Esercizi di Riepilogo

Esercizio 1

Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme in $\{-1,0,1\}$.

1. Determinare la distribuzione di $Y = X^2$;
2. Determinare la distribuzione congiunta di X e Y;
3. Dire se X e Y sono incorrelate;
4. Dire se X e Y sono indipendenti.

Soluzione:

1. Risulta
$$P(Y=0) = P(X=0) = 1/3$$
$$P(Y=1) = P(X=-1)+P(X=1) = 2/3.$$
2. Le uniche probabilità congiunte non nulle sono
$$P(X=-1,Y=1) = P(X=-1) = 1/3$$
$$P(X=1,Y=1) = P(X=1) = 1/3$$
$$P(X=0,Y=0) = P(X=0) = 1/3.$$
3. Risulta
$$\mathbb{E}(XY) = (-1)\times 1\times 1/3 + 1\times 1\times 1/3 + 0\times 0\times 1/3 = 0.$$
Poichè anche $\mathbb{E}(X) = 0$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$$
e quindi X e Y sono incorrelate.
4. X e Y non sono indipendenti in quanto Y è funzione di X.
In alternativa si può vedere che
$$P(X=-1,Y=0) = 0$$
ma
$$P(X=-1)P(Y=0) = (1/3)\times(1/3) = 1/9.$$

Esercizio 2

Un dado viene lanciato due volte. Siano X_1 e X_2 i rispettivi punteggi.

1. Determinare la distribuzione di $X = X_1 - X_2$;
2. Determinare la distribuzione di $Y = X_1 + X_2$;
3. Mostrare, senza calcolare l'intera distribuzione congiunta, che X e Y sono incorrelate ma non indipendenti.

Soluzione: 1. Per $k = 0, 1, \ldots, 5$

$$P(X = k) = P(X = -k) = \frac{6-k}{36}.$$

2. Per $k = 0, 1, \ldots, 5$

$$P(Y = 7 + k) = P(Y = 7 - k) = \frac{6-k}{36}.$$

3. Abbiamo

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}[(X_1 - X_2)(X_1 + X_2)] = \mathbb{E}[X_1^2 - X_2^2] = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_2^2) = 0$$

in quanto X_1^2 e X_2^2 sono identicamente distribuite (poichè X_1 e X_2 sono identicamente distribuite). Inoltre

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1 - X_2) = \mathbb{E}(X_1 - \mathbb{E}(X_2) = 0.$$

Di conseguenza

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$$

e quindi X e Y sono incorrelate.

Per dimostrare che X e Y non sono indipendenti basta osservare per esempio che

$$P(X = 0) = P(Y = 7) = 6/36 = 1/6$$

e quindi

$$P(X = 0)P(Y = 7) = (1/6)^2 = 1/36.$$

Tuttavia

$$P(X = 0, Y = 7) = P(X_1 = X_2, X_1 + X_2 = 7) = 0$$

in quanto non è possible che la somma dei due dadi sia 7 e il primo punteggio sia uguale al secondo. Pertanto

$$P(X = 0, Y = 7) \neq P(X = 0)P(Y = 7).$$

Esercizio 3

Siano X_1 e X_2 v.a. di Bernoulli indipendenti, la prima di parametro 1/2, la seconda di parametro 1/3.

1. Calcolare la distribuzione di $X = X_1 + X_2$ e di $Y = X_1 - X_2$;
2. Calcolare la distribuzione congiunta di X e Y;
3. Stabilire se X e Y sono incorrelate;
4. Calcolare $\mathbb{E}[(X_1 - X_2)^3]$.

