Esercizi settimanali (04 dicembre 2007)

(1) Stabilire per quali valori di α e β le seguenti funzioni risultano continue in $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x - 3 & x \le 1 \\ \alpha x + \beta & x > 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ \alpha \sin x + \beta & -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

(2) Determinare α e β in modo che la funzione $f(x)$ definita in $(-1, 1)$ da

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin^2 x & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 0 \\ |x|^\beta \cos^2 \dfrac{1}{x} & -1 < x < 0 \end{cases}$$

sia continua.

(3) Sia $f(x)$ la funzione definita in $(0, 2)$ da:

$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \end{cases}$

Determinare l'insieme A dei punti di discontinuità di $f(x)$.

(4) Sia $f(x)$ la funzione definita in $(0, 2)$ da:

$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 & 1 \le x < 2 \end{cases}$

Determinare l'insieme A dei punti di discontinuità di $f(x)$.

(5) Verificare che la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$ da:

$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

non è continua in alcun punto.

(6) Provare che per ogni polinomio di grado dispari $P(x)$, esiste almeno un $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $P(x_0) = 0$.

(7) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua nell'intervallo $I = [0, 1]$ e tale che $f(I) \subset [0, 1]$. Provare che esiste almeno un valore $\xi \in I$ tale che $f(\xi) = \xi$.

(8) Dare un esempio di funzione continua nell'intervallo aperto $(-1, 1)$ che non abbia ivi nè massimo nè minimo.

(9) Dare un esempio di funzione continua nell'intervallo aperto $(0, 1]$ che non abbia ivi nè massimo nè minimo.