Metodi Probabilistici Per L'Economia
Prova Scritta del 7 – 7 – 2009

Nome: ______________ **Cognome:** ______________ **Matricola:** __________

Esercizio 1 **(15 Punti)**

Si consideri la v.a. X con la seguente funzione di probabilità:

$$p_X(x) = \alpha \frac{\theta^x}{x} I_{\{1,2,\dots\}}(x), \qquad (\dagger)$$

dove

$$\alpha = -\frac{1}{\log(1-\theta)}, \qquad \text{e} \qquad \theta \in (0,1).$$

(a) Dimostrare che la moda di X è 1. [1]

(b) Dire se esiste la funzione generatrice dei momenti di X. [4]
(Suggerimento: $-\log(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k$ per $|x| < 1$.)

(c) Calcolare i primi due momenti di X direttamente (usando la funzione di probabilità). [3]

(d) Calcolare i primi due momenti di X attraverso la funzione generatrice dei momenti (se esiste). [2]

Siano X ed Y variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite, con funzione di probabilità ($\dagger$) e $Z = X + Y$.

(e) Calcolare $P(Z = 1)$, $P(Z = 2)$ e $P(Z = 3)$. [3]

(f) Dimostrare che la funzione di probabilità di Z è [2]

$$p_Z(z) = 2\alpha^2 \frac{\theta^z}{z} H_{z-1} I_{\{2,3,\dots\}}(z),$$

essendo

$$H_z = \sum_{k=1}^{z} \frac{1}{k}.$$

(Suggerimento: $\sum_{k=1}^{z-1} 1/(k(z-k)) = 2H_{z-1}/z$ per $z = 2,3,\dots$.)

Soluzione:

(a) Poichè $\alpha > 0$ e $\theta \in (0,1)$, per $x = 1,2,\dots$

$$p_X(x) = \alpha \frac{\theta^x}{x} > \alpha \frac{\theta^x}{x+1} > \alpha \frac{\theta^{x+1}}{x+1} = p_X(x+1).$$

Di conseguenza

$$p_X(1) > p_X(x) \quad \text{per } x = 2,3,\dots$$

e quindi 1 è la moda.

$\boxed{1}$

(b)

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} \alpha \frac{\theta^k}{k} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(e^t\theta\right)^k}{k}.$$

$\boxed{2}$

Se $e^t\theta < 1$, ossia se $t < -\log\theta$, la serie converge e

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \alpha\left[-\log(1-e^t\theta)\right].$$

$\boxed{1}$

Essendo $-\log\theta > 0$, tale valore atteso esiste in un intorno dell'origine e quindi la funzione generatrice dei momenti esiste.

$\boxed{1}$

(c)

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha \frac{\theta^k}{k} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k = \frac{\alpha\theta}{1-\theta}.$$

$\boxed{1}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \alpha \frac{\theta^k}{k} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} k\theta^k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} k\theta^k = \alpha\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{d}{d\theta}\theta^k\right) \\ &= \alpha\theta\left(\frac{d}{d\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k\right) = \alpha\theta\left(\frac{d}{d\theta}\frac{1}{1-\theta}\right) = \alpha\frac{\theta}{(1-\theta)^2}.\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

(d)

$$m_X'(t) = \frac{d}{dt} m_X(t) = \frac{\alpha e^t\theta}{1-e^t\theta}$$
$$\mathbb{E}(X) = m_X'(0) = \frac{\alpha\theta}{1-\theta}.$$

$\boxed{1}$

$$
\begin{aligned}
m''_X(t) &= m'_X(t) + \frac{\alpha(e^t\theta)^2}{(1-e^t\theta)^2} \\
\mathbb{E}(X^2) = m''_X(0) &= \frac{\alpha\theta}{1-\theta} + \frac{\alpha\theta^2}{(1-\theta)^2} = \frac{\alpha\theta}{(1-\theta)^2}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{1}$

(e) Il supporto di Z è $\{2,3,\ldots\}$.

Questo significa che

$$P(Z=1)=0.$$

$\boxed{1}$

Inoltre

$$P(Z=2) = P(X=1,Y=1) = P(X=1)P(Y=1) = \alpha^2\theta^2.$$

$\boxed{1}$

$$P(Z=3) = P(X=2,Y=1) + P(X=1,Y=2) = \alpha\frac{\theta^2}{2}\alpha\theta + \alpha\theta\alpha\frac{\theta^2}{2} = \alpha^2\theta^3.$$

$\boxed{1}$

(f) Usando la formula di convoluzione, si ha che per $z = 2,3,\ldots$

$$
\begin{aligned}
p_Z(z) &= \sum_k p_X(k)\,p_Y(z-k) \\
&= \sum_k \alpha\frac{\theta^k}{k} I_{\{1,2,\ldots\}}(k)\,\alpha\frac{\theta^{z-k}}{z-k} I_{\{1,2,\ldots\}}(z-k) \\
&= \alpha^2\theta^z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(z-k)} I_{\{1,2,\ldots\}}(z-k) \\
&= \alpha^2\theta^z \sum_{k=1}^{z-1} \frac{1}{k(z-k)} \\
&= \frac{2\alpha^2\theta^z}{z} \sum_{k=1}^{z-1} \frac{1}{k} = \frac{2\alpha^2\theta^z}{z} H_{z-1}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$