Soluzione: 1. X può assumere i valori 0,1 e 2. Le probabilità risultano essere

$$P(X = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(X_1 = 0P(X_2 = 0) = (1 - 1/2) \times (1 - 1/3) = 1/2 \times 2/3 = 1/3$$
$$P(X = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_1 = 1P(X_2 = 1) = 1/2 \times 1/3 = 1/6$$
$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = 1 - 1/3 - 1/6 = 1/2.$$

Y può assumere i valori -1, 0 e. Le probabilità risultano essere

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= P(X_1 = X_2) = P(X_1=0)P(X_2=0) + P(X_1=1)P(X_2=1) \\
&= (1-1/2)\times(1-1/3) + 1/2\times 1/3 = 1/3 + 1/6 = 1/2 \\
P(Y=1) &= P(X_1=1)P(X_2=0) = 1/2\times 2/3 = 1/3 \\
P(Y=-1) &= P(X_1=0)P(X_2=1) = 1/2\times 1/3 = 1/6.
\end{aligned}$$

2. Per quanto riguarda la distrtibuzione congiunta di X e Y, le uniche probabilità non nulle sono

$$\begin{aligned}
P(X=0, Y=0) &= P(X_1=0, X_2=0) = 1/3 \\
P(X=2, Y=0) &= P(X_1=1, X_2=1) = 1/6 \\
P(X=1, Y=-1) &= P(X_1=0, X_2=1) = 1/6 \\
P(X=1, Y=1) &= P(X_1=1, X_2=0) = 1/3.
\end{aligned}$$

	Y			
X	-1	0	1	
0	0	1/3	0	1/3
1	1/6	0	1/3	1/2
2	0	1/6	0	1/6
	1/6	1/2	1/3	

3. Risulta

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= 1\times(-1)\times 1/6 + 1\times 1\times 1/3 = -1/6 + 1/3 = 1/6 \\
\mathbb{E}(X) &= 1\times 1/2 + 2\times 1/6 = 1/2 + 1/3 = 5/6 \\
\mathbb{E}(X) &= (-1)\times 1/6 + 1\times 1/3 = 1/6.
\end{aligned}$$

Allora

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 1/6 - 5/6\times 1/6 = 1/6\times(1-5/6) = 1/36$$

e dunque X e Y non sono incorrelate.

4. Sia $Z = (X_1 - X_2)^3 = Y^3$.
Risulta

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= (-1)^3\times 1/6 + (0)^3\times 1/2 + (1)^3\times 1/3 \\
&= -1/6 + 1/3 = 1/6.
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Siano R_1 e R_2 v.a. indipendenti con la stessa densità

$$f_{R_i}(x) = x\mathrm{e}^{-x^2/2} I_{(0,\infty)}(x) \qquad i = 1, 2.$$

1. Dimostare che f_{R_i} è una densità valida;

2. Calcolare la densità di $Y = \min(R_1, R_2)$;

3. Calcolare la densità di $Z = Y^2$ e $\mathbb{E}(Z)$.

Soluzione: 1. Chiaramente $f_{R_i}(x) > 0$ per ogni $x > 0$. L'integrale della funzione di densità su tutto il supporto vale

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x^2/2}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

e quindi f_{R_i} è una densità valida.

2. La funzione di ripartizione di $Y = \min(R_1, R_2)$ è pari a

$$F_Y(y) = 1 - \mathrm{P}(\min(R_1,R_2) > y) = 1 - \mathrm{P}(R_1 > y, R_2 > y) = 1 - \mathrm{P}(R_1 > y)\mathrm{P}(R_2 > y).$$

Ora, la funzione di sopravvivenza (complemento ad 1 della ripartizione) è, per $y > 0$,

$$\mathrm{P}(R_1 > y) = \mathrm{P}(R_2 > y) = \int_y^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x^2/2}\Big|_y^{+\infty} = \mathrm{e}^{-y^2/2}.$$

Quindi

$$F_Y(y) = 1 - \left(\mathrm{e}^{-y^2/2}\right)^2 = 1 - \mathrm{e}^{-y^2}.$$

La densità si ottiene calcolando la derivata prima della funzione di ripartizione:

$$f_Y(y) = 2y\mathrm{e}^{-y^2} I_{(0,\infty)}(y).$$

3. $Z = Y^2$ è, ovviamente, a valori positivi. Inoltre per $z > 0$

$$F_Z(z) = \mathrm{P}(Y^2 \le z) = \mathrm{P}(-\sqrt{z} \le Y \le \sqrt{z}) = F_Y\left(\sqrt{z}\right) - F_Y\left(-\sqrt{z}\right).$$

