vedere Figura 4)

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y < x < 1, 0 < y < 1\}$$

Nel primo caso la densità congiunta vale uno diviso l'area del triangolo per i valori del

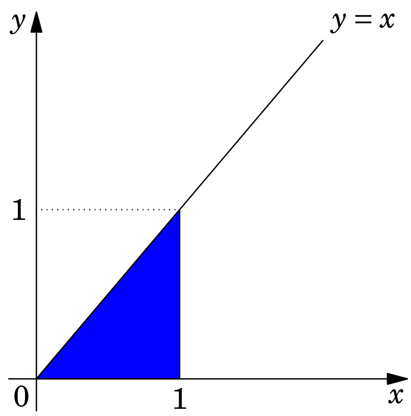

Figura 4: Supporto del vettore aleatorio (X,Y).

supporto e zero altrove. Quindi

$$f_{X,Y}(x,y) = 2I_{(0,1)}(x)I_{(0,x)}(y) = 2I_{(y,1)}(x)I_{(0,1)}(y).$$

Le marginali sono

$$f_X(x) = 2I_{(0,1)}(x)\int_0^x \mathrm{d}y = 2xI_{(0,1)}(x)$$
$$f_Y(y) = 2I_{(0,1)}(y)\int_y^1 \mathrm{d}x = 2(1-y)I_{(0,1)}(y).$$

Le densità condizionate son invece

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x}I_{(0,x)}(y)$$
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{1-y}I_{(y,1)}(x).$$

Questo significa che

$$Y|X = x \sim \mathscr{U}(0,x) \qquad X|Y = y \sim \mathscr{U}(y,1).$$

Nel secondo caso si ha invece

$$f_X(x) = I_{(0,1)}(x) \qquad f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x}I_{(0,x)}(y).$$

Di conseguenza

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x) = \frac{1}{x}I_{(0,1)}(x)I_{(0,x)}(y) = \frac{1}{x}I_{(y,1)}(x)I_{(0,1)}(y).$$

La marginale di Y è

$$f_Y(y) = I_{(0,1)}(y)\int_y^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \log x|_y^1 I_{(0,1)}(y) = -\log y I_{(0,1)}(y).$$

Infine la densità condizionata di X dato $Y = y$ è

$$f_{X|Y}(x|y) = -\frac{1}{x\log y}I_{(y,1)}(x).$$

Esercizio 7

Si considerino le v.a. con la seguente funzione di densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \mathrm{e}^{-x-y}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y).$$

Determinare la densità e la funzione generatrice dei momenti di $Z = 2X - Y$.

Soluzione:
Dal calcolo delle marginali,

$$f_X(x) = \mathrm{e}^{-x}I_{(0,\infty)}(x) \qquad f_Y(y) = \mathrm{e}^{-y}I_{(0,\infty)}(y)$$

si vede subito che X e Y sono indipendenti ed esponenziali di parametro 1.

Siano ora $U = 2X$ e $W = -Y$ di modo che $Z = U + W$.
Determiniamo la distribuzione di U e W. Usando la formula per trasformazioni monotone della v.a. X

$$f_{g(X)}(y) = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y)\right| f_X\left(g^{-1}(y)\right).$$

troviamo

$$f_U(u) = f_X(u/2)/2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u/2} I_{(0,\infty)}(u)$$
$$f_W(w) = f_Y(-w) = \mathrm{e}^{w} I_{(-\infty,0)}(w).$$

Possiamo a questo punto usare la formula di convoluzione:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(u) f_W(z-u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{z-3u/2} I_{(0,\infty)}(u) I_{(-\infty,0)}(z-u)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Quindi l'integrale è certamente non nullo nella regione

$$\{0 < u < \infty, -\infty < z < u\}.$$

Possiamo descrivere questa regione anche come

$$\{0 < u < \infty, -\infty < z < 0\} \cup \{z < u < \infty, 0 \le z < \infty\}$$

cioè come unione del quarto quadrante del piano (u,z) e della regione compresa tra l'asse delle ascisse e la bisettrice del primo e terzo quadrante, si veda Figura 5.

