# Matematica Finanziaria
# Soluzione della prova scritta del 15/05/09

**ESERCIZIO 1**

Il valore in $t = 60$ semestri dei versamenti effettuati dall'individuo è

$$\begin{aligned} W(m) &= R(1+i_2)^m + R(1+i_2)^{m-1} + \ldots R(1+i_2) = \\ &= R(1+i_2)\frac{(1+i_2)^m - 1}{i_2} \end{aligned} \tag{1}$$

essendo

- $R$ l'importo della rata – 500€.
- $m$ il numero delle rate – 60 (2 rate annue per 30 anni).
- $i_2$ il tasso d'interesse semestrale equivalente al tasso $i$ del 2% annuo.

Per determinare $i_2$, si osserva che esso soddisfa la seguente relazione:

$$(1+i_2)^2 = 1 + i \tag{2}$$

e quindi, il tasso semestrale equivalente $i_2$ risulta essere

$$i_2 = (1+i)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1,02^{0,5} - 1 = 0,00995 \tag{3}$$

Possiamo quindi determinare $W(60)$:

$$W(60) = 500 \cdot 1,00995^{60} \cdot 1,00995 \frac{1 - 1,00995^{-60}}{0,00995} = 41175,59621€ \tag{4}$$

La somma appena calcolata "risulta essere" il prezzo pagato in $t = 30$ anni, quando cioè l'individuo ne avrà 60, per acquistare la rendita perpetua posticipata mensile. Il valore in $t = 30$ di tale rendita sarà

$$V(60) = \frac{R_1}{i_{12}} \tag{5}$$

essendo

- $R_1$ l'importo della rata – 400€.
- $i_2$ il tasso d'interesse <u>mensile</u> usato per la valutazione (si osserva che la rendita è mensile).

Si ricorda che il Tasso Interno di Rendimento di un'operazione finanziaria è quel tasso d'interesse che rende l'operazione stessa equa in un dato istante di tempo. Allora, in $t = 60$ semestri noi paghiamo l'importo $W(60) =$

41175, 59621€ e riceviamo il valore, sempre in $t = 60$ semestri, della rendita che è dato dall'equazione (5). L'operazione finanziaria risulta equa se

$$W(60) = V(60) \Rightarrow 41175,59621 = \frac{400}{i_{12}} \tag{6}$$

da cui si ricava

$$i_{12} = \frac{400}{41175,59621} = 0,009714492 \tag{7}$$

Infine, bisogna convertire il T.I.R mensile su base annua. Si ha

$$1 + i = (1 + i_{12})^{12} \Rightarrow i = (1 + i_{12})^{12} - 1 = 1,009714492^{12} - 1 = 0,123008581$$

**ESERCIZIO 2**

L'importo da finanziare è il 60% di 60000€(il rimanente 40% è stato versato in anticipo). L'ammontare del debito è dunque

$$C = 0,6 \cdot 60000 = 36000€ \tag{8}$$

La condizione di equivalenza finanziaria relativa ad un mutuo a rate costanti immediate bimestrali posticipate è

$$C = R\frac{1-(1+i_6)^{-m}}{i_6} \tag{9}$$

essendo

- $C$ l'importo da finanziare – 36000€
- $R$ l'ammontare della rata – al massimo 7000€
- $m$ il numero delle rate bimestrali da pagare – da determinare
- $i_6$ il tasso bimestrale equivalente al tasso annuo del 4%.

Calcoliamo $i_6$:

$$(1+i_6)^6 = 1+0,04 \Rightarrow i_6 = 1,04^{\frac{1}{6}} - 1 = 0,006558197. \tag{10}$$