Essendo Y a valori positivi $F_Y\left(-\sqrt{z}\right) = \mathrm{P}(Y \le -\sqrt{z}) = 0$. Allora

$$F_Z(z) = F_Y\left(\sqrt{z}\right) = \int_0^{\sqrt{z}} 2y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = -\mathrm{e}^{-y^2}\Big|_0^{\sqrt{z}} = 1 - \mathrm{e}^{-z}.$$

Ne consegue che

$$f_Z(z) = \mathrm{e}^{-z} I_{(0,\infty)}(z).$$

Z ha quindi distribuzione esponenziale di parametro 1 e $\mathbb{E}(Z) = 1$.

Esercizio 5

Un terremoto di magnitudo M rilascia energia pari a $X = \mathrm{e}^M$. Si supponga che, per terremoti di magnitudo superiore a 3, $M - 3$ ha distribuzione esponenziale con media 2.

1. Calcolare la densità, media e varianza per terremoti di magnitudo superiore a 3;

2. Per terremoti come quelli del punto precedente, determinare la densità per l'energia rilasciata. Calcolare inoltre l'energia media rilasciata.

3. Si considerino due terremoti indipendenti, entrambi di magnitudo superiore a 3. Calcolare la probabilità che la magnitudo del terremoto di minore intensità sia superiore a 4.

Soluzione:
Sia $Y = M - 3$. Allora $Y \sim \text{Esp}(1/2)$ e quindi

$$f_Y(y) = 0.5\mathrm{e}^{-0.5\times y} I_{(0,\infty)}(y).$$

1. Risulta
$$M = Y + 3 = g(Y) \qquad Y = M - 3 = g^{-1}(M).$$
Essendo la trasformazione strettamente monotona
$$f_M(m) = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m} g^{-1}(m)\right| f_Y\left(g^{-1}(m)\right) = f_Y(m-3) = 0.5\mathrm{e}^{-0.5\times(m-3)} I_{(3,\infty)}(m).$$
Media e varianza sono
$$\mathbb{E}(M) = \mathbb{E}(Y+3) = \mathbb{E}(Y) + 3 = 5$$
$$\text{Var}(M) = \text{Var}(Y+3) = \text{Var}(Y) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

2. Risulta
$$X = \mathrm{e}^M = h(M) \qquad M = \log X = h^{-1}(X).$$
La trasformazione è ancora strettamente monotona e quindi
$$f_X(x) = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} h^{-1}(x)\right| f_M\left(h^{-1}(x)\right) = \frac{1}{x} f_M(\log x)$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-0.5\times(\log x - 3)}}{2x} I_{(\mathrm{e}^3,\infty)}(x).$$
Per quanto riguarda la media di X
$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^M) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{Y+3}] = \mathrm{e}^3\mathbb{E}[\mathrm{e}^Y].$$
Ricordando che un'esponenziale di parametro λ ha fgm pari a $\lambda/(\lambda - t)$ per $t < \lambda$, è evidente che $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{tY}]$ esiste solo per $t < 1/2$ e quindi il valore atteso di X non esiste.

3. Sia $Z = \min(M_1, M_2)$, essendo M_1 e M_2 le magnitudo dei due terremoti.
Risulta
$$F_Z(z) = 1 - \text{P}(\min(M_1, M_2) > z) = 1 - \text{P}(M_1 > z, M_2 > z) = 1 - \text{P}(M_1 > z)\text{P}(M_2 > z).$$
Ora, la funzione di sopravvivenza (complemento ad 1 della ripartizione) è, per $z > 3$,
$$\text{P}(M_1 > z) = \text{P}(M_2 > z) = \int_z^{+\infty} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-0.5\times(m-3)}\mathrm{d}m$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{1.5}}{2}\int_z^{+\infty} \mathrm{e}^{-0.5\times m}\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{e}^{1.5}}{2}\left[-2\mathrm{e}^{-0.5\times m}\Big|_z^{+\infty}\right] = \mathrm{e}^{1.5}\mathrm{e}^{-0.5\times z}.$$
Quindi, per $z > 3$
$$F_Z(z) = 1 - \left(\mathrm{e}^{1.5}\mathrm{e}^{-0.5\times z}\right)^2 = 1 - \mathrm{e}^{-(z-3)}$$

e

$$f_Z(z) = \mathrm{e}^{-(z-3)} I_{(3,\infty)}(z).$$

Infine la probabilità richiesta è

$$\mathrm{P}(Z > 4) = \int_4^{+\infty} f_Z(z)\,\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{-(z-3)}\Big|_4^{+\infty} = \mathrm{e}^{-1}.$$