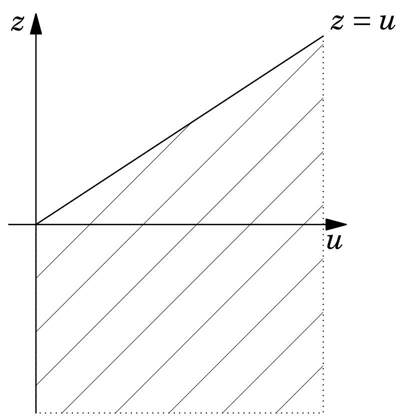

Figura 5: Piano (u,z).

Ritornando all'integrale:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= I_{(-\infty,0)}(z)\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{z-3u/2}\mathrm{d}u + I_{[0,\infty)}(z)\int_z^{+\infty} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{z-3u/2}\mathrm{d}u \\ &= I_{(-\infty,0)}(z)\left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{z-3u/2}\right]_0^{+\infty} + I_{[0,\infty)}(z)\left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{z-3u/2}\right]_z^{+\infty} \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{z} I_{(-\infty,0)}(z) + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-z/2} I_{[0,\infty)}(z). \end{aligned}$$

Quella calcolata è in effetti una valida funzione di densità, in quanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^z\Big|_{-\infty}^{0} - 2\mathrm{e}^{-z/2}\Big|_{0}^{+\infty} \right] = \frac{1}{3}[1+2] = 1.$$

La funzione generatrice dei momenti può essere calcolata usando la densità appena calcolata oppure sfrattando l'indipendenza tra X e Y (e quindi tra U e W).
Col primo metodo troviamo

$$m_Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{tz} f_Z(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{z(t+1)}\mathrm{d}z + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{z(t-1/2)}\mathrm{d}z\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{\mathrm{e}^{z(t+1)}}{t+1}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{\mathrm{e}^{z(t-1/2)}}{(t-1/2)}\Big|_{0}^{+\infty} \right].$$

Il primo integrale converge per $t > -1$, il secondo per $t < 1/2$. Di conseguenza $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{tz} f_Z(z)\,\mathrm{d}z$ esiste finito per $-1 < t < 1/2$ e quindi la fgm esiste ed è uguale a

$$m_Z(t) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1/2}\right] = \frac{1}{(t+1)(1-2t)}.$$

Usando l'indipendenza tra U e W:

$$m_Z(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t(U+W)}) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tU})\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tW}) = m_U(t)\,m_W(t).$$

Ora, però,

$$m_U(t) = m_{2X}(t) = m_X(2t) = \frac{1}{1-2t} \qquad \text{per } t < 1/2$$

e

$$m_W(t) = m_{-Y}(t) = m_Y(-t) = \frac{1}{1+t} \qquad \text{per } t > -1\,.$$

Ritroviamo quindi che per $-1 < t < 1/2$

$$m_Z(t) = \frac{1}{(t+1)(1-2t)}.$$

Disuguaglianza di Chebyshev

Esercizio 8

Sia X una variabile aleatoria con $\mathbb{E}(X) = 0$ e $\mathrm{Var}(X) = 1$. Si determini il più piccolo intero k tale che

1. $\mathrm{P}(|X| \geq k) \leq .01$
2. $\mathrm{P}(|X| \geq k) \leq .005$

Soluzione:
La disuguaglianza di Chebyshev assicura che

$$\mathrm{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq k\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right) = \mathrm{P}(|X| \geq k) \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{per ogni } k > 0.$$

1. $$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad k = 10$$
2. $$k = \left\lceil \sqrt{\frac{1}{.005}} \right\rceil = 15$$

Esercizio 9

Sia S_n la variabile aleatoria per il numero di successi in n prove indipendenti e la probabilità di successo in ogni prova è $p \in (0,1)$. Mostrare che

1. $$\mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \quad \text{per ogni } \epsilon > 0.$$
2. $$\mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2} \quad \text{per ogni } \epsilon > 0.$$
   (Suggerimento: calcolare il massimo della funzione $f(p) = p(1-p)$ per $p \in (0,1)$)

Soluzione:
S_n ha distribuzione binomiale con parametri n e p. Dunque

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = \frac{np}{n} = p$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(S_n) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