Dall'equazione (12) possiamo dunque ricavare $m$, supponendo come rata il suo ammontare massimo:

$$m = -\frac{log(1-i_6\frac{C}{R})}{log(1+i_6)} = 5,248722968 \tag{11}$$

Arrotondiamo quindi il risultato 6 (il più piccolo intero maggiore di 5,2) e usiamo nuovamente l'equazione (12), questa volta per calcolare l'ammontare preciso della rata da corrispondere:

$$R = \frac{C}{\frac{1-(1+i_6)^{-m}}{i_6}} = 6138,472333€. \tag{12}$$

Il piano d'ammortamento è descritto nella Tabella

| Semestre | Rata | Quota Capitale | Quota Interessi | Debito Residuo |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | 36000 |
| 1 | 6138,47 | 5902,38 | 236,10 | 30097,62 |
| 2 | 6138,47 | 5941,09 | 197,39 | 24156,54 |
| 3 | 6138,47 | 5980,05 | 158,42 | 18176,49 |
| 4 | 6138,47 | 6019,27 | 119,20 | 12157,22 |
| 5 | 6138,47 | 6058,74 | 79,73 | 6098,48 |
| 6 | 6138,47 | 6098,48 | 40,00 | 0,00 |

Table 1: Piano d'ammortamento dell'Esercizio 2

## ESERCIZIO 3

Il T.I.R. di un titolo a cedola fissa emesso alla pari è dato da

$$i^* = \frac{I}{C} \tag{13}$$

essendo

- $I$ la cedola pagata
- $C$ il valore facciale del titolo.

Il titolo 1 è un TCF con valore facciale $C = 1800$€emesso alla pari con cedola trimestrale e tasso nominale annuo del 5%. Ciò significa che

$$I = 1800 \cdot \frac{0,05}{4} = 22,5€ \tag{14}$$

e quindi il T.I.R trimestrale del titolo 1 è $i_4 = 22,5/1800$= 0,0125. Convertendolo su basse annuale si ottiene:

$$(1+i_4)^4 = (1+i) \Rightarrow i = (1+i_4)^4 - 1 = 1,0125^4 - 1 = 0,050945337 \tag{15}$$

Il titolo due è invece un TCF che paga una cedola annuale di $I = 2200 \cdot 0,02 = 44$€. Il T.I.R. risolve dunque l'equazione

$$2150 = 44(1+i)^{-1} + (2200+44)(1+i)^{-2}. \tag{16}$$

che, in termini di fattore di sconto, diventa

$$2150 = 44v + 2244v^2 \tag{17}$$

che è un'equazione di secondo grado nell'incognita $v$. Facciamo ora alcune osservazioni:

- Non c'è bisogno di applicare algoritmi numerici (tipo il metodo delle corde) per risolvere un'equazione di secondo grado. Conosciamo come risolverla in modo esatto.

- Per trovare una soluzione finanziariamente significativa (che significa $0 < v < 1$) si deve soddisfare la relazione Prezzo del titolo $< \sum X_k$ dove i vari $X_k$ rappresentano i vari pagamenti. Nel caso particolare la condizione diventa $2150 < 44 + 2244$ e risulta banalmente soddisfatta.

- In generale, un'equazione di secondo grado ammette esattamente due soluzioni nel campo dei numeri complessi. In aggiunta, il teorema di Cartesio ci assicura che entrambe le soluzioni dell'equazione (17) sono reali. Sappiamo anche che esiste una soluzione finanziariamente significativa che è quella che dobbiamo scegliere tra le due che troveremo.

Risolviamo dunque l'equazione (17) con la nota formula di risoluzione. Abbiamo

$$v = \frac{-44 \pm \sqrt{44^2 + 4 \cdot 2244 \cdot 2150}}{2 \cdot 2244} = \frac{-44 \pm 4393,214768}{4488} \tag{18}$$

Abbiamo dunque $v_1^* = 0,969076374$ e $v_2^* = -0,988684218$. Scegliamo dunque $V_1^*$ che è la sola soluzione finanziariamente significativa, e quindi troviamo il T. I. R., $i^* = \frac{1}{v_1^*} - 1 = \frac{1}{0,969076374} = 0,03191$.

Confrontando i due T.I.R, osserviamo che l'individuo deciderà di investire sul titolo 1 e ne ascuisterà 50000/1800 = 27,78 quote.

