Esercizi settimanali (30 ottobre 2007)

(1) Calcolare i seguenti limiti di successioni:

(a) $\lim_{n\to+\infty}(e^n - 2^n)$

(b) $\lim_{n\to+\infty}(n^{\sqrt{2}})$

(c) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2}$

(d) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n}$

(e) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\pi}$

(f) $\lim_{n\to+\infty}(2^n - n!)$

(g) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n\ 3^{(n+1)} + n^5 + 1)n!}{(3^n + 2^n)(n+1)!}$

(h) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log^2 n}{n}$

(i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n! + 2^n}{(n+1)!}$

(2) Utilizzando i teoremi di confronto calcolare:

(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3 + \sin n}{n}$

(b) $\lim_{n\to+\infty}(n - \sin n)$

(c) $\lim_{n\to+\infty} \cos n[\log(\sqrt{n} - 1) - \log\sqrt{n-1}]$

(3) Il primo teorema di Cesàro afferma che:
Se la successione $\{a_n\}$ è regolare è anche regolare ed ammette lo stesso limite la successione $\{\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\}$, cioè vale la relazione $\lim_{n\to\infty}\{\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Utilizzando la successione $a_n = (-1)^n$, verificare che esso fornisce una condizione necessaria ma non sufficiente.

(4) Estrarre dalla successione $a_n = (-1)^n \frac{3n+1}{n}$ due sottosuccessioni convergenti a limiti distinti.

(5) Estrarre dalla successione $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$ una sottosuccessione convergente.

(6) La successione

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \leq 100 \\ n & n > 100 \end{cases}$$

$\boxed{a}$ diverge a $+\infty$ $\boxed{b}$ converge a 1 $\boxed{c}$ converge a 0 $\boxed{d}$ è irregolare

(7) La successione

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ n & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$\boxed{a}$ diverge a $+\infty$ $\boxed{b}$ converge a 1 $\boxed{c}$ converge a 0 $\boxed{d}$ è irregolare

(8) Quali tra le seguenti successioni sono monotone? Quali sono limitate?
$a_n = \dfrac{n-1}{n}$ $\qquad b_n = (-1)^n 2^n \qquad c_n = \dfrac{1}{n!} \qquad d_n = \sin n$

(9) Individuare infinitesimi ed infiniti tra le successioni seguenti:
$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2} \qquad b_n = \sqrt[3]{-n} \qquad c_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n^2} \qquad d_n = \cos \dfrac{1}{n}$

(10) La seguente affermazione:
Il limite della successione

$$a_n = \frac{1}{(3 + \sin 2n)^n}$$

non esiste perché la successione $\{\sin 2n\}$ *non ha limite.*

$\boxed{V}$ $\qquad\qquad$ $\boxed{F}$