1. La disuguaglianza di Chebyshev assicura che per $\epsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\epsilon^2}.$$

   Quindi

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \quad \text{per ogni } \epsilon > 0.$$

2. Il punto di massimo della funzione $f(p) = p(1-p)$ in $(0,1)$ è $p = 1/2$. Dunque

$$f(p) = p(1-p) \leq f(1/2) = 1/4 \quad \text{per ogni } p \in (0,1)$$

   e per $\epsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}.$$

Esercizio 10
Mostrare che per ogni variabile aleatoria con valore atteso finito μ

1. $$P(|X-\mu| \geq k) \leq \frac{1}{k}\mathbb{E}(|X-\mu|).$$

   per $k > 0$;

2. $$P(D \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\mu^2 a^2},$$

   essendo $D = \left|\frac{X-\mu}{\mu}\right|$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) < \infty$ e $\mu \neq 0$.

Soluzione:
Se $g(\cdot)$ è una funzione non-negativa allora per $k > 0$

$$P[g(X) \geq k] \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{k}.$$

1. È sufficiente considerare la funzione non-negativa $g(x) = |x - \mathbb{E}(X)|$ per ottenere il risultato richiesto.
2. Poniamo $g(x) = \left(\frac{x-\mu}{\mu}\right)^2$ e $k = a^2$. Allora

$$P\left[\left(\frac{X-\mu}{\mu}\right)^2 \geq a^2\right] = P(D \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\mu}\right)^2\right]}{a^2} = \frac{\sigma^2}{\mu^2 a^2}.$$

Esercizio 11
Mostrare che la disuguaglianza di Chebyshev è la migliore possibile, nel

senso che per ogni $k > 0$ è sempre possibile trovare una variabile aleatoria X con valore atteso μ e varianza σ^2 per cui si ha

$$P\left(|X-\mu| \geq k\right) = \frac{\sigma^2}{k^2},$$

per cui cioè l'estremo superiore della disuguaglianza di Chebyshev viene raggiunto.

Soluzione:
Un esempio molto semplice è dato dalla v.a. con funzione di probabilità

$$p_X(x) = \frac{1}{2} I_{\{-k\}}(x) + \frac{1}{2} I_{\{k\}}(x).$$

Allora

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \times (-k) + \frac{1}{2} \times k = 0$$
$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2} \times k^2 + \frac{1}{2} \times k^2 = k^2.$$

Quindi

$$P\left(|X-\mu| \geq k\right) = P(|X| \geq k)$$
$$= P(X = -k) + P(X = k) = 1 = \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

Esercizio 12

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti e S_n la loro somma. Siano $m_k = \mathbb{E}(X_k)$, $\sigma_k^2 = \text{Var}(X_k)$ e $M_n = \sum_{k=1}^n m_k$. Si supponga $\sigma_k^2 < R \ \forall k$ e si dimostri che, per ogni $\epsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{M_n}{n}\right| < \epsilon\right) \to 1$$

quando $n \to \infty$

Soluzione:
Risulta

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \frac{M_n}{n};$$
$$\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\text{Var}(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \sigma_k^2 < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n R = \frac{R}{n}.$$

Usando la disuguaglianza di Chebyshev , abbiamo per $\epsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{M_n}{n}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\epsilon^2} < \frac{R}{n\epsilon^2}.$$

Se ne deduce che

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{M_n}{n}\right|<\epsilon\right)=1-\mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{M_n}{n}\right|\geq\epsilon\right)\geq 1-\frac{R}{n\epsilon^2}.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{M_n}{n}\right|<\epsilon\right)\geq\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{R}{n\epsilon^2}\right)=1.$$

Ciò significa che

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{M_n}{n}\right|<\epsilon\right)=1.$$

Esercizio 13

Sia Z normale standard. Dimostrare che

$$\mathrm{P}(Z\geq x)\leq\exp[-x^2/2]\qquad\forall x>0$$

(Suggerimento applicare la disuguaglianza di Markov per $g(Z)=\mathrm{e}^{xZ}$.) Dopo aver determinato la distribuzione di $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, dove $X_i\sim$ i.i.d.$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, usare questo risultato per calcolare l'estremo superiore di $\mathrm{P}(|\bar{X}_n-\mu|>K\sigma)$, con $K>0$.
Si determini inoltre, quando $K=1$, il più piccolo n tale che l'estremo superiore ricavato in precedenza sia più piccolo di 10^{-3}.

