

Esercizi vari
Corso di Laurea in M.Q.E.G.A.
A.A. 2008/2009

Esercizio 1. Disegnare il dominio $Dom(f)$, descrivere le caratteristiche topologiche di $Dom(f)$ e studiare il segno delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = \sqrt{\log(-x^2 + 4x - 2)}$

2. $f(x, y) = \frac{\log(xy - 1)}{\sqrt{y - x^2}}$

3. $f(x, y) = \log(y - x)$

4. $f(x, y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$

5. $f(x, y) = \frac{1}{\log(1 - x - y)}$

6. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$

Esercizio 2. Stabilire se le seguenti funzioni sono continue derivabili e differenziabili:

1. $f(x, y) = \sqrt{|x \tan y|}$

2. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} & se(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & se(x, y) = (0, 0) \end{cases}$

3. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + xy^4}{x^2 + y^2} & se(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & se(x, y) = (0, 0) \end{cases}$

4. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^4} & se(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & se(x, y) = (0, 0) \end{cases}$

5. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3) + xy^4}{x^2 + y^2} & se(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & se(x, y) = (0, 0) \end{cases}$

6. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y + 4xy^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} & se(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & se(x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Esercizio 3. Date le seguenti successioni di funzioni determinare il limite puntuale f e dire se tale limite è uniforme:

1. $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2}$ in $\mathcal{C}([0, 1])$
2. $f_n(x) = \frac{n^2}{1 + n^2 x^2}$ in $\mathcal{C}([\frac{1}{2}, 1])$
3. $f_n(x) = (1 - x)x^n$ in $\mathcal{C}([0, 1])$
4. $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$ in $\mathcal{C}([0, 1])$
5. $f_n(x) = \frac{-4n^2 x^2}{2 + 3n^2 x^2}$ in $\mathcal{C}([-1, 1])$
6. $f_n(x) = \frac{n^2 x^2}{1 + n^2 x^2}$ in $\mathcal{C}([0, 1])$

Esercizio 4. Determinare e classificare i punti critici delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = \log x \log y$
2. $f(x, y) = x^3 + 4xy^2 - 4x$
3. $f(x, y) = y^2 + 3xy$
4. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 6(x - y)^2 + 6$

Esercizio 5. Calcolare i seguenti integrali:

1. $\int_D \int_D y e^x dx dy$ dove D è la regione di piano compresa tra le curve $y = |x|$ e $y = 3$.
2. $\int_D \int_D \log(x^2 + y^2) dx dy$ dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | e^2 \leq x^2 + y^2 \leq e^4\}$
3. $\int_D \int_D (x^2 + y^2) dx dy$ dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 ; y \geq 0\}$
4. $\int_D \int_D \frac{\sin y}{y} dx dy$ dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq \pi ; x \leq y \leq \pi\}$
5. $\int_D \int_D x^2 + y^2 dx dy$ dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, y \leq 0\}$
6. $\int_D \int_D xy dx dy$ dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Esercizio 6. Calcolare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

1. $y'(x) = \frac{1}{x} y^2(x) - \frac{1}{x}$ con $x > 0$
2. $y(x)' = \frac{y(x)}{e^x - 1} + 1$ con $x > 0$

3. $y'(x) = 2xy + e^{x^2} \cos(x)$

4. $y''(x) - 3y'(x) - 4y(x) = e^{2x}$

5. $y'' - 2y' - 3y = 0$

6. $y' = 2xy + e^{x^2} \cos x$