Esercizio 2 **(15 Punti)**

Si consideri l'integrale

$$I = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

(a) Calcolare l'integrale usando le tabelle per la funzione di ripartizione della normale standard. [3]

Si dica, inoltre, come calcolare in maniera approssimata l'integrale, avendo a disposizione

(b) Una sequenza di osservazioni indipendenti, $u_1, u_2, \ldots, u_n$, da [4]

$$U \sim \mathscr{U}(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

(Suggerimento: scrivere l'integrale come il valore atteso di una funzione di U)

(c) Una sequenza di osservazioni indipendenti, $v_1, v_2, \ldots, v_n$, da [4]

$$V \sim \mathscr{U}(0, 1)$$

(Suggerimento: mostrare che

$$V = g(U) = \frac{U + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

e sostituire $U = g^{-1}(V)$ nel valore atteso del punto precedente)

(d) Una sequenza di osservazioni indipendenti, $z_1, z_2, \ldots, z_n$, da [4]

$$Z \sim \mathscr{N}(0, 1)$$

(Suggerimento: scrivere l'integrale come il valore atteso di una funzione di Z)

Soluzione:

(a) Conviene prima di tutto considerare la trasformazione

$$z = \sqrt{2}x \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{z}{\sqrt{2}}.$$

$\boxed{1}$

Il differenziale è quindi

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2}}.$$

L'integrale diventa

$$I = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2}}.$$

Conviene adesso moltiplicare e dividere per $\sqrt{\pi}$, in modo da far comparire la densità di una normale standard:

$$I = \sqrt{\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz = \sqrt{\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \phi(z) dz.$$

$\boxed{1}$

In termini della funzione di ripartizione della normale standard:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\pi} \left[\Phi(\sqrt{2}) - \Phi(-\sqrt{2}) \right] \\ &= \sqrt{\pi} \left[\Phi(\sqrt{2}) - \Phi(-\sqrt{2}) \right] \\ &= \sqrt{\pi} \left[2\Phi(\sqrt{2}) - 1 \right] = \sqrt{\pi} [2 \times 0.9207 - 1] = 1.4913. \end{aligned}$$

$\boxed{1}$

(b) La densità di U è

$$f_U(z) = \frac{I_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}(z)}{2\sqrt{2}}.$$

Possiamo quindi scrivere l'integrale come

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\pi} \times 2\sqrt{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \phi(z) dz \\ &= 2\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{I_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}(z)}{2\sqrt{2}} \phi(z) dz \\ &= 2\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(z) f_U(z) dz = 2\sqrt{2\pi} \mathbb{E} \left[\phi(U) \right]. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$

Per la Legge dei Grandi Numeri,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi(U_i) \xrightarrow{P} \mathbb{E} \left[\phi(U) \right],$$

essendo $U_1, \ldots, U_n$, n repliche indipendenti di U.

Possiamo quindi approssimare l'integrale come

$$I \approx 2\sqrt{2\pi} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi(u_i).$$

$\boxed{2}$

(c) Se

$$V = g(U) = \frac{U + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}},$$

la trasformazione inversa è

$$U = g^{-1}(V) = 2\sqrt{2}V - \sqrt{2}.$$

Essendo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} g^{-1}(v) = 2\sqrt{2},$$

la densità di V è

$$f_V(v) = 2\sqrt{2} f_U\left(2\sqrt{2}v - \sqrt{2}\right) = I_{[0,1]}(v).$$

Quindi V ha proprio distribuzione uniforme standard.

$\boxed{2}$

Allora

$$I = 2\sqrt{2\pi}\mathbb{E}\left[\phi(U)\right] = 2\sqrt{2\pi}\mathbb{E}\left[\phi(2\sqrt{2}V - \sqrt{2})\right].$$

Sempre in base alla Legge dei Grandi Numeri possiamo approssimare l'integrale come

$$I \approx 2\sqrt{2\pi}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(2\sqrt{2}v_i - \sqrt{2}).$$

$\boxed{2}$

(d) È possibile scrivere l'integrale come

$$I = \sqrt{\pi}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \phi(z)\mathrm{d}z = \sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} I_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}(z)\phi(z)\mathrm{d}z = \sqrt{\pi}\mathbb{E}\left[I_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}(Z)\right].$$

$\boxed{2}$

Pertanto

$$\begin{aligned} I &\approx \sqrt{\pi}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}(z_i) \\ &= \sqrt{\pi}\frac{\#(z_i \text{ compresi tra } -\sqrt{2} \text{ e } \sqrt{2})}{n}. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$