Soluzione:
Ovviamente per la v.a. e^{xZ} positiva vale la disuguaglianza di Markov:

$$\mathrm{P}(Z\geq x)=\mathrm{P}(xZ\geq x^2)=\mathrm{P}(\mathrm{e}^{xZ}\geq\mathrm{e}^{x^2})\leq\frac{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{xZ}]}{\mathrm{e}^{x^2}}=\frac{m_Z(x)}{\mathrm{e}^{x^2}}=\frac{\mathrm{e}^{x^2/2}}{\mathrm{e}^{x^2}}=\exp[-x^2/2].$$

Si può vedere usando il metodo della fgm che

$$\begin{aligned}m_{\bar{X}_n}(t)&=\mathbb{E}(\exp(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)t)=\prod_{i=1}^n\mathbb{E}(\exp(tX_i/n))=(m_{X_i}(t/n))^n\\&=\left[\exp\left[\frac{\sigma^2(t/n)^2}{2}+t\mu/n\right]\right]^n=\exp\left[\frac{(\sigma^2/n)t^2}{2}+t\mu\right].\end{aligned}$$

Questo risultato implica che $\bar{X}_n\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2/n)$. Di conseguenza $(\bar{X}_n-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})=Z\sim\mathcal{N}(0,1)$.
Applicando il risultato precedente

$$\mathrm{P}(|\bar{X}_n-\mu|>K\sigma)=\mathrm{P}(|Z|>K\sqrt{n})=2\mathrm{P}(Z>K\sqrt{n})\leq 2\exp[-nK^2/2].$$

Infine, cerchiamo n tale che

$$2\exp[-nK^2/2]<10^{-3}\qquad\Longrightarrow\qquad n>-\frac{2}{K^2}\log 10^{-3}/2=15.2018$$

Quindi $n=16$.

Esercizio 14

Supponendo $\mathrm{P}(X\leq 0)=0$ e $\mathbb{E}(X)=\mu<\infty$, si dimostri

1.
$$\mathrm{P}(X \geq a) \leq \mu/a \quad \text{per ogni } a > 0$$

2.
$$\mathrm{P}(X < \mu t) \geq 1 - 1/t \quad \text{per ogni } t > 0$$

Soluzione:
Se $g(\cdot)$ è una funzione non-negativa allora la disuguaglianza di Markov assicura per $k > 0$

$$\mathrm{P}[g(X) \geq k] \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{k}. \tag{1}$$

1. Essendo X una v.a. non-negativa, possiamo usare la (1) con $g(x) = x$. Quindi

$$\mathrm{P}(X \geq a) \leq \mu/a$$

Sia $g(x) = x/\mu$. Allora dalla (1) si ricava

$$\mathrm{P}(X \geq \mu t) \leq \frac{1}{t}.$$

Quindi

$$\mathrm{P}(X > \mu t) = 1 - \mathrm{P}(X \geq \mu t) \geq 1 - \frac{1}{t}.$$

Esercizio 15

Si indichi con Y_n il prezzo delle azioni IBM alla fine dell'n-esimo giorno di contrattazioni dell'anno. La variazione di prezzo tra due giorni consecutivi, $X_n = Y_{n+1} - Y_n$ è una variabile aleatoria con valore atteso nullo e varianza $\sigma^2 = 1/4$. Se $Y_1 = 30$, si calcoli un limite inferiore per le seguenti probabilità, sotto l'ipotesi che le v.a. X_n sono indipendenti tra loro.

(a) $\mathrm{P}(25 < Y_2 < 35)$.

(b) $\mathrm{P}(25 < Y_{11} < 35)$.

(c) $\mathrm{P}(25 < Y_{101} < 35)$.