Esercizio 6

Sia U una v.a. con distribuzione uniforme in $(0,1)$. Determinare

1. la densità, media e varianza di $Y = \min(U, 1-U)$;
2. la densità di $Z = 2Y$.

Soluzione:

Osserviamo che se $U > 0.5$ allora $Y = 1-U$.
Se invece $U \le 0.5$ allora $Y = U$.
Di conseguenza possiamo scrivere

$$Y = 1/2 - |U - 1/2|.$$

1. Si vede facilmente, usando le formula per trasformazioni di v.a., che

$$U - 1/2 \sim \mathscr{U}(-1/2, 1/2)$$
$$|U - 1/2| \sim \mathscr{U}(0, 1/2)$$
$$1/2 - |U - 1/2| \sim \mathscr{U}(0, 1/2).$$

Quindi

$$f_Y(y) = 2I_{(0,1/2)}(y)$$

e

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}; \qquad \mathrm{Var}(Y) = \frac{(1/2)^2}{12} = \frac{1}{48}.$$

2. $Z = 2Y$ è a valori in $(0,1)$. La densità è

$$f_Z(z) = \frac{1}{2} f_Y(z/2) = \frac{1}{2} \times 2I_{(0,1/2)}(z/2) = I_{(0,1)}(z).$$

Z ha quindi distribuzione uniforme standard.

Esercizio 7

Il prezzo di un titolo azionario al tempo t, W_t, è pari a $W_t = X\mathrm{e}^{tY}$, dove X ha distribuzione gamma con media 2 e varianza unitaria, e Y ha distribuzione uniforme in $(1, 1.5)$. Inoltre X e Y sono indipendenti. Determinare

1. $\mathbb{E}(X^7)$;
2. media e varianza di W_t.

Soluzione: 1. Si ricorda che, se $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$,

$$f_X(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\alpha x} I_{(0,\infty)}(x),$$

e

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\beta}{\alpha}; \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{\beta}{\alpha^2}.$$

Poichè $\mathbb{E}(X) = 2$, deve essere $\beta = 2\alpha$.

Dalla condizione sulla varianza troviamo

$$\frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{2\alpha}{\alpha^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{\alpha} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 2.$$

Di conseguenza $\beta = 4$.

Poichè

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{\Gamma(k+\beta)}{\alpha^k \Gamma(\beta)},$$

ne consegue che

$$\mathbb{E}(X^7) = \frac{\Gamma(7+\beta)}{\alpha^7 \Gamma(\beta)} = \frac{\Gamma(11)}{2^7 \Gamma(4)} = \frac{10!}{2^7 3!}.$$

2. Iniziamo con l'osservare che la fgm di Y è

$$m_Y(t) = \frac{\mathrm{e}^{1.5t} - \mathrm{e}^t}{0.5t}.$$

La media di W_t è, usando l'indipendenza tra X e Y,

$$\mathbb{E}(W_t) = \mathbb{E}(X\mathrm{e}^{tY}) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tY}) = \mathbb{E}(X) m_Y(t) = 2\frac{\mathrm{e}^{1.5t} - \mathrm{e}^t}{0.5t} = 4\frac{\mathrm{e}^{1.5t} - \mathrm{e}^t}{t}.$$

Osservando che il momento secondo di X è

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{\beta(\beta+1)}{\alpha^2} = \frac{4 \times 5}{4} = 5,$$

risulta

$$\mathbb{E}(W_t^2) = \mathbb{E}(X^2 \mathrm{e}^{2tY}) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathrm{e}^{2tY}) = \mathbb{E}(X^2) m_Y(2t) = 5\frac{\mathrm{e}^{1.5 \times 2t} - \mathrm{e}^{2t}}{0.5 \times 2t} = 5\frac{\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{2t}}{t}.$$

