Metodi Probabilistici Per L'Economia
Prova Scritta del 21 - 7 - 2009

Nome: _____ Cognome: _____ Matricola: _____

Esercizio 1

(15 Punti)

Siano U_1 e U_2 v.a. uniformi standard ed indipendenti e

$$Z = \frac{1}{\sqrt{U_1}\sqrt{U_2}}$$

- (a) Calcolare la funzione di densità di $X_i = -\frac{1}{2} \log U_i$ per $i = 1, 2$. [4]
- (b) Determinare la funzione di densità di $S = X_1 + X_2$. [5]
(Suggerimento: usare il metodo della fgm.)
- (c) Calcolare (se esistono) i primi due momenti di Z . [6]
(Suggerimento: passare al logaritmo e utilizzare i risultati dei punti precedenti.)

Soluzione:

(a) Il supporto di $X_i = -(\log U_i)/2$ è $(0, \infty)$.

1

La trasformazione $g(U_i) = -(\log U_i)/2$ è, inoltre, strettamente decrescente. La trasformazione inversa è

$$g^{-1}(x) = e^{-2x}.$$

Risulta inoltre

$$\frac{d}{dx} g^{-1}(x) = -2e^{-2x}.$$

1

La funzione di densità di X_i è data da

$$\begin{aligned} f_{X_i}(x) &= \left| \frac{d}{dx} g^{-1}(x) \right| f_{U_i}(g^{-1}(x)) \\ &= 2e^{-2x} I_{(0,1)}(e^{-2x}) = 2e^{-2x} I_{(0,\infty)}(x). \end{aligned}$$

X_i ha quindi distribuzione esponenziale di parametro 2.

2

(b) La funzione generatrice dei momenti di X_i è

$$m_{X_i}(t) = \frac{2}{2-t} \quad \text{per } t < 2.$$

1

Usando il metodo della fgm per la somma di v.a. indipendenti:

$$m_S(t) = m_{X_1}(t)m_{X_2}(t) = \left(\frac{2}{2-t}\right)^2 \quad \text{per } t < 2$$

2

Pertanto

$$S \sim \Gamma(2, 2)$$

e la funzione di densità è

$$f_S(x) = 4xe^{-2x}I_{(0,\infty)}(x).$$

2

(c) Possiamo scrivere la variabile aleatoria Z come

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\sqrt{U_1}\sqrt{U_2}} = \exp\left[\log\left(\frac{1}{\sqrt{U_1}\sqrt{U_2}}\right)\right] \\ &= \exp\left[-\frac{\log U_1}{2} - \frac{\log U_2}{2}\right] \\ &= \exp[X_1 + X_2] = \exp[S]. \end{aligned}$$

1

Di conseguenza

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(e^S).$$

Questa non è altro che la fgm di S nel punto 1.

2

Quindi

$$\mathbb{E}(Z) = m_S(1) = \left(\frac{2}{2-1}\right)^2 = 4.$$

1

In alternativa si può osservare che

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(1/\sqrt{U_1})\mathbb{E}(1/\sqrt{U_2}).$$

Ora

$$\mathbb{E}(1/\sqrt{U_1}) = \mathbb{E}(1/\sqrt{U_2}) = \int_0^1 1/\sqrt{u} du = [2\sqrt{u}]_0^1 = 2$$

e quindi il momento primo di Z è pari a $2^2 = 4$.

Per quanto riguarda il momento secondo:

$$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(1/U_1)\mathbb{E}(1/U_2).$$

Ora

$$\mathbb{E}(1/U_1) = \mathbb{E}(1/U_2) = \int_0^1 1/u du = \infty$$

e quindi il momento secondo di Z non esiste.

Una soluzione alternativa consiste nell'osservare che

$$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(e^{2S}).$$

1

Poichè $\mathbb{E}(e^{tS})$ esiste per $t < 2$, il momento secondo di Z non esiste.

1

Esercizio 2

(15 Punti)

Sia $\{U_i\}_i$ una sequenza di v.a. indipendenti uniformi standard. Siano

$$M_n = \max(U_1, \dots, U_n) \quad \text{e} \quad Z_n = -n(M_n - 1).$$

- (a) Dimostrare che Z_n converge in distribuzione e determinare la distribuzione limite. [7]
- (b) Sia X la v.a. con la distribuzione limite del punto precedente, e $\{X_i\}_i$ una sequenza di v.a. indipendenti tutte con la stessa distribuzione di X . [8]

Determinare (se esistono) le costanti a e b in modo che

$$Y_n = a \sum_{i=1}^n X_i + b$$

converga in distribuzione ad una v.a. non degenera, individuando anche la distribuzione limite.

Soluzione:

(a) Il supporto di Z_n è $(0, n)$.

1

La funzione di ripartizione di Z_n è, per $z \in (0, n)$,

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) &= P(Z_n \leq z) = P(-n(M_n - 1) \leq z) \\ &= P(M_n \geq 1 - z/n) = 1 - P(M_n \leq 1 - z/n). \end{aligned}$$

1

Ricordando che la funzione di ripartizione del massimo di v.a. indipendenti ed identicamente distribuite soddisfa

$$F_{M_n}(x) = (F_{U_i}(x))^n,$$

2

troviamo

$$F_{Z_n}(z) = 1 - (F_{U_i}(1 - z/n))^n = 1 - (1 - z/n)^n.$$

1

essendo $F_{U_i}(u) = uI_{(0,1)}(u) + I_{[1,\infty)}(u)$.

Passando al limite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(z) = 1 - e^{-z}, \quad \text{per } z > 0.$$

1

Quindi Z_n converge in distribuzione ad una v.a. esponenziale di parametro 1.

1

(b) Se $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, il teorema del limite centrale ci assicura che

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

3

Quindi

$$a = \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \quad b = -\frac{\mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}.$$

2

Poichè

$$\mathbb{E}(X_i) = \text{Var}(X_i) = 1,$$

risulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = n \\ \text{Var}(S_n) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = n, \end{aligned}$$

2

e quindi

$$a = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad b = -\frac{n}{\sqrt{n}} = -\sqrt{n}.$$

1