Soluzione:
Per $n \geq 1$, esprimiamo Y_n in termini delle X_n.

$$\begin{aligned}
Y_2 &= X_1 + Y_1 \\
Y_3 &= X_2 + Y_2 = X_2 + X_1 + Y_1 \\
&\vdots \\
Y_n &= X_{n-1} + X_{n-2} + \ldots + X_1 + Y_1
\end{aligned}$$

Allora

$$Y_n = 30 + \sum_{k=1}^{n-1} X_k.$$

Inoltre

$$\mathbb{E}(Y_n) = 30 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k) = 30;$$

$$\mathrm{Var}(Y_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{Var}(X_k) = \frac{n-1}{4}.$$

La disuguaglianza di Chebyshev assicura che per ogni $k > 0$

$$\mathrm{P}(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| < k) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{k^2},$$

cioè

$$\mathrm{P}(30 - k < Y_n < 30 + k) \geq \frac{4k^2 + 1 - n}{4k^2}.$$

(a) Per $k = 5$ e $n = 2$, l'estremo inferiore è .99

(b) Per $k = 5$ e $n = 11$, l'estremo inferiore è .9

(c) Per $k = 5$ e $n = 101$, l'estremo inferiore è 0. In questo caso la diseguaglianza non è per nulla informativa.

Esercizio 16

Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua non-negativa. Si determini il più piccolo estremo superiore per $\mathrm{P}(X \geq a)$ nell'ipotesi che

(a) $\mathbb{E}(X) = 20$

(b) $\mathbb{E}(X) = 20$, $\mathrm{Var}(X) = 40$ e X è simmetrica intorno alla sua media.

Soluzione:
Se $g(\cdot)$ è una funzione non-negativa allora la disuguaglianza di Markov assicura per $k > 0$

$$\mathrm{P}[g(X) \geq k] \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{k}. \tag{2}$$

1. Essendo X una v.a. non-negativa, possiamo usare la (2) con $g(x) = x$. Quindi

$$\mathrm{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}(X)/a = 20/a$$

2. La disuguaglianza di Chebyshev assicura che per ogni $k > 0$

$$\mathrm{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq k) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{k^2}.$$

Essendo X simmetrica

$$\mathrm{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq k) = \mathrm{P}(X \geq 20 + k) + .\mathrm{P}(X \leq 20 - k) = 2\mathrm{P}(X \geq 20 + k).$$

Dunque

$$\mathrm{P}(X \geq 20 + k) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{2k^2} = \frac{20}{k^2}.$$

Ponendo $a = 20 + k$, cioè $k = a - 20$,

$$\mathrm{P}(X \geq a) \leq \frac{12}{(a-20)^2}.$$

Siano ora $g(a) = \frac{20}{(a-20)^2}$ e $f(a) = \frac{20}{a}$. È immediato dimostare che $g(a) \leq f(a)$ per $a \in (0,16] \cup [25,\infty)$.

Esercizio 17 (Weiss 7.72)
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia X_n la v.a. che assume valore 0 con probabilità $1 - 1/n^2$, $+n$ con probabilità $1/(2n^2)$ oppure $-n$ con probabilità $1/(2n^2)$.

(a) Si usi la disuguaglianza di Chebyshev per calcolare il limite superiore della probabilità che X_n in valore assoluto valga almeno 3.

(b) Si calcoli esattamente questa probabilità per $n \geq 3$.

(c) Confrontare i risultati ottenuti nei punti precedenti. Cosa accade per $n \to \infty$?

Soluzione:
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$\mathbb{E}(X_n) = n \times \frac{1}{2n^2} - n \times \frac{1}{2n^2} = 0$$
$$\mathrm{Var}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) = n^2 \times \frac{1}{2n^2} + n^2 \times \frac{1}{2n^2} = 1.$$

(a)

$$\mathrm{P}(|X_n \geq 3|) \leq \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

(b) Per $n \geq 3$

$$\mathrm{P}(|X_n \geq 3|) = \mathrm{P}(X_n = -n) + \mathrm{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^2}.$$

(c) Per $n = 3$ il limite superiore ottenuto tramite la disuguaglianza di Chebyshev è uguale alla probabilità esatta. Tuttavia al crescere di n la probabilità tende a zero:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n \geq 3|) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0,$$

mentre il limite superiore ottenuto tramite la disuguaglianza di Chebyshev rimane sempre uguale a 1/9.