Infine la varianza è

$$\mathrm{Var}(W_t) = \mathbb{E}(W_t^2) - \mathbb{E}(W_t)^2 = 5\frac{\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{2t}}{t} - \left(4\frac{\mathrm{e}^{1.5t} - \mathrm{e}^t}{t}\right)^2.$$

Esercizio 8

Sia Z una v.a. con funzione di densità

$$f_Z(z) = (1 - |z-1|) I_{[0,2]}(z).$$

Calcolare la fgm di Z.

Soluzione:
La densità è
$$f_Z(z) = zI_{[0,1]}(z) + (2-z)I_{(1,2]}(z).$$
La fgm è dunque
$$\begin{aligned} m_Z(t) = \mathbb{E}(e^{tZ}) &= \int_0^1 z e^{tz} dz + \int_1^2 (2-z)e^{tz} dz \\ &= \int_0^1 z e^{tz} dz + 2\int_1^2 e^{tz} dz - \int_1^2 z e^{tz} dz. \end{aligned}$$
Ora una primitiva di e^{tz} è e^{tz}/t, mentre usando la formula degli integrali per parti, si vede che una primitiva di ze^{tz} è $ze^{tz}/t - e^{tz}/t^2$.
Quindi
$$\begin{aligned} m_Z(t) &= \left[\frac{ze^{tz}}{t} - \frac{e^{tz}}{t^2}\right]_{z=0}^{z=1} + \left[\frac{2e^{tz}}{t}\right]_{z=1}^{z=2} - \left[\frac{ze^{tz}}{t} - \frac{e^{tz}}{t^2}\right]_{z=1}^{z=2} \\ &= \frac{e^{2t} - 2e^t + 1}{t^2} = \left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^2. \end{aligned}$$

Esercizio 9

Sia $\{U_i\}_i$ una sequenza di v.a. indipendenti uniformi in $[0,1]$. Siano
$$M_n = \max(U_1, \ldots, U_n) \qquad \text{e} \qquad Z_n = -n(M_n - 1).$$

1. Dimostrare che Z_n converge in distribuzione e determinare la distribuzione limite.
2. Sia X la v.a. con la distribuzione limite del punto precedente, e $\{U_i\}_i$ una sequenza di v.a. indipendenti tutte con la stessa distribuzione di X.

   Determinare (se esistono) le costanti a e b in modo che
   $$Y_n = a\sum_{i=1}^n X_i + b$$
   converga in distribuzione, individuando anche la distribuzione limite.

Soluzione: 1. La funzione di ripartizione di Z_n è, per $z \in (0, n)$,
$$F_{Z_n}(z) = P(Z_n \le z) = P(-n(M_n - 1) \le z) = P(M_n \ge 1 - z/n) = 1 - P(M_n \le 1 - z/n).$$
Ricordando che la funzione di ripartizione del massimo di v.a. indipendenti ed identicamente distribuite soddisfa
$$F_{M_n}(x) = \left(F_{X_i}(x)\right)^n,$$
troviamo
$$F_{Z_n}(z) = 1 - \left(F_{U_i}(1 - z/n)\right)^n = 1 - (1 - z/n)^n.$$
Passando al limite,
$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = 1 - e^{-z}, \qquad \text{per } z > 0.$$
Quindi Z_n converge in distribuzione ad una v.a. esponenziale di parametro 1.

2. Dal punto precedente sappiamo che

$$X \sim \text{Esp}(1).$$

Se $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, il teorema del limite centrale ci assicura che

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{\mathscr{D}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Quindi

$$a = \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \qquad b = -\frac{\mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}.$$

Poichè

$$\mathbb{E}(X_i) = \text{Var}(X_i) = 1,$$

risulta

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = n$$
$$\text{Var}(S_n) = \text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = n,$$

e quindi

$$a = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad b = -\frac{n}{\sqrt{n}} = -\sqrt{n}.$$