Per risolvere il secondo punto dell'esercizio, basta applicare la formula della duration al titolo 1. Chiamando $i_4$ il T.I.R trimestrale, si ottiene

$$\begin{aligned} D(0, \text{titolo } 1) = & \frac{1 \cdot 22,5 \cdot (1+i_4)^{-1} + 2 \cdot 22,5 \cdot (1+i_4)^{-2}}{1800} + \\ & + \frac{3 \cdot 22,5 \cdot (1+i_4)^{-3} + 4 \cdot 1822,5 \cdot (1+i_4)^{-4}}{1800} \end{aligned} \tag{19}$$

Il risultato è $D(0, \text{titolo } 1) = 3,92653$ trimestri $= \frac{3,92653}{4}$ anni $= 0,98163$ anni.

Per risolvere il terzo punto dell'esercizio, si ricorda che la duration di un portafoglio di due titoli $\underline{Z} = \alpha\underline{X} + \beta\underline{X}$ può essere ricavata a partire dalle duration rispettivamente di $\underline{X}$ ed $\underline{\mathrm{Y}}$ tramite la seguente:

$$D(t_0, \underline{Z}) = \frac{\alpha \cdot V(t_0, \underline{X}) \cdot D(t_0, \underline{X}) + \beta \cdot V(t_0, \underline{Y}) \cdot D(t_0, \underline{Y})}{\alpha \cdot V(t_0, \underline{X}) + \beta \cdot V(t_0, \underline{Y})} \tag{20}$$

essendo

- $D(t_0, \underline{Z})$, $D(t_0, \underline{X})$, $D(t_0, \underline{Y})$ le Duration in $t_0$ di $\underline{Z}$, $\underline{X}$ ed $\underline{Y}$ rispettivamente;

- $V(t_0, \underline{X})$ e $V(t_0, \underline{Y})$ i valori in $t_0$ di $\underline{X}$ ed $\underline{Y}$ rispettivamente.

Ora, indichiamo con $\underline{X}$ il titolo 1, di cui possediamo $\alpha = 27,78$ quote, e con $\underline{Y}$ il Titolo a Cedola Fissa, di cui dobbiamo determinare il numero di quote, $\beta$, da acquistare in modo da formare un portafoglio, che chiamiamo $\underline{Z}$ con Duration pari a 2,5 anni. In altre parole, dobbiamo risolvere l'equazione:

$$2,5 = \frac{27,78 \cdot 1800 \cdot 0,98163 + \beta \cdot V(t_0, \underline{Y}) \cdot D(t_0, \underline{Y})}{27,78 \cdot 1800 + \beta \cdot V(t_0, \underline{Y})} \tag{21}$$

nell'incognita $\beta$. Ora, poichè $D(t_0, \underline{Y}) = 3$ anni e $V(t_0, \underline{Y}) = 2000(1+i_4)^{-12} = 1723,017$€, si ha

$$2,5 = \frac{27,78 \cdot 1800 \cdot 0,98163 + \beta \cdot 1723,017 \cdot 3}{27,78 \cdot 1800 + \beta \cdot 1723,017} \tag{22}$$

e quindi

$$125000 + 4307,5425\beta = 49081,5 + \beta 5169,051 \tag{23}$$

da cui

$$\beta = \frac{125000 - 49081,5}{5169,051 - 4307,5425} = 88,12 \tag{24}$$

La soluzione del quarto punto è piuttosto immediata. Passato un mese dall'investimento, il portafoglio, che all'epoca $t = 0$ aveva Duration pari a 2,5 anni, avrà Duration pari a $2,5 - 1/12$ anni. Di conseguenza, la variazione percentuale del valore del portafoglio con rispetto ad una variazione del tasso annuo pari a $\triangle i = 0,002$ sarà approssimata da

$$\frac{\triangle V}{V} \approx -\frac{1}{1+i} \triangle i (D(1\text{mese}, \underline{Z})) = -\frac{1}{1+0,5094} \cdot 0,002(2,5-1/12) = -0,004599.$$

Si osserva l'uso del tasso annuale in quanto tutte le quantità nella precedente formula devono espresse nella stessa base temporale (nello specifico annuale).