# Metodi Probabilistici Per L'Economia
# Prova Scritta del 15 – 9 – 2009

**Nome:** ______________ **Cognome:** ______________ **Matricola:** __________

**Esercizio 1** **(15 Punti)**

Sia per $n = 1, 2, \ldots$, $X_n$ una v.a. con la seguente funzione di densità:

$$f_{X_n}(x) = 2nx \exp(-nx^2) I_{(0,\infty)}(x).$$

(a) Dire, giustificando la propria risposta, se le variabili aleatorie $Y_n = nX_n^2$, $n = 1, 2, \ldots$ hanno distribuzione nota. [6]

(b) Dimostrare che $\mathbb{E}(X_n^k) = \Gamma(1 + k/2) n^{-k/2}$ [3]
(Suggerimento: Risolvere l'integrale usando la trasformazione $y = nx^2$.)

(c) Dimostrare che $X_n$ converge in media quadratica e in probabilità. [6]

**Soluzione:**

(a) Per $n = 1, 2, \ldots$, il supporto di $Y_n = nX_n^2$ è $(0, \infty)$.

$\boxed{1}$

La trasformazione $g(x) = nx^2$ è, inoltre, strettamente decrescente in $(0, \infty)$.

$\boxed{1}$

La trasformazione inversa è

$$g^{-1}(y) = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{n}}.$$

Risulta inoltre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y) = \frac{1}{2\sqrt{n}} y^{-1/2}.$$

$\boxed{1}$

La funzione di densità di $Y_n$ è quindi data da

$$\begin{aligned} f_{Y_n}(y) &= \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y) \right| f_{X_n}\left(g^{-1}(y)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{n}} y^{-1/2} 2n \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{n}} \exp(-y) I_{(0,\infty)}(y) = \mathrm{e}^{-y} I_{(0,\infty)}(y). \end{aligned}$$

$\boxed{2}$

$Y_n$ ha quindi distribuzione esponenziale di parametro 1.

$\boxed{1}$

(b) Consideriamo il cambio di variabile $y = nx^2$, da cui si trova, considerando solo la radice positiva, $x = n^{-1/2}y^{1/2}$. Per il differenziale vale quindi $\mathrm{d}x = n^{-1/2}y^{-1/2}/2\mathrm{d}y$.

$\boxed{1}$

Risulta quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n^k) &= \int_{\mathbb{R}} x^k f_{X_n}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty 2nx^{k+1}\exp(-nx^2)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty 2n^{1-k/2-1/2}y^{k/2+1/2}\exp(-y)n^{-1/2}y^{-1/2}/2\mathrm{d}y \\
&= n^{-k/2}\int_0^\infty y^{k/2}\exp(-y)\mathrm{d}y \\
&= n^{-k/2}\int_0^\infty y^{1+k/2-1}\exp(-y)\mathrm{d}y = \Gamma(1+k/2)n^{-k/2}.
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

(c) Poichè

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \Gamma(2)n^{-1} = 1/n,$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(|X_n|^2) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_n^2) = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$$

$\boxed{2}$

e quindi

$$X_n \xrightarrow{2} 0.$$

$\boxed{2}$

Questo implica immediatamente

$$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

$\boxed{2}$

**Esercizio 2** **(15 Punti)**

Sia data la seguente funzione di probabilità bivariata:

$$p_{X,Y}(x,y) = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^x \mu^y}{x!y!} I_{\{0,1,\ldots\}}(x) I_{\{0,1,\ldots\}}(y).$$

(a) Determinare le funzioni di probabilità marginali. [5]

(b) Determinare le funzioni di probabilità condizionata di $Y$ dato $X = x$ e di $X$ dato $Y = y$. [4]

(c) Dire se $X$ e $Y$ sono indipendenti. [1]

(d) Calcolare media e varianza di $X$ e $Y$ attraverso la funzione generatrice dei momenti. [5]

**Soluzione:**

(a) La funzione di probabilità marginale di $X$ è

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \sum_y p_{X,Y}(x,y) = \sum_{y=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^x \mu^y}{x!y!} I_{\{0,1,\ldots\}}(x) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\ldots\}}(x) \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^y}{y!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\ldots\}}(x). \end{aligned}$$

$\boxed{3}$

Analogamente

$$p_Y(y) = \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^y}{y!} I_{\{0,1,\ldots\}}(y).$$

$\boxed{2}$

(b) La funzione di probabilità condizionata di $Y$ dato $X = x$ è

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} = \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^y}{y!} I_{\{0,1,\ldots\}}(y).$$

$\boxed{2}$

La funzione di probabilità condizionata di $X$ dato $Y = y$ è

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\ldots\}}(x).$$

$\boxed{2}$

(c) Le due v.a. sono indipendenti in quanto

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\,p_Y(y).$$

$\boxed{1}$

(d) La fgm di $X$ è:

$$m_X(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{tk} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$
$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \mathrm{e}^t)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \exp[\lambda \mathrm{e}^t] = \exp[\lambda(\mathrm{e}^t - 1)].$$

$\boxed{2}$

I primi due momenti semplici sono dati da

$$\mathbb{E}(X) = m'_X(0) = \lambda$$
$$\mathbb{E}(X^2) = m''_X(0) = \lambda^2 + \lambda.$$

$\boxed{2}$

La varianza è

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda.$$

$\boxed{1}$

In maniera analoga si trova

$$\mathbb{E}(Y) = \mathrm{Var}(Y) = \mu.$$