Esercizi settimanali (16 ottobre 2007)

(1) Verificare che:
   (a) $\dfrac{1}{2} \in \{x \in \mathbb{R} | 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0\}$
   (b) $3 \in \{x \in \mathbb{R} | x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$
   (c) $10 \notin \{x \in \mathbb{R} | -2 < 3x \leq 5\}$

(2) Detto $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, dire per quali valori di a e b l'applicazione f di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ è bigettiva e calcolare f^{-1}.

(3) Siano $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 3x + 2$ due funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, calcolare $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$ e verificare che i risultati ottenuti sono diversi.

(4) Dati tre insiemi A, B, C e date le applicazioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ provare che:
   (a) se f e g sono iniettive allora $(g \circ f)$ è iniettiva.
   (b) se $(g \circ f)$ è iniettiva allora f è iniettiva.

(5) Siano A e B sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Sia $f : A \longrightarrow B$ tale che $f(x) = x^2$
   (a) Se $A = B = \mathbb{R}$ f è iniettiva? E surgettiva?
   (b) Se $A = \mathbb{R}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ f è iniettiva? E surgettiva?
   (c) Se $A = B = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ f è iniettiva? E surgettiva?

(6) Se A e B sono due insiemi totalmente ordinati e disgiunti ($A \cap B = \emptyset$) fissare almeno un ordinamento totale per l'insieme $A \cup B$.

(7) Provare che se A e B sono due sottoinsiemi non vuoti e limitati di M, dotati di estremo inferiore ed estremo superiore si ha: $\inf A \geq \inf B$ e $\sup B \geq \sup A$.

(8) Determinare l'estemo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi di numeri reali:
   (a) $\left\{ \dfrac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$
   (b) $\left\{ \dfrac{x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R} \right\}$
   (c) $\left\{ \dfrac{x}{x+1}, x \in \mathbb{R} \right\} \cap \{-2 \leq x < -1\}$
   (d) $\left\{ \dfrac{3n^2}{4n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$
   (e) $\left\{ (-1)^n \dfrac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$

(9) Sia $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ provare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = q \frac{1 - q^n}{1 - q}$$