Metodi Probabilistici Per L'Economia
Prova Scritta del DD – MM – YYYY

Nome: __________________ **Cognome:** _______________ **Matricola:** _____

Esercizio 1 **(15 Punti)**

Un punto P ha coordinate X e Y scelte a caso ed in maniera indipendente nell'intervallo $[0,1]$.

(a) Determinare la distribuzione della distanza del punto P dal vertice più vicino del quadrato con vertici (0,0), (1,0), (1,1) e (0,1). [14]

Suggerimento:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(z-x)}}\mathrm{d}x = \arcsin\left[\frac{2}{z}\left(x-\frac{z}{2}\right)\right]+c$$

(b) Calcolare la probabilità che la distanza del punto precedente sia più piccola di 3/4. [1]

Soluzione:

(a) Siano

$$D_1 = \min(X, 1-X) \qquad \text{e} \qquad D_2 = \min(Y, 1-Y).$$

La distanza richiesta è

$$D = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}.$$

$\boxed{2}$

La funzione di ripartizione di D_1 è, per $x \in [0,1/2]$

$$\begin{aligned} F_{D_1}(x) &= 1 - \mathrm{P}(D_1 > x) \\ &= 1 - \mathrm{P}(X > x, 1-X > x) \\ &= 1 - \mathrm{P}(X > x, X < 1-x) \\ &= 1 - \int_x^{1-x} \mathrm{d}u = 1-(1-2x) = 2x. \end{aligned}$$

Quindi D_1 ha distribuzione uniforme in $[0,1/2]$. Ovviamente anche D_2 ha distribuzione uniforme in $[0,1/2]$.

$\boxed{3}$

Sia $X_i = D_i^2$, $i = 1,2$.

La trasformazione $g(D) = D^2$ è strettamente crescente in $[0,1/2]$. Inoltre

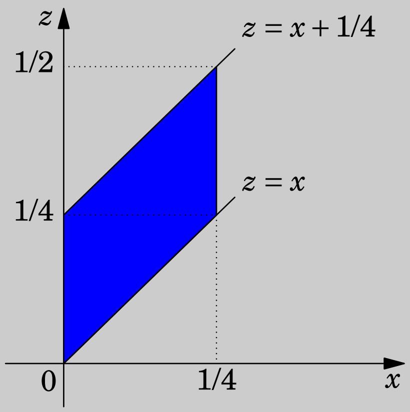
$$g^{-1}(x) = \sqrt{x}; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

Quindi

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} 2 I_{[0,1/2]}(\sqrt{x}) = x^{-1/2} I_{[0,1/4]}(x).$$

3

Sia ora $Z = X_1 + X_2$. La densità di Z è data da (vedere la figura):



$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-1/2} I_{[0,1/4]}(x)(z-x)^{-1/2} I_{[0,1/4]}(z-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(z-x)}} I_{[0,1/4]}(x) I_{[0,1/4]}(z-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(z-x)}} \left[I_{[0,1/4]}(z) I_{[0,z]}(x) + I_{(1/4,1/2]}(z) I_{(z-1/4,1/4]}(x) \right] \mathrm{d}x \\
&= I_{[0,1/4]}(z) \int_0^z \frac{1}{\sqrt{x(z-x)}}\,\mathrm{d}x + I_{(1/4,1/2]}(z) \int_{z-1/4}^{1/4} \frac{1}{\sqrt{x(z-x)}}\,\mathrm{d}x \\
&= I_{[0,1/4]}(z) \left\{ \arcsin\left[\frac{2}{z}\left(x - \frac{z}{2}\right) \right] \right\}_{x=0}^{x=z} \\
&\qquad + I_{(1/4,1/2]}(z) \left\{ \arcsin\left[\frac{2}{z}\left(x - \frac{z}{2}\right) \right] \right\}_{x=z-1/4}^{x=1/4} \\
&= I_{[0,1/4]}(z) \{ \arcsin(1) - \arcsin(-1) \} \\
&\qquad + I_{(1/4,1/2]}(z) \left\{ \arcsin\left[\frac{1}{2z} - 1 \right] - \arcsin\left[1 - \frac{1}{2z} \right] \right\} \\
&= 2 I_{[0,1/4]}(z) \arcsin(1) \\
&\qquad + 2 I_{(1/4,1/2]}(z) \arcsin\left[\frac{1}{2z} - 1 \right] \\
&\qquad = \pi I_{[0,1/4]}(z) + 2 I_{(1/4,1/2]}(z) \arcsin\left[\frac{1}{2z} - 1 \right].
\end{aligned}
$$

4

Per finire, dobbiamo calcolare la densità di $D = \sqrt{Z} = h(Z)$, trasformazione strettamente crescente sul supporto di Z, ossia su $[0, 1/2]$.

Risulta

$$h^{-1}(x) = x^2; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} h^{-1}(x) = 2x.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} f_D(x) &= 2x f_Z\left(x^2\right) \\ &= 2x \left\{ \pi I_{[0,1/4]}(x^2) + 2 I_{(1/4,1/2]}(x^2) \arcsin\left[\frac{1}{2x^2} - 1\right] \right\} \\ &= 2x\pi I_{[0,1/2]}(x) + 4x I_{(1/2,1/\sqrt{2}]}(x) \arcsin\left[\frac{1}{2x^2} - 1\right]. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$

(b) Poichè il supporto di D è $[0, 1/\sqrt{2}]$ e $3/4 > 1/\sqrt{2}$,

$$\mathrm{P}(D < 3/4) = 1.$$

$\boxed{1}$

Esercizio 2 **(15 Punti)**

Si consideri l'integrale

$$I = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

(a) Calcolare l'integrale usando le tabelle per la funzione di ripartizione della normale standard. [3]

Si dica, inoltre, come calcolare in maniera approssimata l'integrale, avendo a disposizione

(b) Una sequenza di osservazioni indipendenti, $u_1, u_2, \ldots, u_n$, da [4]

$$U \sim \mathscr{U}(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

(Suggerimento: scrivere l'integrale come il valore atteso di una funzione di U)

(c) Una sequenza di osservazioni indipendenti, $v_1, v_2, \ldots, v_n$, da [4]

$$V \sim \mathscr{U}(0, 1)$$

(Suggerimento: mostrare che

$$V = g(U) = \frac{U + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

e sostituire $U = g^{-1}(V)$ nel valore atteso del punto precedente)

(d) Una sequenza di osservazioni indipendenti, $z_1, z_2, \ldots, z_n$, da [4]

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

(Suggerimento: scrivere l'integrale come il valore atteso di una funzione di Z)

Soluzione:

(a) Conviene prima di tutto considerare la trasformazione

$$z = \sqrt{2}x \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{z}{\sqrt{2}}.$$

$\boxed{1}$

Il differenziale è quindi

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2}}.$$

L'integrale diventa

$$I = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-z^2/2} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2}}.$$

Conviene adesso moltiplicare e dividere per $\sqrt{\pi}$, in modo da far comparire la densità di una normale standard:

$$I = \sqrt{\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{e}^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}z = \sqrt{\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \phi(z) \mathrm{d}z.$$

$\boxed{1}$

In termini della funzione di ripartizione della normale standard:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\pi}\left[\Phi(\sqrt{2}) - \Phi(-\sqrt{2})\right] \\ &= \sqrt{\pi}\left[\Phi(\sqrt{2}) - \Phi(-\sqrt{2})\right] \\ &= \sqrt{\pi}\left[2\Phi(\sqrt{2}) - 1\right] = \sqrt{\pi}[2 \times 0.9207 - 1] = 1.4913. \end{aligned}$$

$\boxed{1}$

(b) La densità di U è

$$f_U(z) = \frac{I_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}(z)}{2\sqrt{2}}.$$

Possiamo quindi scrivere l'integrale come

$$
\begin{aligned}
I &= \sqrt{\pi} \times 2\sqrt{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \phi(z) \mathrm{d}z \\
&= 2\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{I_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}(z)}{2\sqrt{2}} \phi(z) \mathrm{d}z \\
&= 2\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(z) f_U(z) \mathrm{d}z = 2\sqrt{2\pi} \mathbb{E}\left[\phi(U)\right].
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$

Per la Legge dei Grandi Numeri,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi(U_i) \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathbb{E}\left[\phi(U)\right],$$

essendo $U_1, \ldots, U_n$, n repliche indipendenti di U.

Possiamo quindi approssimare l'integrale come

$$I \approx 2\sqrt{2\pi} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi(u_i).$$

$\boxed{2}$

(c) Se

$$V = g(U) = \frac{U + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}},$$

la trasformazione inversa è

$$U = g^{-1}(V) = 2\sqrt{2}V - \sqrt{2}.$$

Essendo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} g^{-1}(v) = 2\sqrt{2},$$

la densità di V è

$$f_V(v) = 2\sqrt{2} f_U\left(2\sqrt{2}v - \sqrt{2}\right) = I_{[0,1]}(v).$$

Quindi V ha proprio distribuzione uniforme standard.

$\boxed{2}$

Allora

$$I = 2\sqrt{2\pi}\mathbb{E}\left[\phi(U)\right] = 2\sqrt{2\pi}\mathbb{E}\left[\phi(2\sqrt{2}V - \sqrt{2})\right].$$

Sempre in base alla Legge dei Grandi Numeri possiamo approssimare l'integrale come

$$I \approx 2\sqrt{2\pi}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi(2\sqrt{2}v_i - \sqrt{2}).$$

$\boxed{2}$

(d) È possibile scrivere l'integrale come

$$I = \sqrt{\pi}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\phi(z)\mathrm{d}z = \sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} I_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}(z)\phi(z)\mathrm{d}z = \sqrt{\pi}\mathbb{E}\left[I_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}(Z)\right].$$

$\boxed{2}$

Pertanto

$$\begin{aligned} I &\approx \sqrt{\pi}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}(z_i) \\ &= \sqrt{\pi}\frac{\#(z_i \text{ compresi tra } -\sqrt{2} \text{ e } \sqrt{2})}{n}. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$